Ανάπτυγμα Taylor
Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Θυμίζουμε το ΘΜΤ

<u>Θεώρημα 1</u> Έστω f συνάρτηση συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β). Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_0) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

<u>Θεώρημα 2</u> (Γενικευμένο Θεώρημα Μέσης Τιμής)
Έστω f, g συναρτήσεις, συνεχείς στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμες στο (α, β). Αν $g'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

<u>Απόδειξη</u> Έστω $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Εάν $g(\alpha) = g(\beta)$, τότε από το Θεώρημα Rolle θα υπήρχε $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $g'(x_0) = 0$ (Άτοπο αφού $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$). Άρα $g(\alpha) \neq g(\beta)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = f(x) - f(\alpha) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} \left(g(x) - g(\alpha) \right), \quad x \in [\alpha, \beta]$$

Η φ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$. Οπότε από το Θεώρημα Rolle υπάρχει σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τ.ω. $\varphi'(x_0) = 0$.

Άλλα

$$\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}\,g'(x), \quad x\in(\alpha,\beta)$$

Οπότε

$$\varphi'(x_0)=0 \Longrightarrow f'(x_0)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}\,g'(x_0)=0$$

$$\Longrightarrow \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Θεώρημα 3 (Ανάπτυγμα Taylor – Τύπος TAYLOR)

Έστω Δ διάστημα του $\mathbb{R}$, [redacted] $f:\Delta\to\mathbb{R}$ συνάρτηση και x_0 εσωτερικό σημείο του Δ. Έστω ότι υπάρχουν και είναι συνεχείς οι παράγωγοι $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ της f στο $[x_0-\delta, x_0+\delta]\subseteq\Delta$, $\delta>0$ και ότι υπάρχει η παράγωγος $f^{(n+1)}$ στο $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Τότε για κάθε $x\in[x_0-\delta, x_0+\delta]$ υπάρχει $\xi\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ τ.ω.

$$f(x)=f(x_0)+\frac{x-x_0}{1!}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)$$
$$+\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$$

Σχόλιο Η ποσότητα $\frac{(x-x_0)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$ το οποίο συμβολίζουμε ως $R_{n,x_0}(x)$ καλείται υπόλοιπο κατά Lagrange. Ο παραπάνω τύπος καλείται ανάπτυγμα Taylor της f στο x_0. Όταν $x_0=0$ ο παραπάνω τύπος καλείται τύπος Maclaurin.

Απόδειξη Έστω $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$.

- Η πρόταση είναι προφανής όταν $x=x_0$.
- Χωρίς περιορισμό της γενικής περίπτωσης υποθέτουμε ότι $x_0<x$.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$\varphi : [x_0, x] \longrightarrow \mathbb{R}$$

με τύπο

$$\varphi(t) = f(x) - \left[f(t) + (x-t)f'(t) + \frac{(x-t)^2}{2!} f''(t) + \dots + \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) \right]$$

και

$$g : [x_0, x] \longrightarrow \mathbb{R}$$

με τύπο

$$g(t) = (x-t)^{n+1}.$$

Οι συναρτήσεις φ, g είναι συνεχείς στο $[x_0, x]$, παραγωγίσιμες στο (x_0, x) τ.ω.

$$\varphi'(t) = -\left[f'(t) + (-1)f'(t) + (x-t)f''(t) + \dots + \frac{n(x-t)^{n-1}}{n!}(-1)f^{(n)}(t) + \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \right]$$

$$= -\left[\cancel{f'(t)} - \cancel{f'(t)} + \cancel{(x-t)f''(t)} + \dots - \cancel{\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)} + \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \right]$$

$$= -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t),$$

$$g'(t) = (n+1)(x-t)^n \cdot (x-t)' = -(n+1)(x-t)^n,$$

και

$$g'(t) = -(n+1)(x-t)^n \neq 0, \quad \forall t \in (x_0, x).$$

Οπότε υπάρχει σημείο $\xi \in (x_0, x)$ τ.ω.

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{\varphi'(\xi)}{g'(\xi)}$$

ή

$$\frac{0-\varphi(x_0)}{0-(x-x_0)^{n+1}} = \frac{-\frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi)}{-(n+1)(x-\xi)^n}$$

ή

$$\frac{\varphi(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

ή $\quad \varphi(x_0) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$

ή

$$f(x) - \left[f(x_0) - (x-x_0) f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)\right]$$

$$= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

ή

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Ασκήσεις (ΠΡΟΣΠΑΘΩ ΜΟΝΟΣ)

① Να γραφούν τα αναπτύγματα Taylor (τρεις πρώτοι όροι) των παρακάτω συναρτήσεων στο $x_0 = 2$.

(α) $f(x) = xe^{x^2+1}$

(β) $g(x) = \sqrt{x^2+x+1}$

(γ) $h(x) = 3^{\ln(x^2+1)}$

② Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 4x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 6x + 8$

Να γραφεί με δυνάμεις του $x-3$.

③ Να γραφούν οι 4 πρώτοι όροι του αναπτύγματος Taylor της συνάρτησης f στο $x_0 = 10$, όπου

$$f(x) = 8^{\sqrt{x^2+x+1}}.$$