Τίτλος Μαθήματος: Διαφορική Γεωμετρία

Ενότητα: Ο εφαπτόμενος χώρος

Όνομα Καθηγητή: Ανδρέας Αρβανιτογεώργος

Τμήμα: Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Κεφάλαιο 4

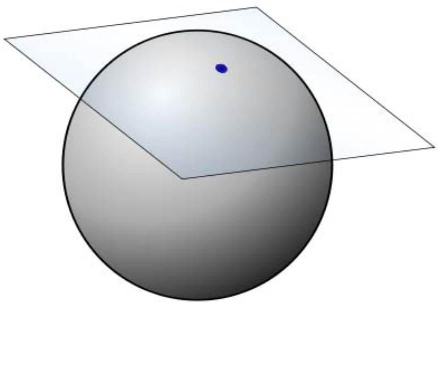
Ο εφαπτόμενος χώρος

Είδαμε ότι τα εφαπτόμενα διανύσματα έχουν ιδαίτερο ρόλο στη μελέτη των καμπυλών. Τον αντίστοιχο ρόλο για τις επιφάνειες έχει το εφαπτόμενο επίπεδο σε ένα σημείο τους. Επιπλέον, θα ορίσουμε το διαφορικό μιας λείας απεικόνισης μεταξύ επιφανειών, επεκτείνοντας έτσι το διαφορικό μιας διαφορίσιμης απεικόνισης μεταξύ Ευκλειδείων χώρων.

Ορισμός 4.1. *Έστω M κανονική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3, p \in M$. Ο εφαπτόμενος χώρος (tangent space) T_pM της M στο p είναι το σύνολο όλων των εφαπτόμενων διανυσμάτων $\gamma'(0)$ σε κάθε καμπύλη $\gamma : I \to M$ κλάσης C^1, τέτοια ώστε $\gamma'(0) = p$.*

Ισοδύναμα,

$$T_pM = \{Z \in \mathbb{R}^3 : \text{ υπάρχει καμπύλη } \gamma : I \to M \text{ κλάσης } C^1, \text{ ώστε } \gamma(0) = p, \gamma'(0) = Z\}.$$



Πρόταση 4.1. *Ο εφαπτόμενος χώρος της επιφάνειας M στο σημείο p είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος διάστασης 2.*

Παρατήρηση

Ο αναγνώστης ίσως θα αναρωτιέται, ανακαλώντας γνώση γραμμικής άλγεβρας, κατά πόσον ο εφαπτόμενος χώρος περιέχει το “μηδέν”. Στην προκειμένη περίπτωση το μηδενικό στοιχείο του εφαπτόμενου χώρου είναι το σημείο $\gamma(0) = p$. Τακτικά χρησιμοποιείται και ο όρος "εφαπτόμενο επίπεδο" που είναι πιο κοντά στην γεωμετρική μας εποπτεία. Ουσιαστικά, αυτό το οποίο προκύπτει από την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος είναι ότι

$$T_pM = \mathrm{span}\big\{X_u(\alpha,\beta), X_v(\alpha,\beta)\big\},$$

όπου $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to M \subset \mathbb{R}^3$ είναι μια τοπική παραμέτρηση της M στο σημείο p τέτοια ώστε $(\alpha,\beta) \in U$ και $X(\alpha,\beta) = p$. (Ως γνωστόν, επειδή η επιφάνεια είναι κανονική, τα διανύσματα $X_u(\alpha,\beta), X_v(\alpha,\beta)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα).

Παράδειγμα 4.1. *Να βρεθεί ο εφαπτόμενος χώρος του υπερβολικού παραβολοειδούς $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$ στο σημείο $p = (1,2,5)$.*
Μια παραμέτρηση της επιφάνειας M είναι η $X : \mathbb{R}^2 \to M,\ X(u,v) = (u, v, u^2 + v^2)$. Τότε

$$\begin{aligned} X_u(u,v) &= (1,0,2u) \\ X_v(u,v) &= (0,1,2v) \end{aligned}$$

και $X(1,2) = (1,2,5) = p$. Συνεπώς,

$$T_pM = \mathrm{span}\{X_u(1,2), X_v(1,2)\} = \mathrm{span}\{(1,0,2),(0,1,4)\}.$$

Για τους σκοπούς του μαθήματος αυτού η λύση του προβλήματος σταματάει εδώ. Παρόλα αυτά, θα θέλαμε να σημειώσουμε ότι αν ζητούσαμε να βρούμε την καρτεσιανή εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου (ως πρόβλημα αναλυτικής γεωμετρίας) τότε εργαζόμαστε ως εξής: Ένα κάθετο διάνυσμα στο εφαπτόμενο επίπεδο T_pM είναι το $(1,2,-1/2)$ (το βρίσκουμε λύνοντας το σύστημα $\langle (a,b,c),(1,0,2)\rangle = \langle (a,b,c),(0,1,4)\rangle = 0$ ως προς a,b,c), συνεπώς η εξίσωση του επιπέδου είναι $x + zy - \frac{1}{2}z = d$. Επειδή το επίπεδο διέρχεται από το σημείο $p = (1,2,5)$ παίρνουμε τελικά ότι η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου είναι

$$2x + 4y - z = 5.$$

(Δεν θα μας απασχολεί τέτοια περαιτέρω ανάλυση).

Παρατήρηση
Εάν η επιφάνεια M δίνεται ως $M = f^{-1}\big(\{q\}\big)$ όπου q μια κανονική τιμή μιας διαφορίσιμης συνάρτησης $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (δηλαδή $\big(\nabla f\big)(p) \neq 0$ για κάθε $p \in M$), τότε ισχύει

$$T_pM = \big(\nabla f(p)\big)^{\perp}.$$

Εδώ $X^\perp$ συμβολίζει το ορθογώνιο συμπλήρωμα του διανύσματος X στον χώρο $\mathbb{R}^3$, ως προς το κανονικό εσωτερικό γινόμενο.
Το επόμενο παράδειγμα θα το χειριστούμε με έναν πιο ειδικό τρόπο. Δεν θα χρησιμοποιήσουμε κάποια παραμέτρηση της σφαίρας, κάτι που ούτως ή άλλως θα μπορούσαμε να κάνουμε.

Παράδειγμα 4.2. *Να βρεθεί ο εφαπτόμενος χώρος $T_p\mathbb{S}^2$ σε ένα σημείο p της μοναδιαίας σφαίρας $\mathbb{S}^2$ του $\mathbb{R}^3$.*
Έστω $\gamma : I \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ μια καμπύλη στη σφαίρα με $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = Z$. Τότε επειδή $\gamma(I) \subset \mathbb{S}^2$ ισχύει ότι $\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = 1$, άρα με παραγώγιση προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} &\langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle + \langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle = 0 \ \text{ ή} \\ &2\langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle = 0. \end{aligned}$$

Για $t = 0$ παίρνουμε $\langle \gamma'(0), \gamma(0) \rangle = 0$ άρα $\langle Z, p \rangle = 0$. Συνεπώς, αν θέσουμε

$$A = \{Z \in \mathbb{R}^3 : \langle Z, p \rangle = 0\}$$

(το σύνολο όλων των κάθετων διανυσμάτων στην σφαίρα στο σημείο p), τότε δείξαμε ότι $T_p\mathbb{S}^2 \subset A$. Αντίστροφα, έστω $Z \neq 0$ με $\langle Z, p \rangle = 0$. Τότε η καμπύλη $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^2$ με τύπο

$$\gamma(t) = \cos(t\|Z\|)p + \frac{\sin(t\|Z\|)}{\|Z\|}Z$$

είναι μια καμπύλη στην σφαίρα $\mathbb{S}^2$ με $\gamma(0) = p, \ \gamma'(0) = Z$ (κάντε έλεγχο). Ουσιαστικά η καμπύλη αυτή είναι ένας μέγιστος κύκλος της $\mathbb{S}^2$ που διέρχεται από το p). Άρα $A \subset T_p\mathbb{S}^2$ και τελικά παίρνουμε το αναμενόμενο γεωμετρικώς αποτέλεσμα ότι

$$T_p\mathbb{S}^2 = \{Z \in \mathbb{R}^3 : \langle Z, p \rangle = 0\}.$$

Ορισμός 4.2. *Έστω M_1, M_2 κανονικές επιφάνειες, $p \in M_1$ και $\phi : M_1 \to M_2$ λεία απεικόνιση. Το διαφορικό (defferential) $d\phi_p : T_pM_1 \to T_{\phi(p)}M_2$ της ϕ στο p ορίζεται ως εξής: Έστω $Z \in T_pM_1$ και $\gamma : I \to M_1$ με $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = Z$. Τότε*

$$d\phi_p(Z) = \frac{d}{dt}\big(\phi \circ \gamma(t)\big)\Big|_{t=0} \in T_{\phi(p)}M_2.$$

Πρόταση 4.2. *Η παραπάνω απεικόνιση είναι καλά ορισμένη και γραμμική (δηλαδή η τιμή $d\phi_p(Z)$ εξαρτάται μόνο από το διάνυσμα Z και όχι από την επιλογή της καμπύλης γ).*

Το κλασικό Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης γενικεύεται στην περίπτωση των επιφανειών ως εξής:

Θεώρημα 4.1. *(**Αντίστροφης Απεικόνισης**)*
Έστω $\phi : M_1 \to M_2$ λεία απεικόνιση μεταξύ επιφανειών του $\mathbb{R}^3$ και $p \in M_1, q = \phi(p)$. Υποθέτουμε ότι το διαφορικό $d\phi_p : T_pM_1 \to T_{\phi(p)}M_2$ είναι $1-1$ και επί (δηλαδή έχει αντίστροφη). Τότε υπάρχουν ανοικτές περιοχές $U_p \ni p, V_q \ni q$ τέτοιες ώστε η απεικόνιση $\phi|_{U_p} : U_p \to V_q$ να είναι $1-1$ και επί και η αντίστροφη $\left(\phi|_{U_p}\right)^{-1} : V_q \to U_p$ να είναι λεία.

4.1 Ασκήσεις

1. Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου για κάθε μία από τις παρακάτω παραμετροποιημένες επιφάνειες στο αντίστοιχο σημείο:

(α) $X(u,v) = (u, v, u^2 - v^2), p = (1,1,0)$.

(β) $X(r,\theta) = (r\cosh\theta, r\sinh\theta, r^2), p = (1,0,1)$.

2. Έστω M_1, M_2 κανονικές επιφάνειες και $f : U \to \mathbb{R}^3$ διαφορίσιμη απεικόνιση στο ανοικτό $U \subset \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $M_1 \subset U$ και $f(M_1) \subset M_2$. Αποδείξτε ότι ο περιορισμός $f|_{M_1} : M_1 \to M_2$ είναι διαφορίσιμη.

3. (α) Έστω M κανονική επιφάνεια, $p \in M$ και $\mathrm{Id_M} : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ η ταυτοτική απεικόνιση. Αποδείξτε ότι $(d\mathrm{Id_M})_\mathrm{p} = \mathrm{Id_{T_pM}} : \mathrm{T_pM} \to \mathrm{T_pM}$, η ταυτοτική απεικόνιση του T_pM.

(β) Έστω M_1, M_2, M_3 κανονικές επιφάνειες και $f : M_1 \to M_2$, $g : M_2 \to M_3$ διαφορίσιμες απεικονίσεις. Αποδείξτε ότι η σύνθεση $g \circ f : M_1 \to M_3$ είναι διαφορίσιμη και $d(g\circ f)_p = (dg)_{f(p)} \circ df_p$, για κάθε $p \in M_1$.

(γ) Έστω $f : M_1 \to M_2$ αμφιδιαφόριση μεταξύ κανονικών επιφανειών. Αποδείξτε ότι για κάθε $p \in M_1$ η γραμμική απεικόνιση $df_p : T_pM_1 \to T_{f(p)}M_2$ είναι αντιστρέψιμη (άρα ισομορφισμός διανυσματικών χώρων).

4.2 Βιβλιογραφία

M. Abate - F. Torena: *Curves and Surfaces*, Springer 2012.

C. Bär: *Elementary Differential Geometry*, Cambridge Univ. Press 2010.

M. P. do Carmo: *Differential Geometry of Curves and Surface*, Prentice-Hall 1976.

J. Oprea: *Differential Geometry and Its Applications*, The Mathematical Assocation of America, 2007.

Β. Ι. Παπαντωνίου: *Διαφορική Γεωμετρία*, Εκδ. Πανεπιστ. Πατρών, Πάτρα, 2013.

A. Pressley: *Elementary Differential Geometry*, Second Edition, Springer 2010. Μετάφραση: *Στοιχειώδης Διαφορική Γεωμετρία*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Κρήτη 2012.