ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ
Ο τύπος Taylor συνέχεια....

<u>Πρόταση 1</u> Έστω Δ διάστημα του $\mathbb{R}$, $f: \Delta \to \mathbb{R}$ συνάρτηση και x_0 εσωτερικό σημείο του Δ. Έστω ότι υπάρχουν και είναι συνεχείς οι παράγωγοι $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ της f στο $[x_0-\delta, x_0+\delta] \subseteq \Delta$, $\delta>0$ και ότι υπάρχει η παράγωγος $f^{(n+1)}$ στο $(x_0-\delta, x_0+\delta)$.
Τότε για κάθε $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$ υπάρχει $\xi \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \boxed{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$$

Υπόλοιπο κατά Lagrange

<u>Πρόταση 2</u> Έστω Δ διάστημα του $\mathbb{R}$, $f: \Delta \to \mathbb{R}$ συνάρτηση και x_0 εσωτερικό σημείο του Δ. Έστω ότι υπάρχουν και είναι συνεχείς οι παράγωγοι $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ της f στο $[x_0-\delta, x_0+\delta] \subseteq \Delta$, $\delta>0$ και ότι υπάρχει η παράγωγος $f^{(n+1)}$ στο $(x_0-\delta, x_0+\delta)$.
Τότε για κάθε $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$ υπάρχει $\xi \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ τέτοιο, ώστε

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \boxed{(x-x_0)\frac{(x-\xi)^n}{n!}f^{(n+1)}(\xi)}$$

Υπόλοιπο κατά Cauchy

Απόδειξη Έστω $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

- Προφανώς για $x = x_0$ ο τύπος αληθεύει.
- Χωρίς περιορισμό της γενικής περίπτωσης υποθέτουμε ότι $x_0 < x$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$\varphi : [x_0, x] \longrightarrow \mathbb{R}$

με τύπο

$$\varphi(t) = f(x) - \left[f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \right],$$

$t \in [x_0, x]$.

Για την συνάρτηση φ έχουμε:

☑ η φ είναι συνεχής στο $[x_0, x]$

☑ η φ είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, x).

Οπότε από το ΘΜΤ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_0, x)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \varphi'(\xi)$$

ή

$$\frac{0 - \varphi(x_0)}{x - x_0} = -\frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi)$$

ή

$$\varphi(x_0) = (x - x_0)\frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi)$$

ή

$$f(x) - \left[f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \right]$$

$$= (x-x_0)\frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi)$$

ή

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$+(x-x_0)\frac{(x-\xi)^n}{n!}f^{(n+1)}(\xi)$$

Σχόλιο

$$\varphi'(t)=\left(f(x)-\left[f(t)+\frac{f'(t)}{1!}(x-t)+\dots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right]\right)'$$

$$=-\left[f'(t)+\frac{f''(t)}{1!}(x-t)+\frac{f'(t)}{1!}(x-t)'+\dots+\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\right.$$

$$\left.+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}\left((x-t)^n\right)'\right]$$

$$=-\left[\cancel{f'(t)}+\cancel{\frac{f''(t)}{1!}}(x-t)-\cancel{f'(t)}+\dots+\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\right.$$

$$\left.-\frac{f^{(n)}(t)}{\cancel{n!}}\cancel{\cdot n(x-t)^{n-1}}\right]$$

$$=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Ασκήσεις (προσπαθείο μόνος)

① Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$
Να γραφούν οι 4 πρώτοι όροι του αναπτύγματος Taylor για $x_0 = 0$.

② Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln \frac{1}{x}$. Να γραφούν οι 3 πρώτοι όροι του αναπτύγματος Taylor για $x_0 = \frac{1}{e}$.

③ Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^6 + 5x^2 + 2x + 10$$

Να γραφεί με δυνάμεις του $x-1$.