

Θέματα Εξετάσεων
ΓΕΝΙΚΗΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ
Σεπτέμβριος 2018

ΘΕΜΑ 1. (1) Έστω (X, τ) τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$.

α) Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $\tau_A = \{A \cap U : U \in \tau\}$ ορίζει τοπολογία επί του συνόλου A .

β) Αν $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$, $A = \{a, c, d\}$ και $B = \{a, d\}$, τότε να βρεθούν τα σύνολα $Cl_A(B)$, $Cl_X(B)$, $Int_A(B)$, $Int_X(B)$, $Bd_A(B)$ και $Bd_X(B)$.

(2) Να δοθεί ο ορισμός της βάσης τοπολογικού χώρου. Στη συνέχεια να εξετασθεί αν το σύνολο $\beta = \{[a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ αποτελεί βάση για μια τοπολογία επί του $\mathbb{R}$. Να δικαιολογηθεί πλήρως η απαντήσή σας.

ΘΕΜΑ 2. (1) Έστω (X, τ_X) και (Y, τ_Y) τοπολογικοί χώροι και $f : X \rightarrow Y$ απεικόνιση. Πότε η f καλείται συνεχής σε ένα σημείο $x_0 \in X$; και πότε η f καλείται ανοικτή; Στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι η f είναι συνεχής τότε και μόνο τότε όταν $f^{-1}(U) \in \tau_X$ για κάθε $U \in \tau_Y$.

(2) Έστω $(X = \{a, b, c, d\}, \tau_X = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\})$, $(Y = \{1, 2, 3\}, \tau_Y = \{\emptyset, Y, \{1\}, \{1, 2\}\})$ τοπολογικοί χώροι και $f : X \rightarrow Y$ απεικόνιση τέτοια ώστε $f(a) = f(b) = 1$, $f(c) = 2$ και $f(d) = 3$. Να εξετασθεί αν η f είναι συνεχής και ανοικτή.

ΘΕΜΑ 3. (1) Να αποδειχθεί ότι κάθε μετρικός χώρος είναι φυσικός χώρος.

(2) Έστω $(X_\lambda, \tau_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$ τοπολογικοί χώροι. Να δοθούν:

α) Ο ορισμός του συνόλου $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$.

β) Ο ορισμός της τοπολογίας γινόμενο επί του συνόλου $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$.

ΘΕΜΑ 4. (1) Να δοθούν οι ορισμοί των συμπαγών και των συνεκτικών χώρων. Στη συνέχεια να δοθούν δύο παραδείγματα συμπαγών και δύο παραδείγματα συνεκτικών χώρων.

(2) Έστω (X, τ) τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Πότε το A καλείται συμπαγές υποσύνολο του X ; Στη συνέχεια να εξετασθεί αν αληθεύει η πρόταση:

Αν A συμπαγές υποσύνολο ενός Hausdorff χώρου (X, τ) , τότε το A είναι κλειστό υποσύνολο του X .

Αν αληθεύει να δοθεί η απόδειξη σε διαφορετική περίπτωση να δοθεί αντιπαράδειγμα.

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 30 λεπτά

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ