ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Ι 15-1-09

Διδάσκων: Α. Αρβανιτογεώργος

1. Δώστε παράδειγμα τοπολογικού χώρου ο οποίος να είναι Hausdorff και δεύτερος αριθμήσιμος, αλλά να μην είναι τοπολογική πολλαπλότητα (δηλ. τοπικά Ευκλείδειος). **[10]**

2. Έστω $\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{Gl}_n\mathbf{R} : AA^t = I\}$ και $\mathrm{Sym}_n\mathbf{R}$ το σύνολο όλων των $n \times n$ πραγματικών συμμετρικών πινάκων. Θεωρούμε την απεικόνιση $\phi : \mathrm{Gl}_n\mathbf{R} \to \mathrm{Sym}_n\mathbf{R}$, $A \mapsto AA^t$.
(α) Αποδείξτε ότι το σύνολο $\mathrm{Sym}_n\mathbf{R}$ είναι λεία πολλαπλότητα. Ποιά η διάστασή της;
(β) Υπολογίστε το διαφορικό της ϕ και δείξτε ότι η ϕ είναι επεμβάπτιση.
(γ) Αποδείξτε ότι το σύνολο $\mathrm{O}(n)$ είναι λεία πολλαπλότητα. Ποιά η διάστασή της;
(δ) Δείξτε ότι η $\mathrm{O}(n)$ είναι συμπαγής. **[20]**

3. Αποδείξτε ότι ένα διανυσματικό πεδίο X σε μια πολλαπλότητα M είναι λείο εάν και μόνο εάν για κάθε λεία συνάρτηση f στην M, η συνάρτηση Xf είναι λεία στην M. **[15]**

4. (α) Διατυπώστε τα θεωρήματα *Αντίστροφης Απεικόνισης* και *Σταθερής Τάξης* για πολλαπλότητες.
(β) Έστω $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f(x,y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$. Βρείτε τα υποσύνολα του πεδίου ορισμού της f στα οποία η f έχει σταθερή τάξη.
(γ) Είναι το σύνολο $f^{-1}(1,-1)$ υποπολλαπλότητα του $\mathbf{R}^2$; Ποιά η διάστασή της; **[10]**

5. Έστω G ομάδα Lie.
(α) Πότε ένα διανυσματικό πεδίο $X \in \mathcal{X}(G)$ ονομάζεται αριστερά αναλλοίωτο;
(β) Έστω $\mathfrak{g}$ το σύνολο όλων των αριστερά αναλλοίωτων διανυσματικών πεδίων της G. Αποδείξτε ότι $T_eG \cong \mathfrak{g}$.
(γ) Αποδείξτε ότι αν $X, Y \in \mathfrak{g}$, τότε $[X,Y] \in \mathfrak{g}$. **[10]**

6. Έστω $F : M \to N$ λεία απεικόνιση μεταξύ πολλαπλοτήτων. Αποδείξτε ότι το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό. **[15]**

$$\begin{array}{ccc} \Omega^0(N) & \xrightarrow{F^*} & \Omega^0(M) \\ d\big\downarrow & & \big\downarrow d \\ \Omega^1(N) & \xrightarrow{F^*} & \Omega^1(M) \end{array}$$

7. Έστω $\alpha = (2uvw - u^2v)dv \wedge dw + (uw^2 - v^2w)dw \wedge du + (2uvw - uv^2)du \wedge dv$.
(α) Δείξτε ότι η 2-μορφή α είναι κλειστή.
(β) Βρείτε μια 1-μορφή β τέτοια ώστε $d\beta = \alpha$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε όποιον τρόπο θέλετε, για παράδειγμα τον παρακάτω.

Έστω $\phi : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ με $(u,v,w) = \phi(x,y,z,t) = (tx, ty, yz)$, $0 \leq t \leq 1$ η απεικόνιση *ακτινωτής συστολής*. Τότε $\beta = \kappa(\phi^*\alpha)$, όπου $\kappa : \Omega^k(\mathbf{R}^3 \times [0,1]) \to \Omega^{k-1}(\mathbf{R}^3)$ η απεικόνιση που ορίζεται ως εξής: εάν μια k-μορφή μ του $\mathbf{R}^3 \times [0,1]$ δεν περιέχει dt, τότε $\kappa(\mu) = 0$, ενώ εάν $\mu = g(x,y,z,t)dt \wedge d\mathbf{x}$, τότε $\kappa(\mu) = (\int_0^1 g(x,y,z,t)dt)d\mathbf{x}$, όπου $\mathbf{x}$ μία από τις μεταβλητές x, y, z. **[20]**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!