Απειροστικός Λογισμός ΙΙ
Ο τύπος του Taylor για πολυώνυμο

Έστω

$$p(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3+\dots+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\alpha_n x^n,\ \alpha_n\neq 0$$

πολυώνυμο n- βαθμού

- Βρίσκουμε διαδοχικά τις παραγώγους του πολυωνύμου $p(x)$. Οπότε έχουμε

$$p'(x)=\alpha_1+2\alpha_2 x+3\alpha_3 x^2+\dots+(n-1)\alpha_{n-1}x^{n-2}+n\alpha_n x^{n-1}$$

$$p''(x)=1\cdot 2\alpha_2+2\cdot 3\cdot \alpha_3 x+\dots+(n-2)(n-1)\alpha_{n-1}x^{n-3}+(n-1)n\,\alpha_n x^{n-2}$$

$$p'''(x)=1\cdot 2\cdot 3\,\alpha_3+\dots+(n-3)(n-2)(n-1)\alpha_{n-1}x^{n-4}+(n-2)(n-1)n\,\alpha_n x^{n-3}$$

$$\vdots$$

$$p^{(n)}(x)=1\cdot 2\cdot 3\cdots n\,\alpha_n$$

- Θέτουμε στους παραπάνω τύπους $x=0$.

$$\left.\begin{aligned}
p(0)&=\alpha_0\\
p'(0)&=\alpha_1\\
p''(0)&=1\cdot 2\,\alpha_2\\
p'''(0)&=1\cdot 2\cdot 3\,\alpha_3\\
&\vdots\\
p^{(n)}(0)&=1\cdot 2\cdot 3\cdots n\cdot\alpha_n
\end{aligned}\right\}\Rightarrow
\left\{\begin{aligned}
\alpha_0&=p(0)\\
\alpha_1&=\frac{p'(0)}{1!}\\
\alpha_2&=\frac{p''(0)}{1\cdot 2}=\frac{p''(0)}{2!}\\
\alpha_3&=\frac{p'''(0)}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{p'''(0)}{3!}\\
&\vdots\\
\alpha_n&=\frac{p^{(n)}(0)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}=\frac{p^{(n)}(0)}{n!}
\end{aligned}\right.$$

Οπότε το πολυώνυμο γράφεται

$$p(x)=p(0)+\frac{p'(0)}{1!}x+\frac{p''(0)}{2!}x^2+\frac{p'''(0)}{3!}x^3+\dots+\frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Ο παραπάνω τύπος καλείται τύπος Maclaurin

• Έστω

$p(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\dots+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\alpha_n x^n$, $\alpha_n\neq 0$ πολυώνυμο n-βαθμού και $x_0\in\mathbb{R}$. Τότε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ τ.ω.

$$p(x)=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+A_3(x-x_0)^3+\dots+A_n(x-x_0)^n$$

Θέτουμε

$$x-x_0=\xi$$

και

$$p(x_0+\xi)=Q(\xi)$$

Οπότε, έχουμε:

$$p(x)=p(x_0+\xi)=Q(\xi)$$

και συνεπώς

$$Q(\xi)=A_0+A_1\xi+A_2\xi^2+A_3\xi^3+\dots+A_n\xi^n$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω που αναφέραμε

$$A_0=Q(0)$$

$$A_1=\frac{Q'(0)}{1!}$$

$$A_2=\frac{Q''(0)}{2!}$$

$$\dots\dots$$

$$A_n=\frac{Q^{(n)}(0)}{n!}$$

Έχουμε

- $Q(\xi) = p(x_0+\xi) \xrightarrow{\xi=0} Q(0) = p(x_0)$

- $Q'(\xi) = p'(x_0+\xi)\cdot(x_0+\xi)'$
$= p'(x_0+\xi)\cdot 1$
$= p'(x_0+\xi)$

$Q'(\xi) = p'(x_0+\xi) \xrightarrow{\xi=0} Q'(0) = p'(x_0)$

- $Q''(\xi) = \left(p'(x_0+\xi)\right)' = p''(x_0+\xi)\cdot(x_0+\xi)'$
$= p''(x_0+\xi)$

$Q''(\xi) = p''(x_0+\xi) \xrightarrow{\xi=0} Q''(0) = p''(x_0)$

- όμοια

...

$Q^{(n)}(\xi) = p^{(n)}(x_0+\xi)$

$Q^{(n)}(\xi) = p^{(n)}(x_0+\xi) \xrightarrow{\xi=0} Q^{(n)}(0) = p^{(n)}(x_0)$

Οπότε, έχουμε

$A_0 = Q(0) = p(x_0)$

$A_1 = \dfrac{Q'(0)}{1!} = \dfrac{p'(x_0)}{1!}$

$A_2 = \dfrac{Q''(0)}{2!} = \dfrac{p''(x_0)}{2!}$

...

$A_n = \dfrac{Q^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{p^{(n)}(x_0)}{n!}$

Οπότε, έχουμε

$$p(x) = p(x_0) + \frac{p'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{p''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Ο παραπάνω τύπος καλείται τύπος του Taylor

Σχόλιο Αν ένα πολυώνυμο έχει μορφή

$$p(x) = c_0 + \frac{c_1}{1!}(x-x_0) + \frac{c_2}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{c_n}{n!}(x-x_0)^n$$

τότε

$$\begin{cases} c_0 = p(x_0) \\ c_1 = p'(x_0) \\ \vdots \\ c_n = p^{(n)}(x_0) \end{cases}$$

ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ ΤΑΥLOR ΓΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Έστω Δ διάστημα του $\mathbb{R}$, $f: \Delta \to \mathbb{R}$ συνάρτηση και x_0 εσωτερικό σημείο του Δ. Έστω ότι υπάρχουν και είναι συνεχείς οι παράγωγοι $f', f'', \dots, f^{(n)}$ της f στο $[x_0-\delta, x_0+\delta] \subseteq \Delta$, $\delta > 0$ και ότι υπάρχει η παράγωγος $f^{(n+1)}$ στο $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Τότε για κάθε $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$ υπάρχει σημείο $\xi \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ τ.ω.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!}f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi).$$

Άσκηση 1

Να βρεθούν οι τρεις πρώτοι μη-τετριμμένοι όροι στο ανάπτυγμα Taylor στο $x_0 = 0$ της συνάρτησης $f(x) = e^{-x^2}$

Λύση Έχουμε

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

- $f(0) = e^{-0^2} = 1$
- $f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-x^2)' = e^{-x^2} \cdot (-2x)$

  $f'(0) = 0$
- $f''(x) = \left(e^{-x^2} \cdot (-2x)\right)' = \left(e^{-x^2}\right)'(-2x) + e^{-x^2}(-2x)'$

  $= e^{-x^2} \cdot (-2x)(-2x) + e^{-x^2} \cdot (-2)$

  $f''(0) = -2$

Οπότε

$$f(x) \simeq \underbrace{1 + \frac{x}{1!} 0 + \frac{x^2}{2!}(-2)}_{\text{Τρεις πρώτοι όροι}}$$

Άσκηση 2

Να αναπτυχθεί το

$$p(x) = x^3 - x^2 + x + 1$$

σε δυνάμεις του $x-1$.

Λύση Έχουμε

$$p(x) = p(1) + \frac{p'(1)}{1!}(x-1) + \frac{p''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{p'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

$$p'(x) = 3x^2 - 2x + 1 \xrightarrow{x=1} p'(1) = 2$$

$$p''(x) = 6x - 2 \xrightarrow{x=1} p''(1) = 4$$

$$p'''(x) = 6 \xrightarrow{x=1} p'''(1) = 6$$

$$p(1) = 2$$

Οπότε

$$p(x) = 2 + \frac{2}{1!}(x-1) + \frac{4}{2!}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3$$

— . —

Ασκήσεις (Προσπαθώ μόνος)

(1) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x e^{-x}$. Βρείτε τους τέσσερις πρώτους όρους του αναπτύγματος Taylor της f με κέντρο $x_0 = 0$ και υπολογίστε προσεγγιστικά την τιμή της f στο σημείο $x = 0.2$.

Υπόδειξη Μετά από πράξεις έχουμε

$$f(x) \simeq x - x^2 + \frac{x^3}{2}$$

$$\left(f(x) \simeq f(0) + \frac{x-0}{1!} f'(0) + \frac{(x-0)^2}{2!} f''(0) + \frac{(x-0)^3}{3!} f'''(0) \right.$$
$$\left. = \dots = 0 + x - x^2 + \frac{x^3}{2} \right)$$

Στη συνέχεια

$$f(0.2) \simeq 0 + 0{,}2 - (0{,}2)^2 + \frac{(0{,}2)^3}{2} = \dots = 0{,}163746.$$

(2) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{e^{-x} - (1-x)}{x^2}$

Βρείτε τους τέσσερις πρώτους όρους του αναπτύγματος Taylor της f με κέντρο $x_0 = 0$.

(3) Να αναπτυχθεί το $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 6x + 8$ σε δυνάμεις του $x - 2$.