Τίτλος Μαθήματος: Διαφορική Γεωμετρία

Ενότητα: Λυμένα Παραδείγματα

Όνομα Καθηγητή: Ανδρέας Αρβανιτογεώργος

Τμήμα: Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Κεφάλαιο 8

Λυμένα Παραδείγματα

Παράδειγμα 8.1. *Θεωρούμε την <u>κυκλοειδή καμπύλη</u> του επιπέδου με παραμέτρηση* $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = \alpha(t-1) + \alpha(-\sin t - \cos t)$ $(\alpha > 0)$.

1. *Περιγράψτε την καμπύλη γεωμετρικά.*
2. *Υπολογίστε το μήκος τόξου* $\sigma(t) = \int_0^t \|\gamma'(u)\| du$.
3. *Είναι η καμπύλη κανονική;*

<u>Λύση</u>

1. Θέτοντας $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ παίρνουμε τις εξισώσεις

$$x(t) = \alpha(t - \sin t) \;\;\Rightarrow\;\; t - \frac{x}{\alpha} = \sin t$$
$$y(t) = \alpha(1 - \cos t) \;\;\Rightarrow\;\; 1 - \frac{y}{\alpha} = \cos t.$$

Άρα $\left(t - \frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(1 - \frac{y}{\alpha}\right)^2 = 1$ και $(\alpha t - x)^2 + (\alpha - y)^2 = \alpha^2$, δηλαδή η καμπύλη παριστά κύκλο μεταβλητού κέντρου $K(\alpha t, \alpha)$ και σταθερής ακτίνας $\alpha > 0$. Η εικόνα της φαίνεται παρακάτω:

2. Είναι $\gamma'(t) = \alpha(1 - \cos t, \sin t)$ άρα

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\alpha^2(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} = \alpha\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t} = \alpha\sqrt{2}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}} = 2\alpha|\sin(\frac{t}{2})|.$$

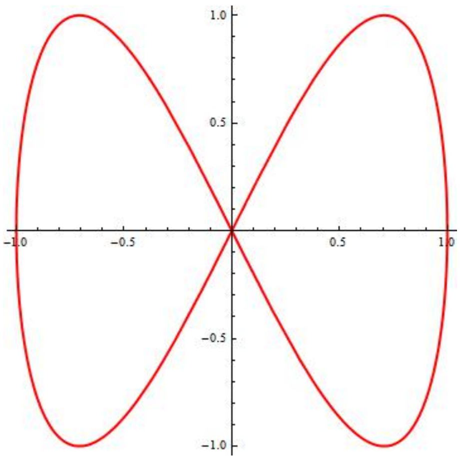
Για $0 \leq t/2 \leq \pi$ παίρνουμε $\sigma(t) = \int_0^t 2\alpha \sin\frac{u}{2} du = 4\alpha(1 - \cos\frac{t}{2})$.

3. Η καμπύλη είναι κανονική εκτός εάν $\gamma'(t) = 0$ δηλαδή $\cos t = 1$ και $\sin t = 0$, δηλαδή για $t = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Παράδειγμα 8.2. *Έστω* $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ *η καμπύλη* $\gamma(t) = (\sin t, \sin(2t))$. *Είναι η* γ *κανονική, απλή ή κλειστή;*

Λύση

Η γ είναι κανονική επειδή $\gamma'(t) = (\cos t, 2\cos(2t)) \neq (0,0)$ για κάθε t. Η καμπύλη δεν είναι απλή επειδή $\gamma(0) = \gamma(\pi) = (0,0)$ (δηλαδή η γ έχει αυτοτομές). Τέλος, η γ είναι κλειστή, διότι για $I = [0, 2\pi]$ το ίχνος της φαίνεται παρακάτω



Παράδειγμα 8.3. *Θεωρούμε την καμπύλη $\gamma(t) = (t, \cosh(t)), t > 0$. Βρείτε την ταχύτητα $\|\gamma'(t)\|$ της γ και χρησιμοποιήστε την για να κάνετε παραμέτρηση της γ κατά μήκος τόξου.*

Λύση

Είναι $\gamma'(t) = (1, \sinh(t))$ άρα $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+\sinh^2(t)} = \cosh(t)$. Έστω

$$s = \int_0^t \|\gamma'(u)\| du = \int_0^t \cosh(u) du = \sinh(t).$$

Τότε $t = \sinh^{-1}(s)$ (αντίστροφη συνάρτηση του $\sinh(s)$) και $\cosh(t) = \sqrt{1+\sinh^2(t)} = \sqrt{1+s^2}$. Συνεπώς, η αναπαραμέτρηση της γ κατά μήκος τόξου είναι η

$$\beta(s) = \gamma\big(t(s)\big) = \big(\sinh^{-1}(s), \sqrt{1+s^2}\big).$$

Παράδειγμα 8.4. *α) Υπολογίστε τις καμπυλότητες κ_1, κ_2 και τις στρέψεις τ_1, τ_2 των ελικών $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$*

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= \big(r\cos(\alpha t), r\sin(\alpha t), bt\big) \\ \gamma_2(t) &= \big(r\cos(-\alpha t), r\sin(\alpha t), bt\big) \quad (r, \alpha, b > 0). \end{aligned}$$

β) Βρείτε μια στερεά κίνηση $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $\gamma_2 = \Phi \circ \gamma_1$. Διατηρεί η Φ τον προσανατολισμό;

Λύση

α) Για τις καμπυλότητες θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο

$$\kappa(t) = \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}$$

και για τις στρέψεις

$$\tau(t) = \frac{\det\big(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)\big)}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|^2}.$$

Προτρέπουμε τον αναγνώστη να πιστοποιήσει τους παρακάτω υπολογισμούς:

$$\begin{aligned}
&\gamma_1'(t) = (-r\alpha \sin(\alpha t), r\alpha \cos(\alpha t), b) \\
&\gamma_1''(t) = (-r\alpha^2 \cos(\alpha t), -r\alpha^2 \sin(\alpha t), 0) \\
&\|\gamma_1'(t) \times \gamma_1''(t)\| = r\alpha^2\sqrt{b^2 + r^2\alpha^2}, \quad \|\gamma_1'(t)\| = \sqrt{r^2\alpha^2 + b^2}
\end{aligned}$$

Άρα $\kappa_1(t) = \frac{r\alpha^2}{r^2\alpha^2+b^2} = \frac{r(-\alpha)^2}{(-\alpha)^2r^2+b^2} = \kappa_2(t)$. Επίσης $\tau_1(t) = \frac{\alpha b}{r^2\alpha^2+b^2} = \tau_2(t)$.

β) Αν A είναι ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Ζητώ να λύσω την εξίσωση

$$\begin{pmatrix} r\cos(-\alpha t) \\ r\sin(-\alpha t) \\ bt \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} r\cos(\alpha t) \\ r\sin(\alpha t) \\ bt \end{pmatrix}$$

ως προς A. Με απλή παρατήρηση προκύπτει ότι η λύση είναι $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Άρα η $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ έχει τύπο $\Phi(x, y, z) = (x, -y, z)$. Επειδή $\det(A) = -1$, η Φ δεν διατηρεί τον πρασανατολισμό.

Παράδειγμα 8.5. *Αποδείξτε ότι η καμπύλη* $\gamma : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = (2\cos^2 t - 3, \sin t - 8, 3\sin^2 t + 4)$ *είναι κανονική. Ελέξτε κατά πόσον το ίχνος της* γ *είναι τμήμα*

- α) *μιας ευθείας του* $\mathbb{R}^3$,
- β) *ενός επιπέδου του* $\mathbb{R}^3$.

Λύση

Είναι $\gamma'(t) = (-4\cos t \sin t, \cos t, 6\sin t\cos t) \neq (0, 0, 0)$ για κάθε $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ (επειδή $\cos t \neq 0$). Άρα η γ είναι κανονική καμπύλη. Υπολογίζουμε ότι $\det\big(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)\big) = 0$ άρα $\tau(t) = 0$, συνεπώς η καμπύλη είναι επίπεδη. Τα διανύσματα $\gamma'(t)$ και $\gamma''(t)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (δείχνοντας π.χ. ότι $\gamma'(t) \times \gamma''(t) \neq \overrightarrow{0}$) άρα $\kappa(t) \neq 0$ οπότε η γ δεν είναι τμήμα ευθείας.

Παράδειγμα 8.6. *Ποίο από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$ αποτελεί μια κανονική επιφάνεια;*

α) $M_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z\}$

β) $M_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$.

Σε θετική περίπτωση βρείτε μια παραμέτρηση της επιφάνειας.

Λύση

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x, y, z) = x^2+y^2-z$. Τότε $M_1 = f^{-1}(0)$ και

$$\nabla f = (2x, 2y, -1) \neq (0, 0, 0) \text{ για κάθε } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Μια παραμέτρηση της M_1 είναι η $X(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x, y, z) = x^2+y^2-z^2$. Τότε $M_2 = f^{-1}(0)$ και

$$\nabla f = (2x, 2y, -2z)$$

το οποίο είναι μη μηδενικό διάνυσμα για κάθε $(x, y, z) \in M_2 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Άρα η M_2 είναι κανονική επιφάνεια σε κάθε σημείο, εκτός από το $(0, 0, 0)$ όπου δεν είναι κανονική. Παραπέμπουμε στη βιβλιογραφία για πλήρη απόδειξη του σημείου αυτού. Μια παραμέτρηση των δύο κανονικών τμημάτων της M_2 είναι

$$X_\pm : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^3,\ X_\pm(u, v) = \big(u, v, \pm\sqrt{u^2 + v^2}\big).$$

Παράδειγμα 8.7. *Βρείτε μια αμφιδιαφόριση $\phi : \mathbb{S}^2 \to M$ μεταξύ της σφαίρας $\mathbb{S}^2$ και του ελλειψοειδούς $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1\}$*

Λύση

Θεωρούμε την διαφορίσιμη απεικόνιση $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \phi(x, y, z) = (x, \frac{1}{\sqrt{2}}y, \frac{1}{\sqrt{3}}z)$ και τον περιορισμό στη σφαίρα $\mathbb{S}^2$

$$\tilde{\phi} = \phi|_{\mathbb{S}^2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$

Τότε $\tilde{\phi}(\mathbb{S}^2) = M$, άρα η $\tilde{\phi}$ είναι η ζητούμενη αμφιδιαφόριση (να βραθεί η αντίστροφη $\tilde{\phi}^{-1}$ και να πιστοποιηθεί ότι είναι διαφορίσιμη).

Παράδειγμα 8.8. *Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφάνειας M με τοπική παραμέτρηση $X(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$, στο σημείο $p = (1, 1, 0)$.*

Λύση

Είναι $X(1,1) = (1,1,0) = p$. Γνωρίζουμε ότι ο εφαπτόμενος χώρος T_pM στο σημείο p παράγεται από τα διανύσματα $\{X_u(1,1), X_v(1,1)\}$. Εμείς ζητάμε την καρτεσιανή εξίσωση του εφαπτόμενου χώρου, ως επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$. Είναι $X_u(u,v) = (1,0,2u), X_v(u,v) = (0,1,-2v)$ άρα

$$X_u(1,1) = (1,0,2) \text{ και } X_v(1,1) = (0,1,-2).$$

Υπάρχουν διάφοροι εναλλακτικοί τρόποι να προχωρήσουμε. Για παράδειγμα, ένα διάνυσμα κάθετο στο ζητούμενο επίπεδο είναι το $\overrightarrow{n} = X_u(1,1) \times X_v(1,1) = (-2,2,1)$. Συνεπώς, αν (x,y,x) είναι ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου αυτού, τότε η καρτεσιανή εξίσωσή του είναι

$$\langle \overrightarrow{n}, (x,y,z) \rangle = 0 \text{ ή } -2x + 2y + z = 0.$$

Παράδειγμα 8.9. *Δίνεται η επιφάνεια του Enneper M με παραμέτρηση $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^3$*

$$X(u,v) = \big(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2\big)$$

Σημειώνουμε ότι η επιφάνεια αυτή έχει αυτοτομές (κάντε γράφημα με Mathematica) και η παραπάνω παραμέτρηση αποτελεί τον μοναδικό χάρτη της. Βρείτε τα θεμελιώδη ποσά πρώτης και δεύτερης τάξης, απεικόνιση Gauss, τελεστή σχήματος και καμπυλότητα Gauss, μέση καμπυλότητα, κύριες καμπυλότητες.

Λύση

Είναι $X_u = (1 - u^2 - v^2, 2uv, 2u)$, $X_v = (2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v)$, $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = [dX][dX]^t$, άρα

$$\begin{aligned}
E(u,v) &= \langle X_u, X_u \rangle = \big(u^2 + v^2 + 1\big)^2 \\
F(u,v) &= \langle X_u, X_v \rangle = 0 \\
G(u,v) &= \langle X_v, X_v \rangle = \big(u^2 + v^2 + 1\big)^2 \quad \textbf{(ελέξτε τις πράξεις)}
\end{aligned}$$

Η μετρική ds^2 που επάγεται στην περιοχή παραμέτρησης $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ είναι

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

και συγκεκριμένα

$$\begin{aligned}
ds^2_{(u,v)}(Z,W) &= Z^t \begin{pmatrix} E(u,v) & F(u,v) \\ F(u,v) & G(u,v) \end{pmatrix} W \\
&= Z^t \begin{pmatrix} \big(u^2 + v^2 + 1\big)^2 & 0 \\ 0 & \big(u^2 + v^2 + 1\big)^2 \end{pmatrix} W
\end{aligned}$$

για κάθε $(u,v) \in U \subset \mathbb{R}^2$ και $Z, W \in \mathbb{R}^2$. Η απεικόνιση Gauss είναι $N : M \to \mathbb{S}^2$

$$N(u,v) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{X_u \times X_v}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{1}{(u^2+v^2+1)}\big(-2u, 2v, 1-u^2-v^2\big)$$

(**κάντε τις πράξεις – είναι αρκετές!**).

Για τα θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης χρησιμοποιούμε τους τύπους

$$\begin{aligned} e &= \langle N, X_{uu}\rangle = \frac{1}{u^2+v^2+1}\big(4u^2+4v^2+2-2u^2-2v^2\big) = 2 \\ f &= \langle N, X_{uv}\rangle = 0 \\ g &= \langle N, X_{vv}\rangle = 2. \end{aligned}$$

Ο τελεστής σχήματος στο τυχαίο σημείο $p = X(u,v) \in M$ είναι

$$S_p : T_pM \to T_pM,\ S_p(Z) = -dN_p(Z)$$

και έχουμε αποδείξει στο μάθημα ότι ο πίνακάς του είναι

$$\begin{aligned} [S_p] &= \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\big(u^2+v^2+1\big)^2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\big(u^2+v^2+1\big)^2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ο τελεστής σχήματος (ως γραμμική απεικόνιση) καθορίζεται πλήρως από τον παραπανω πίνακα. Οι ιδιοτιμές του τελεστή σχήματος είναι οι κύριες καμπυλότητες, άρα

$$\kappa_1 = -\kappa_2 = \frac{1}{\big(u^2+v^2+1\big)^2}.$$

Τέλος, η καμπυλότητα Gauss είναι

$$K(u,v) = \det[S_p] = \frac{-4}{\big(u^2+v^2+1\big)^4}$$

και η μέση καμπυλότητα είναι

$$H = \frac{1}{2}\mathrm{tr}[S_p] = \frac{1}{2}\big(\kappa_1+\kappa_2\big) = 0,$$

δηλαδή η επιφάνεια M είναι ελάχιστης έκτασης.

Παράδειγμα 8.10. *Έστω M μια επιφάνεια εκ περιστροφής με παραμέτρηση $X(u,v) = \big(f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)\big)$. Αποδείξτε ότι οι στροφές περί τον άξονα περιστροφής της M είναι ισομετρίες της M ή ισοδύναμα ότι διατηρούν τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης.*

Λύση

Ο γεννήτορας της επιφάνειας M είναι η καμπύλη $\gamma(u) = \big(f(u), 0, g(u)\big)$ όταν αυτή περιστρέφεται περί τον άξονα z. Έχουμε αποδείξει στο μάθημα (αλλά αποδείξτε το πάλι) ότι για την M ισχύει $E = 1, F = 0, G = f(u)^2$. Έστω R_θ μια στροφή κατά σταθερή γωνία θ περί τον άξονα z. Τότε ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

άρα $X_\theta(u,v) = (R_\theta \circ X)(u,v) = \big(f(u)\cos(v+\theta), f(u)\sin(v+\theta), g(u)\big)$, είναι η νέα παραμέτρηση της M μετά τη στροφή κατά γωνία θ. Για την παραμέτρηση αυτή προκύπτει ότι

$$E_\theta = 1, F_\theta = 0, G_\theta = f(u)^2$$

απ' όπου προκύπτει το αποτέλεσμα.

Παράδειγμα 8.11. *Έστω $X : U \to \mathbb{R}^3, X(u,v) = (u\cosh v, u\sinh v, u^2)$ όπου $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0\}$. Αποδείξτε ότι η X αποτελεί μια κανονική παραμέτρηση (του τμήματος) της επιφάνειας του υπερβολικού παραβολοειδούς*

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2\}.$$

Λύση

Έστω $X(u,v) = (x,y,z)$. Τότε $x^2 - y^2 = u^2\big(\cosh^2 v - \sinh^2 v\big) = u^2 = E$, άρα $X(u,v) \in M$ για κάθε $(u,v) \in U$. Έστω $V = X(U)$. Πρέπει να δείξουμε τα εξής:

α) X είναι $1-1$

β) X διαφορίσιμη (άρα συνεχής)

γ) η $X^{-1} : V \to U$ είναι συνεχής

δ) $X_u \times X_v \neq 0$ για κάθε $(u,v) \in U$.

Πράγματι,

α) Έστω $X(u_1,v_1) = X(u_2,v_2)$. Τότε προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} u_1\cosh v_1 &= u_2\cosh v_2 \\ u_1\sinh v_1 &= u_2\sinh v_2 \\ u_1^2 &= u_2^2. \end{aligned}$$

Η τρίτη εξίσωση δίνει $u_1 = \pm u_2$ και επειδή $u_1, u_2 > 0$ παίρνουμε $u_1 = u_2$. Λόγω του ότι η συνάρτηση sinh είναι $1-1$ προκύπτει ότι $v_1 = v_2$ άρα η X είναι $1-1$.

β) Η Q είναι διαφορίσιμη επειδή οι συνιστώσες συναρτήσεις της είναι διαφορίσιμες πραγματικές συναρτήσεις.

γ) Για να βρούμε την αντίστροφη $X^{-1}: V \to U$ πρέπει να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων

$$x = u\cosh v, y = u\sinh v, z = u^2$$

ως προς u, v. Είναι $u = \sqrt{z}, v = \tanh^{-1}\frac{y}{x}$ άρα η αντίστροφη είναι

$$X^{-1}: V \to U, \quad (x,y,z) \mapsto (u,v) = \big(\sqrt{z}, \tanh^{-1}\frac{y}{x}\big),$$

η οποία είναι συνεχής. Συνεπώς, η X είναι ομοιομορφισμός.

δ) Είναι $X_u = \big(\cosh v, \sinh v, 2u\big), X_v = \big(u\sinh v, u\sinh v, 0\big)$, άρα

$$X_u \times X_v = \big(-2u^2\cosh v, 2u^2\sinh v, u\big) \neq (0,0,0) \text{ για κάθε } (u,v) \in U.$$

Παράδειγμα 8.12. *Θεωρούμε τη κανονική επιφάνεια $M \subset \mathbb{R}^3$ με (ολική) παραμέτρηση $X: \mathbb{R}^2 \to M, X(u,v) = (u,v,u^2 - v^2)$.*

α) Υπολογίστε τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης της M ως προς την παραμέτρηση αυτή.

β) Βρείτε μια απεικόνιση Gauss της M.

γ) Βρείτε την δεύτερη θεμελιώδη μορφή και την καμπυλότητα Gauss της M.

δ) Έστω $\gamma: I \to M$ μια καμπύλη στην M με $\gamma(0) = X(0,0) \in M$. Αποδείξτε ότι η κάθετη καμπυλότητα της M στο σημείο $\gamma(0)$ στη διεύθυνση του διανύσματος $\dot\gamma(0) = aX_u + bX_v$) παίρνει πάντα τιμές στο διάστημα $[-2,2]$.

Λύση

α) Είναι $X_u = (1,0,2u), X_v = (0,1,-2u)$. Άρα

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u\rangle = 1 + 4u^2 \\ F &= \langle X_u, X_v\rangle = -4uv \\ G &= \langle X_v, X_v\rangle = 1 + 4v^2. \end{aligned}$$

β) Μια απεικόνιση Gauss είναι

$$N\big(X(u,v)\big) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}\big(-2u, 2v, 1\big)$$

γ) Υπολογίζουμε $X_{uu} = (0,0,2), X_{uv} = (0,0,0), X_{vv} = (0,0,-2)$ άρα τα θεμελιώδη ποσά δεύτερης τάξης είναι

$$\begin{aligned} e &= \langle N, X_{uu} \rangle = \frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}} \\ f &= \langle N, X_{uv} \rangle = 0 \\ g &= \langle N, X_{vv} \rangle = \frac{-2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}. \end{aligned}$$

Η δεύτερη θεμελιώδης μορφή είναι

$$\mathrm{II} = \frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}} du^2 - \frac{2}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}} dv^2$$

Τέλος, $K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} = \frac{-4}{\left(4u^2+4v^2+1\right)^2}$ (μονίμως αρνητική).

δ) Είναι $\|\dot{\gamma}(0)\|^2 = a^2 + b^2$ το οποίο πρέπει να είναι μοναδιαίο διάνυσμα, άρα $a = \cos\theta, b = \sin\theta$. Συνεπώς, η κάθετη καμπυλότητα στο σημείο $p = \gamma(0)$ στη διεύθυνση του $Z = \dot{\gamma}(0)$ είναι

$$\kappa_{\gamma(0)}\big(\dot{\gamma}(0)\big) = \mathrm{II}_p(Z,Z) = 2\frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\sqrt{1}} = 2\cos 2\theta \in [-2,2]$$

Εδω λάβαμε υπόψη από το γ) ότι

$$\mathrm{II}_{X(u,v)}(aX_u + bX_v) = ea^2 + 2fab + gb^2 = \frac{2(a^2-b^2)}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}}.$$

8.1 Βιβλιογραφία

M. Abate - F. Torena: *Curves and Surfaces*, Springer 2012.

C. Bär: *Elementary Differential Geometry*, Cambridge Univ. Press 2010.

M. P. do Carmo: *Differential Geometry of Curves and Surface*, Prentice-Hall 1976.

J. Oprea: *Differential Geometry and Its Applications*, The Mathematical Assocation of America, 2007.

Β. Ι. Παπαντωνίου: *Διαφορική Γεωμετρία*, Εκδ. Πανεπιστ. Πατρών, Πάτρα, 2013.

A. Pressley: *Elementary Differential Geometry*, Second Edition, Springer 2010. Μετάφραση: *Στοιχειώδης Διαφορική Γεωμετρία*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Κρήτη 2012.