Τίτλος Μαθήματος: Διαφορική Γεωμετρία

Ενότητα: Εισαγωγή

Όνομα Καθηγητή: Ανδρέας Αρβανιτογεώργος

Τμήμα: Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Εισαγωγή

(Η ιστορία μιας επιτυχίας)

Η Ευκλείδεια γεωμετρία πέραν της αξίας της ως το πρώτο σημαντικό μαθηματικό αξιωματικό σύστημα, είχε μια σημαντική αδυναμία, η οποία ήταν να περιγράψει ικανοποιητικά καμπύλες και επιφάνειες στο επίπεδο και στον χώρο (εκτός βέβαια της περίπτωσης των ευθειών και των επιπέδων). Η μόνη εξαίρεση ήταν οι κωνικές τομές, οι οποίες αποτελούν σημαντική συνεισφορά της αρχαιοελληνικής περιόδου στην γεωμετρία. Πέραν αυτών όμως και ίσως κάποιων εξαιρέσεων ειδικών καμπυλών και ασυνήθιστων επιφανειών, δεν υπήρχε ούτε ίχνος κάποιας γενικότερης θεωρίας καμπυλών και επιφανειών. Η αιτία της αδυναμίας αυτής ήταν ότι οι αρχαίοι Έλληνες γεωμέτρες δεν είχαν αναπτύξει την κατάλληλη γλώσσα προκειμένου να περιγράψουν τις έννοιες των καμπυλών και των επιφανειών και κατ΄ επέκταση πιο περίπλοκες έννοιες, όπως αυτή της καμπυλότητας.

Οι μαθηματικοί της Αλεξανδρινής περιόδου καθώς και σημαντικοί Αιγύπτιοι και Άράβες μαθηματικοί μελέτησαν επαρκώς κατά τη διάρκεια των αιώνων που ακολούθησαν διάφορες απλές εξισώσεις, έως την σημαντική συνεισφορά των Ιταλών αλγεβριστών (Cardano κ.ά.) στις αλγεβρικές εξισώσεις τρίτου και τέταρτου βαθμού. Το σημαντικό επιστημονικό άλμα επιτυγχάνεται με τον Καρτέσιο (Descartes) στις αρχές του 1600 με την ανακάλυψη των ομωνύμων καρτεσιανών συντεταγμένων. Οι καμπύλες και οι επιφάνειες μελετώνται πλέον με πολύ πιο αποτελεσματικά εργαλεία, μια και αντιμετωπίζονται ως σύνολα (γεωμετρικοί τόποι) μηδενισμού συναρτήσεων, οι οποίες δίνονται σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Έτσι δίνεται η ευκαιρία να μελετηθούν μεγάλες οικογένειες καμπυλών και επιφανειών (λημνίσκοι, αστεροειδείς, κλπ).

Παρόλες τις προηγούμενες σημαντικές συνεισφορές, το κεντρικό μαθηματικό πρόβλημα που παρέμενε ανοικτό ήταν η εύρεση ενός ακριβούς μαθηματικού τρόπου ο οποίος να εξηγεί με ακρίβεια τη διαφορά μεταξύ καμπύλης από ευθεία και επιφάνειας από επίπεδο. Τί ακριβώς σημαίνει καμπυλότητα μιας καμπύλης ή μιας επιφάνειας και πώς μπορεί αυτή να μετρηθεί;

Οι πρώτοι σπόροι της απάντησης τέθηκαν περί το δεύτερο μισό του $17^{ου}$ αιώνα με την ανακάλυψη από τον Νεύτωνα και τον Leibnitz του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού. Ο απειροστικός λογισμός προσφέρει σημαντικά εργαλεία για την αποτελεσματική μελέτη, μέτρηση και καθορισμό της συμπεριφοράς κινούμενων αντικειμένων. Η τροχιά που ακολουθεί ένα αντικείμενο που κινείται σε ένα επίπεδο ή στον χώρο, παριστάται από μια καμπύλη. Ένα σημείο κινείται σε μια ευθεία εάν και μόνο εάν το διάνυσμα της ταχύτητάς του δεν αλλάζει διεύθυνση. Επιπλέον, όσο πιο πολύ μεταβάλλεται η διεύθυνση του εφαπτόμενου διανύσματος της ταχύτητας τόσο πιο πολύ η καμπύλη ''καμπυλώνεται'', δηλαδή διαφέρει από την ευθεία γραμμή. Ως γνωστόν, ο διαφορικός λογισμός οφείλει την ύπαρξή του στην ανάγκη να μετρηθούν μεταβολές, άρα έχουμε μπροστά μας μια σημαντική εφαρμογή, το μήκος του διανύσματος της επιτάχυνσης μια καμπύλης. Εδώ υποθέτουμε ότι το σημείο κινείται επί μιας καμπύλης της οποίας το μέτρο του διανύσματος της ταχύτητας είναι σταθερό, υπόθεση που όπως θα δούμε είναι πάντα δυνατόν να κάνουμε.

Η ανάπτυξη της διαφορικής γεωμετρίας των καμπυλών και επιφανειών κατά τον 18^o και 19^o αιώνα ήταν πλέον μεγάλη. Όλες οι σημαντικές τεχνικές του απειροστικού λογισμού χρησιμοποιούνται πλέον αποτελεσματικά από την Γαλλική σχολή γεωμετρών (Clairaut, κ.ά.) προκειμένου να αποδειχθούν τα ονομαζόμενα *θεμελιώδη θεωρήματα της τοπικής θεωρίας των καμπυλών και επιφανειών*, τα οποία αναφέρουν ότι τα καινούργια μαθηματικά εργαλεία μπορούν να καθορίσουν πλήρως όλες τις *τοπικές (local)* ιδιότητες των καμπυλών και επιφανειών.

Παρόλα αυτά, αν και η θεωρία υποστηρίζει ικανοποιητικά τη μελέτη των καμπυλών στο χώρο, παρουσιάζει διάφορα μειονεκτήματα στην *ολική (global)* μελέτη των επιφανειών. Με άλλα λόγια, αν και σε μακροκλίμακα θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι καμπύλες είναι ουσιαστικά ευθείες και τμήματα κύκλων οι οποίες έχουν συστραφεί στο χώρο, το να λέγαμε ότι μια επιφάνεια προέρχεται από μια λεία παραμόρφωση ενός επιπέδου, αν και επαρκές για υπολογισμούς σε τοπικό επίπεδο, σε καμμία περίπτωση δεν μας επιτρέπει να μελετήσουμε τις βαθύτερες ιδιότητες των επιφανειών, πέραν μιας απλής μέτρησης της καμπυλότητάς τους σε ένα σημείο.

Ο μαθηματικός ο οποίος είχε πρώτος κατανοήσει τις δισκολίες αυτές ήταν ο Carl Friedrich Gauss, ο οποίος με δύο από τα πιό σημαντικά θεωρήματα της κλασικής διαφορικής γεωμετρίας όχι μόνο συνεισέφερε στην θεωρία επιφανειών το μέγιστο δυνατό, αλλά έθεσε και τις βάσεις για την μελλοντική ερευνητική ανάπτυξη του κλάδου.

Με το πρώτο θεώρημα, το ονομαζόμενο *Θαυμαστό Θεώρημα (Theorema Egregium)* ο Gauss απέδειξε το εξής σημαντικό αποτέλεσμα: Αν και για την περίπτωση των καμπυλών, ένας παρατηρητής που βρίσκεται επάνω σε μια καμπύλη δεν μπορεί να αναγνωρίσει αν βρίσκεται σε ευθεία ή σε καμπύλη (δηλαδή θεωρεί ότι όλες οι καμπύλες είναι ίδιες), δεν συμβαίνει το ίδιο για την περίπτωση των επιφανειών. Υπάρχει ένα είδος καμπυλότητας (*καμπυλότητα Gauss*), η οποία μπορεί να μετρηθεί αποκλειστικά από έναν παρατηρητή επάμω στην επιφάνεια και η οποία ενδεχομένως διαφέρει από επιφάνεια σε επιφάνεια. Με άλλα λόγια, είναι δυνατόν να καταλάβουμε ότι η γη είναι σφαιρική χωρίς να ταξιδέψουμε στο διάστημα.

Το δεύτερο θεώρημα, γνωστό ως *Θεώρημα των Gauss-Bonnet*, επειδή συμπληρώθηκε από τον μαθητή του Gauss τον Pierre Bonnet, αναφέρει ότι η μελέτη τοπικών ιδοτήτων μιας επιφάνειας δεν επαρκεί για την κατανόηση φαινομένων που σχετίζονται με την επιφάνεια σε ολικό επίπεδο. Μια συνέπεια του θεωρήματος Gauss-Bonnet είναι ότι, όσο και να παραμορφώσουμε στον χώρο μια επιφάνεια (χωρίς να την σκίσουμε) ώστε να μεταβάλεται τοπικά η καμπυλότητα Gauss όσο επιθυμούμε, το *ολοκλήρωμα της καμπυλότητας Gauss επί ολόκληρης της επιφάνειας παραμένει σταθερό.*

Ένα άλλο σημαντικό σημείο όπου αναδεικνύεται η σύνδεση μεταξύ τοπικών και ολικών ιδιοτήτων μιας επιφάνειας, είναι στην μελέτη καμπυλών επάνω στην επιφάνεια. Ένα σημαντικό πρόβλημα της κλασικής διαφορικής γεωμετρίας (με άμεσες πρακτικές εφαρμογές) είναι η εύρεση των καμπυλών σε μια επιφάνεια οι οποίες ελαχιστοποιούν το μήκος μεταξύ δύο σημείων της (*γεωδαισιακές καμπύλες*). Σημαντικά ερωτήματα εδώ είναι, κατά πόσον οι γεωδαισιακές καμπύλες υπάρχουν, ή αν είναι δυνατόν, δύο κοντινά σημεία σε μια επιφάνεια, να συνδεθούν με μια και μοναδική γεωδαισιακή. Αν τα σημεία βρίκονται μακριά το ένα από το άλλο, τότε μπορεί να υπάρχουν άπειρες γεωδαισιακές που να τα συνδέουν ή και καμμία. Ο απειροστικός λογισμός δεν προσφέρεται ιδιαίτερα για την μελέτη τέτοιων προβλημάτων. Έτσι, φτάνουμε στον 20^o αιώνα και την ανάπτυξη της τοπολογίας (Poincaré κ.ά.) η οποία αποδεικνύεται ως το τέλειο μαθηματικό πλαίσιο για τη μελέτη ολικών ιδιοτήτων μιας επιφάνειας. Για παράδειγμα, το θεώρημα των Hopf-Rinow αποτελεί ένα τέτοιο αποτέλεσμα.

Στο σημείο αυτό αρχίζει μια άλλη ενδιαφέρουσα ιστορία (την οποία δεν θα αναπτύξουμε εδώ) με πρωταγωνιστή τον Bernhard Riemann, ο οποίος χρησιμοποίησε τις βασικές ιδές του Gauss από την θεωρία επιφανειών για να τις επεκτείνει σε n-διάστατα αντικείμενα γνωστά ως πολλαπλότητες (manifolds). Οι πολλαπλότητες αποτελούν την γλώσσα της σύγχρονης διαφορικής γεωμετρίας, με εφαρμογές και σε άλλους κλάδους των μαθηματικών όπως μαθηματική φυσική (π.χ. γενική θεωρία σχετικότητας), αρμονική ανάλυση, αλλά και άλλες επιστήμες όπως οικονομικά, θεωρία ελέγχου, κ.ά. Επιπλέον, ο Riemann απέδειξε ότι οι ονομαζόμενες μη Ευκλείδειες γεωμετρίες μπορούν να θεωρηθούν ως ιδιαίτερες γεωμετρίες σε (μη επίπεδες) επιφάνειες, οι οποίες μπορεί και να μην εμφυτεύονται σε κάποιον Ευκλείδειο χώρο.

Σκοπός των δύο Ανοικτών Μαθημάτων με τίτλους *Διαφορική Γεωμετρία* και *Διαφορική Γεωμετρία ΙΙ* είναι η παρουσίαση της παραπάνω ενδιαφέρουσας ιστορίας της κλασικής διαφορικής γεωμετρίας για προπτυχιακούς φοιτητές. Έλαβα σοβαρά υπόψη τον όρο ''Ανοικτό Μάθημα'' και όχι ''Πανεπιστημιακές σημειώσεις '', οπότε η παρουσίαση γίνεται με δύο συγκεκριμένα κριτήρια. Το *πρώτο* κριτήριο είναι ότι παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες της διαφορικής γεωμετρίας συνοδευόμενες με λειτουργικά παραδείγματα, ώστε ο φοιτητής να αντιλαμβάνεται αποτελεσματικά τα βασικά θεωρητικά σημεία και κυρίως να κατανοεί τις έννοιες. Δεν υπάρχουν ιδιαίτερα πολλές αποδείξεις, οπότε απαιτείται από τον αναγνώστη να συμβουλευτεί τη βιβλιογραφία ή ενδεχομένως και άλλες πηγές που θα εντοπίσει. Επιπλέον, είναι σαφές ότι υπάρχουν και αρκετά λεπτά σημεία της θεωρίας, τα οποία δεν έκρινα απαραίτητο να παρουσιάσω σε αυτή την φάση.

Το *δεύτερο* κριτήριο είναι ότι η παρουσίαση γίνεται με μια υποβόσκουσα ματιά στη σύγχρονη διαφορική γεωμετρία, δηλαδή τη γεωμετρία Riemann. Αυτό δεν γίνεται άμεσα αντιληπτό από τον αναγνώστη, αλλά αφού κάποιος εκτεθεί στη συνέχεια και σε μαθήματα θεωρίας πολλαπλοτήτων. Θεωρώ ότι με τον τρόπο αυτό δημιουργείται στον αναγνώστη μια προσθετική αξία, χρήσιμη για πιο προχωρημένα μαθήματα γεωμετρίας.

Στο τέλος κάθε κεφαλαίου υπάρχουν προτεινόμενες για λύση ασκήσεις και στο τέλος του κειμένου μερικά λυμένα παραδείγματα κατανόησης των βασικών τεχνικών. Θα ήθελα να ευχαριστήσω την υποψήφια διδάκτορα Μαρίνα Σταθά για τη δακτυλογράφηση του κειμένου και τη βοήθειά της στο Ανοικτό αυτό Μάθημα.

Πάτρα, Φεβρουάριος 2014 *Ανδρέας Αρβανιτογεώργος*