Τίτλος Μαθήματος : Γραμμική Άλγεβρα Ι

Ενότητα: Εισαγωγή

Όνομα Καθηγητή: Ανδρέας Αρβανιτογεώργος

Τμήμα: Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Εισαγωγή

Η Γραμμική Άλγεβρα είναι ο κλάδος των μαθηματικών ο οποίος έχει δύο κυρίως αντικείμενα μελέτης. Το πρώτο είναι οι διανυσματικοί χώροι, οι γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ τους, και οι διγραμμικές μορφές επί αυτών. Το δεύτερο αντικείμενο αφορά την ανάλυση πινάκων. Οι πίνακες είναι απλοί στην περιγραφή τους, πολύ κοντά στην διαισθητική μας εμπειρία και εμφανίζονται τακτικά στα μαθηματικά και στις εφαρμογές τους. Η πιο γνωστή ανάδειξή τους είναι μέσω των γραμμικών συστημάτων εξισώσεων. Αν και απλοί στην περιγραφή τους όμως, η βαθύτερη ανάλυση των πινάκων οδηγεί σε μη τετριμμένη μαθηματική θεωρία. Η βασική τους χρήση, όπως θα δούμε και στο μάθημα αυτό, είναι στο ότι κωδικοποιούν ερωτήματα που σχετίζονται με τις γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ διανυσματικών χώρων, των οποίων η επίλυση ανάγεται τελικά σε διαδικασίες αλγοριθμικού χαρακτήρα. Αυτό είναι το αντικείμενο μελέτης άλλων περιοχών της γραμμικής άλγεβρας, όπως ανάλυση πινάκων, υπολογιστική γραμμική άλγεβρα, κ.ά..

Ένας διανυσματικός χώρος είναι ένα σύνολο στο οποίο ορίζονται πράξεις αντίστοιχες με αυτές που γνωρίζουμε για τα συνηθισμένα διανύσματα (δηλαδή πρόσθεση διανυσμάτων και πολλαπλασιασμός διανύσματος με πραγματικό αριθμό). Θα δούμε όμως ότι υπάρχουν πολλά άλλα σύνολα, τα οποία επίσης μπορούν να αποκτήσουν δομή διανυσματικού χώρου. Τα πιο σημαντικά από αυτά είναι, το σύνολο των μιγαδικών αριθμών, ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$, το σύνολο των πολυωνύμων με συντελεστές πραγματικούς ή μιγαδικούς αριθμούς (αλλά και από οποιοδήποτε σώμα), το σύνολο των πινάκων. Άλλα σύνολα που δεν είναι άμεσα προφανές ότι έχουν δομή διανυσματικού χώρου είναι το σύνολο των λύσεων ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος, ή τα ομογενή γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων.

Προκειμένου να γίνει μελέτη της δομής ενός διανυσματικού χώρου, θα ορίσουμε κάποια σημαντικά υποσύνολά τους που ονομάζονται *βάσεις*. Εάν μια βάση έχει πεπερασμένο το πλήθος στοιχείων τότε ο αριθμός αυτός είναι ο ίδιος για όλες τις βάσεις και ονομάζεται *διάσταση* του διανυσματικού χώρου. Η διάσταση αποτελεί την μοναδική αναλλοίωτη ποσότητα ενός διανυσματικού χώρου. Οι διανυσματικοί χώροι μπορεί να είναι πεπερασμένης ή άπειρης διάστασης. Το μάθημα αυτό αφορά τους πρώτους. Ένα από τα κεντρικά αποτελέσματα της Γραμμμικής Άλγεβρας αναφέρει ότι κάθε πραγματικός διανυσματικός χώρος διάστασης n είναι ισόμορφος με τον $\mathbb{R}^n$. Συνεπώς, στην γραμμική άλγεβρα δεν μας απασχολούν ζητήματα ταξινόμησης όπως συμβαίνει για άλλες αλγεβρικές δομές, για παράδειγμα στις ομάδες ή στους δακτυλίους, όπου αυτά είναι πολύ πιό δύσκολα. Υπό αυτή την οπτική ο όρος *Άλγεβρα* δίπλα στο *Γραμμική* θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι ελαφρώς παραπλανητικός.

Η βασική μελέτη στην γραμμική άλγεβρα αφορά τις γραμμικές απεικονίσεις $T : V \to W$ μεταξύ διανυσματικών χώρων, οι οποίες όταν $V = W$ ονομάζονται γραμμικοί τελεστές. Επιλέγοντας διατεταγμένες βάσεις στους χώρους V και W προκύπτει ένας πίνακας $[T]$ που αντιστοιχεί στην T. Προβλήματα σχετικά με την απεικόνιση T μεταφέρονται σε αλγοριθμικού τύπου προβλήματα για τον πίνακα $[T]$. Συνεπώς, όσο πιο έξυπνα είναι επιλεγμένες οι διατεταγμένες βάσεις των V και W, τόσο πιό απλός είναι ο πίνακας $[T]$. Το ερώτημα λοιπόν είναι, πώς επιλέγουμε έξυπνες βάσεις σε διανυματικούς χώρους, ώστε οι γραμμικές απεικονίσεις που ορίζονται σε αυτούς να έχουν όσο πιο απλό πίνακα (π.χ. διαγώνιο ή άνω τριγωνικό).

Σκοπός του Ανοικτού αυτού Μαθήματος με τίτλο *ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι* είναι η παρουσίαση μιας εισαγωγής στην Γραμμική Άλγεβρα για προπτυχιακούς φοιτητές θετικών επιστημών. Έλαβα σοβαρά υπόψη τον όρο *Ανοικτό Μάθημα*, συνεπώς η παρουσίαση στηρίζεται σε λειτουργικά παραδείγματα, ώστε ο φοιτητής να αντιλαμβάνεται αποτελεσματικά τα βασικά θεωρητικά σημεία και κυρίως να κατανοεί τις έννοιες. Αν και υπάρχουν αποδείξεις βασικών αποτελεσμάτων, αυτές δεν είναι ιδιαίτερα πολλές και σίγουρα όχι από τις πλέον επίπονες. Ο λόγος είναι ότι ο διδακτικός στόχος είναι ο αναγνώστης να αποκτήσει ταυτόχρονα μια θεωρητική αλλά και πρακτική κατάρτηση για το θέμα, ώστε να είναι σε θέση να απαντάει σε βασικά ερωτήματα (π.χ. τί σημαίνει γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων, πώς βρίσκουμε μια βάση ενός διανυσματικού υπόχωρου, πώς μπορώ να ελέγξω αν δύο πίνακες είναι όμοιοι;). Παρόλα αυτά, η Γραμμική Άλγεβρα είναι μια πολύ καλή ευκαιρία για τον νεοεκπαιδευόμενο μαθηματικό να καλλιεργήσει την αποδεικτική διαδικασία στα μαθηματικά. Ιδιαίτερα χρήσιμο για τον σκοπό αυτό είναι και το συνοδευτικό υλικό που υπάρχει στο eclass.upatras.gr με τίτλο *Ερωτήσεις και Απαντήσεις στη Γραμμική Άλγεβρα*.

Η διάρθρωση του μαθήματος έχει ως εξής: Στο *Πρώτο Κεφάλαιο* παρουσιάζουμε την έννοια του διανυσματικού χώρου, διανυσματικού υπόχωρου, γραμμική ανεξαρτησία και εξάρτηση διανυσμάτων και τις έννοιες της βάσης και διάστασης ενός διανυσματικού χώρου. Στο *Δεύτερο Κεφάλαιο* μελετάμε τις γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ διανυσματικών χώρων, ορίζουμε τον πίνακα μιας γραμμικής επεικόνισης και αναπτύσσουμε τη σχέση μεταξύ γραμμικών απεικονίσεων και πινάκων. Το *Τρίτο Κεφάλαιο* αναφέρεται στην επίλυση γραμμικών συστημάτων, ένα από τα πιο κεντρικά θέματα της γραμμικής άλγεβρας. Για τον σκοπό αυτό χρειαζόμαστε τις στοιχειώδεις πράξεις πινάκων. Ως άμεση εφαρμογή προκύπτει ο υπολογισμός της τάξης μιας γραμμικής απεικόνισης και απάντηση στο ερώτημα πώς ελέγχουμε αν ένα σύνολο διανυσμάτων είναι γραμμικώς ανεξάρτητο ή γραμμικώς εξαρτημένο.

Στο *Τέταρτο Κεφάλαιο* παρουσιάζουμε τον ορισμό και ιδιότητες των οριζουσών. Η ορίζουσα είναι μια έννοια που είχε μελετηθεί ιδιαίτερα από τα πρώτα βήματα ανάπτυξης της Γραμμικής Άλγεβρας, αλλά στις μέρες μας είναι κάπως υποβαθμισμένη, κυρίως επειδή απαιτείται μεγάλος υπολογιστικός χρόνος. Τέλος, στο *Πέμπτο Κεφάλαιο* μελετάμε το πρόβλημα κάτω από ποιές προϋποθέσεις μπορούμε να βρούμε μια βάση ενός διανυσματικού χώρου V ώστε μια γραμμική απεικόνιση $T : V \to V$ να έχει πίνακα διαγώνιο. Οι διαγώνιοι πίνακες είναι από τους πιο απλούς πίνακες, για τους οποίους υπολογίζουμε άμεσα διάφορες αναλλοίωτες ποσότητες, όπως ορίζουσα, τάξη, κ.λ.π..

Στο τέλος κάθε κεφαλαίου υπάρχουν αρκετές προτεινόμενες ασκήσεις για λύση. Ο βαθμός δυσκολίας τους είναι μικρός έως μέτριος. Ευχαριστώ τον υποψήφιο διδάκτορα Πέτρο Σιάσο για τη δακτυλογράφηση του κειμένου στο Ανοικτό αυτό Μάθημα.

Πάτρα, Μάρτιος 2014 *Ανδρέας Αρβανιτογεώργος*