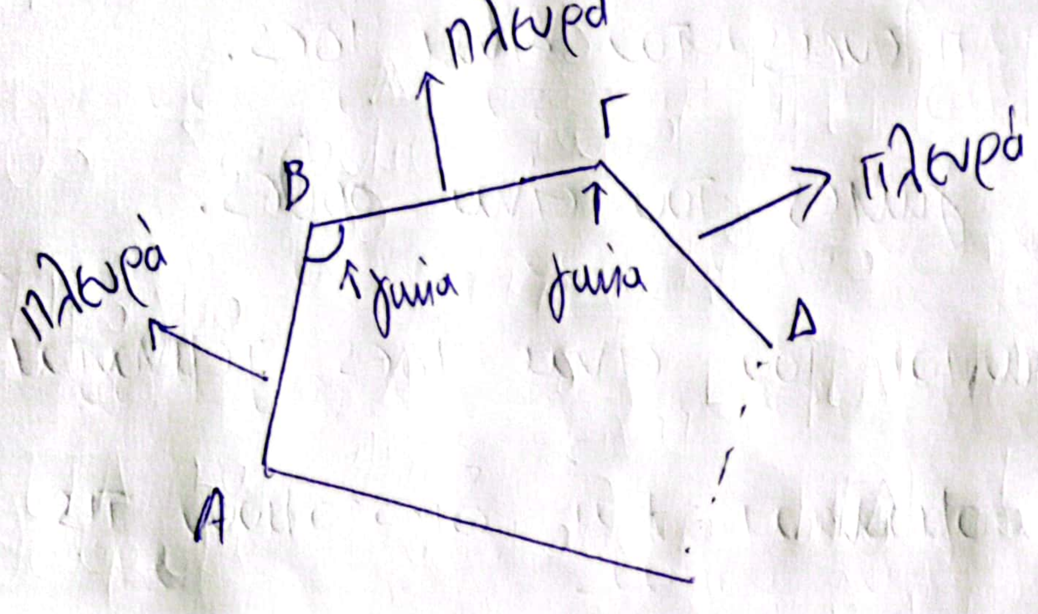
Πολύγωνα και Κανονικά Πολύγωνα

Παίρνοντας διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ... που αποτελούν μια κλειστή τεθλασμένη γραμμή ορίζουμε ένα πολύγωνο.



Ορισμός: Δύο πολύγωνα λέγονται ίσα όταν έχουν αντίστοιχες πλευρές ίσες και αντίστοιχες γωνίες επίσης ίσες.

(Ασχολούμαστε με κυρτά πολύγωνα)

• Κανονικό πολύγωνο λέγεται το πολύγωνο όπου όλες οι πλευρές του είναι ίσες μεταξύ καθώς και όλες οι γωνίες του είναι ίσες μεταξύ τους.

ΠΧ: $(\nu=3)$: ισόπλευρο τρίγωνο

$(\nu=4)$: τετράγωνο

$(\nu=5)$: κανονικό πεντάγωνο

$(\nu=6)$: κανονικό εξάγωνο

κ.ο.κ

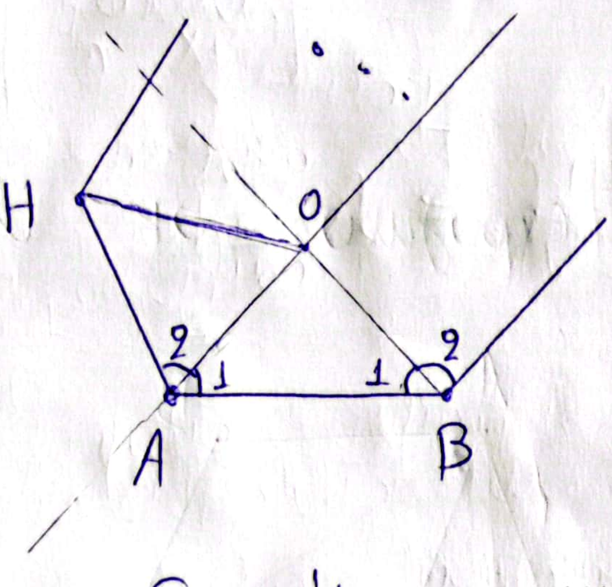
Θεώρημα: Το άθροισμα των μέτρων των γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου με ν γωνίες είναι $(\nu-2)180$ μοίρες.

Απόδειξη: Παίρνοντας μια κορυφή του πολυγώνου και συνδέοντας όλες τις μη-διαδοχικές της κορυφές με τις διαγωνίους του πολυγώνου, έχουμε παραλείψει δύο πλευρές. Αφού κάθε πλευρά μαζί με δύο διαγώνιες σχηματίζει τρίγωνο, παίρνουμε $\nu-2$ τέτοια τρίγωνα. Κάθε τέτοιο τρίγωνο έχει άθροισμα γωνιών $2L$, οπότε τα $\nu-2$ έχουν συνολικά $2(\nu-2)L$ και αυτό το άθροισμα συμπίπτει με το άθροισμα των γωνιών του πολυγώνου. ■

Πόρισμα: Σε κάθε κανονικό ν-γωνο, κάθε μία από τις γωνίες του ισούται με $\frac{2(\nu-2)}{\nu}L$.

Πρόταση: Κάθε πλευρά ΑΒ ενός κανονικού πολυγώνου, μαζί με τις διχοτόμους των προσκειμένων σε αυτήν γωνιών, σχηματίζει ισοσκελές τρίγωνο. Όλα αυτά τα ισοσκελή τρίγωνα έχουν την ίδια κορυφή Ο και είναι ίσα μεταξύ τους. Το σημείο Ο λέγεται κέντρο του κανονικού πολυγώνου.

Απόδειξη:



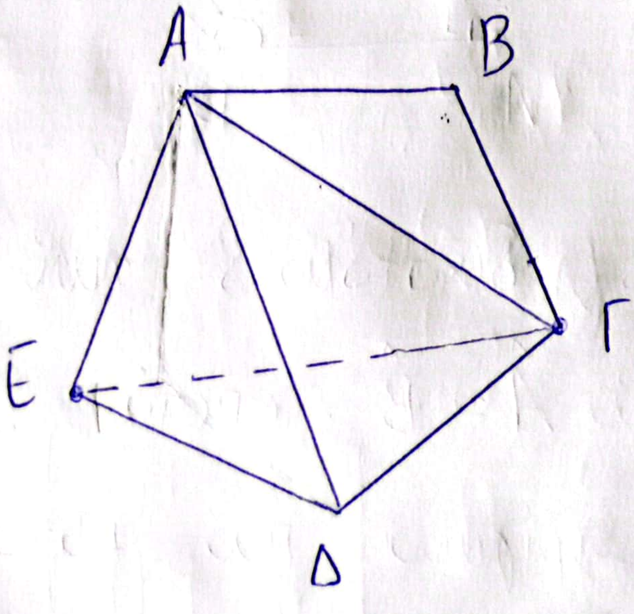
Θεωρούμε τις διχοτόμους των γωνιών $\hat{A}$, $\hat{B}$. Επειδή $\hat{A} = \hat{B}$ έπεται $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ και άρα τα τρίγωνα που κατασκευάζονται με αυτόν τον τρόπο είναι ισοσκελή.

Συγκρίνουμε δύο εξ' αυτών και από το κριτήριο Γ-Π-Γ παρατηρούμε ότι είναι ίσα. Οι κορυφές τους συμπίπτουν ορίζοντας το σημείο Ο. ∎

<u>Πρόταση</u>: Το τετράγωνο και το κανονικό πεντάγωνο έχουν όλες τις διαγωνίους τους ίσες.

<u>Απόδειξη</u>: Τετράγωνο: ΟΚ ✓

• <u>$\nu=5$</u>:



Θα δείξουμε ότι $|ΑΔ|=|ΑΓ|$

Πράγματι, συγκρίνοντας τα τρίγωνα

ΑΕΔ και ΑΒΓ βρίσκουμε: $|AE| = |AB|$,

$|E\Delta| = |B\Gamma|$ και $\hat{E} = \hat{B}$. Λόγω κριτηρίου

Π-Γ-Π έχουμε $A E\Delta \equiv AB\Gamma$ και συνεπώς

$|A\Delta| = |A\Gamma|$.

Θα δείξουμε τώρα $|E\Gamma| = |A\Gamma|$.

Πράγματι, συγκρίνουμε τα τρίγωνα

ΕΓΔ και ΑΒΓ: Είναι: $|E\Delta| = |AB|$

$|E\Delta| = |A\Gamma|$

$\hat{B} = \hat{E}$

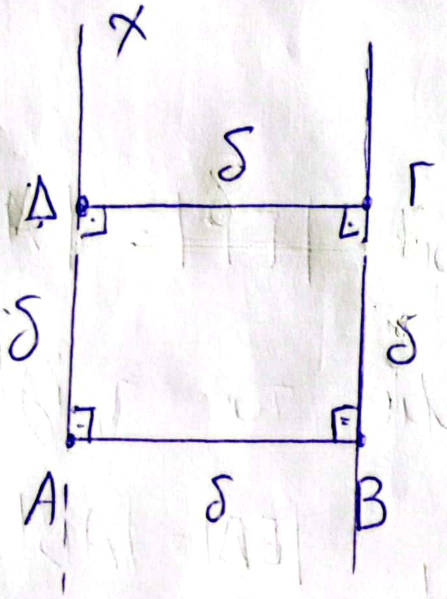
Π-Γ-Π: $E\Gamma\Delta \equiv AB\Gamma \implies |E\Gamma| = |A\Gamma| = |A\Delta|$

Ομοίως για τις υπόλοιπες.

(*) Το τετράγωνο και το κανονικό πεντάγωνο είναι τα μόνα κανονικά πολύγωνα που έχουν όλες τις διαγώνιες τους ίσες.

Άσκηση: Κατασκεύασε τετράγωνο με μήκος πλευράς $\delta > 0$.

Λύση: Έστω ευθύγραμμο τμήμα AB με $|AB| = \delta$.



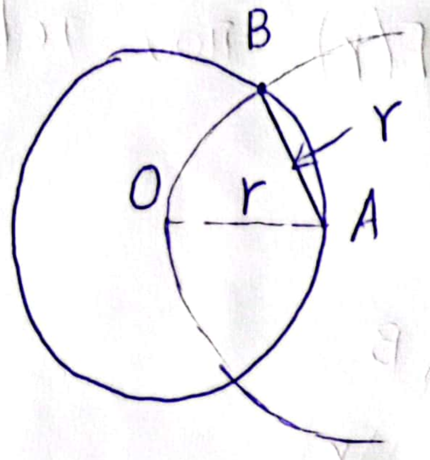
Θεωρούμε την κάθετη από το A στο AB, έστω Ax και επί της Ax σημείο Δ ώστε $|A\Delta| = \delta$. Αντίστοιχα, στην $By \perp AB$ σημείο Γ ώστε $|B\Gamma| = \delta$. Τότε $A\Delta \parallel B\Gamma$ και $(|\Gamma\Delta| = |AB| = \delta =) |A\Delta| = |B\Gamma|$.

Ώστε, $AB\Gamma\Delta$: ορθογώνιο και ρόμβος, άρα τετράγωνο.

Κατασκευή Κανονικού Εξαγώνου

Θα κατασκευάσουμε κανονικό εξάγωνο πλευράς $r > 0$. Έστω O σημείο του επιπέδου και $O(r)$ κύκλος με κέντρο O και ακτίνα $r>0$.

Βήμα $i=0$

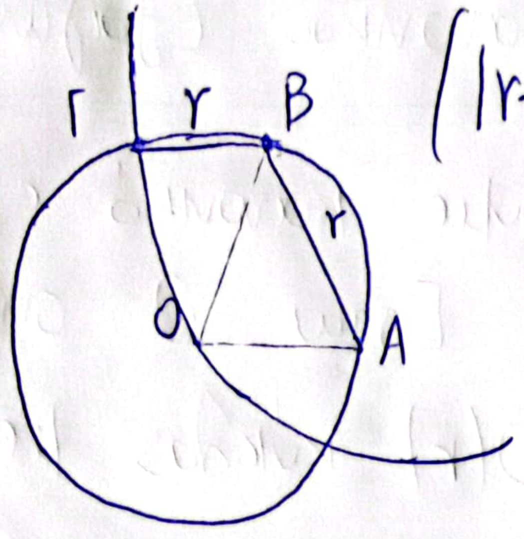


Επιλέγω A τυχόν σημείο του $O(r)$

Βήμα $i=1$: Με κέντρο A και ακτίνα r θεωρώ τον $A(r)$ που τέμνει τον $O(r)$ στο B. $\left(|r-r| = 0 < |OA| < r+r \right)$, άρα $|AB| = r$.

Βήμα $i=2$: Με κέντρο B και ακτίνα r θεωρώ τον $B(r)$ που τέμνει τον $O(r)$

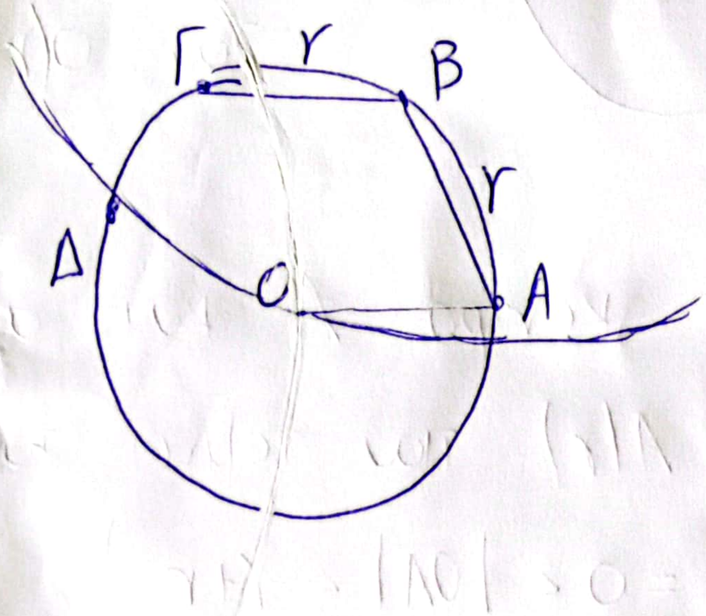
στο Γ.



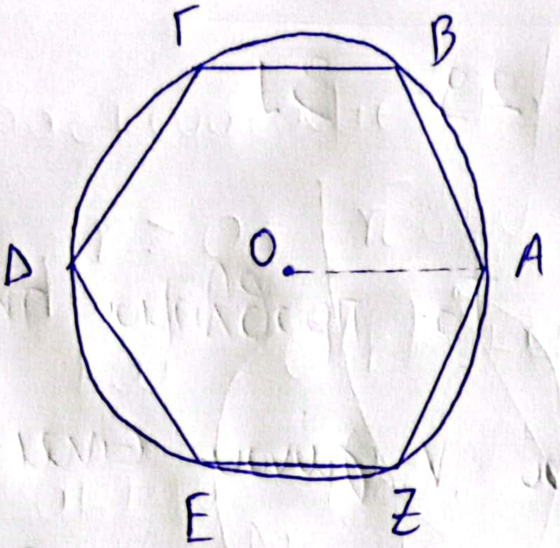
$(|r-r| < |BO| < r+r)$

$|B\Gamma| = |AB| = r$

<u>Βήμα $i=3$</u>: Με κέντρο το Γ και ακτίνα $r>0$ θεωρώ τον $\Gamma(r)$ που τέμνει τον $O(r)$ στο Δ.



.
.
.



← Κανονικό Εξάγωνο

Gauss (1777–1855) Ένα κανονικό ν-γωνο κατασκευάζεται με κανόνα και διαβήτη αν-ν: $\nu = 2^{\mu} \cdot \delta_1 \cdots \delta_k$, όπου $\delta_1 \neq \delta_2 \neq \dots \neq \delta_k$, δ_i: πρώτοι $\forall i = 1, \dots, k$ και μάλιστα της μορφής $\delta_i = 2^{\lambda_i} + 1$

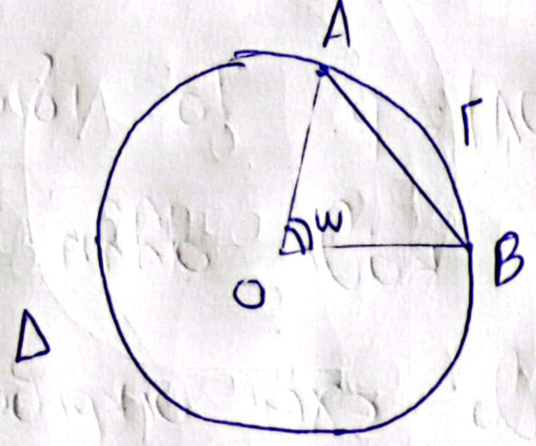
Για τους πρώτους 32 αριθμούς έχουμε:

κατασκ.	3	4	5	6	8	10	12	15	16	17
μη-κατασκ.	7	9	11	13	14	18	19	21	22	23

20	24	25	30	32
26	27	28	29	31

Σχόλιο - διδακτικό: Το πρόβλημα της κατασκευής κανονικού ν-γώνου είναι ταυτόσημο με το πρόβλημα της κατασκευής της γωνίας μέτρου $\frac{360}{\nu}$, που προκύπτει ενώνοντας το κέντρο Ο του πολυγώνου με τα άκρα Α, Β μιας πλευράς του. Επομένως, αν κατασκευάζεται το κανονικό ν-γωνο τότε κατασκευάζεται το κανονικό 2ν-γωνο διχοτομώντας την αντίστοιχη γωνία $\hat{AOB}$ του αρχικού πολυγώνου.

Τόξα - Επίκεντρες γωνίες



ω: επίκεντρη
=
ΑΟΒ

ορίζει δύο τόξα

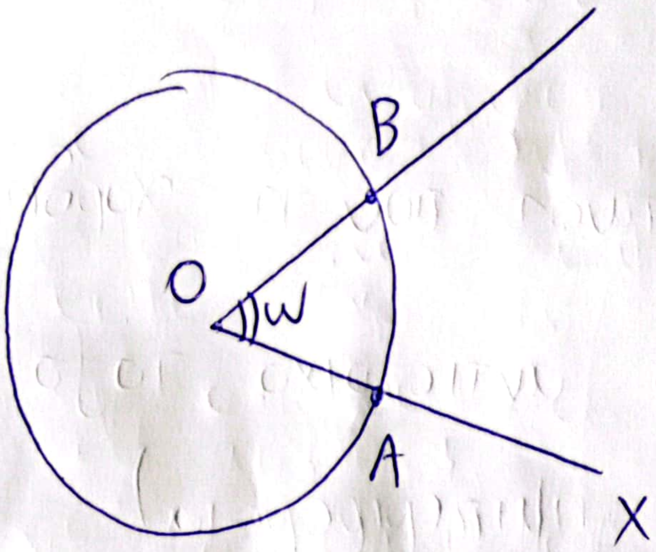
$\overset{\frown}{A\Gamma B}$ (περιέχεται στο εσωτερικό της ω)

και $\overset{\frown}{A\Delta B}$.

- Στην περίπτωση που η χορδή είναι διάμετρος, το αντίστοιχο τόξο λέγεται ημικύκλιο (ή ημιπεριφέρεια)

- Δύο τόξοι του ίδιου κύκλου τα θεωρούμε ίσα όταν οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες τους είναι ίσες.

• Έστω ημιευθεία Ox και κύκλος $O(\rho)$. Η Ox τέμνει τον κύκλο σε ένα ακριβώς σημείο A με $|OA| = \rho$. Το ίδιο θα συμβαίνει και με κάθε άλλη ημιευθεία Oy. Και αυτή θα έχει ακριβώς ένα σημείο B πάνω στον κύκλο.

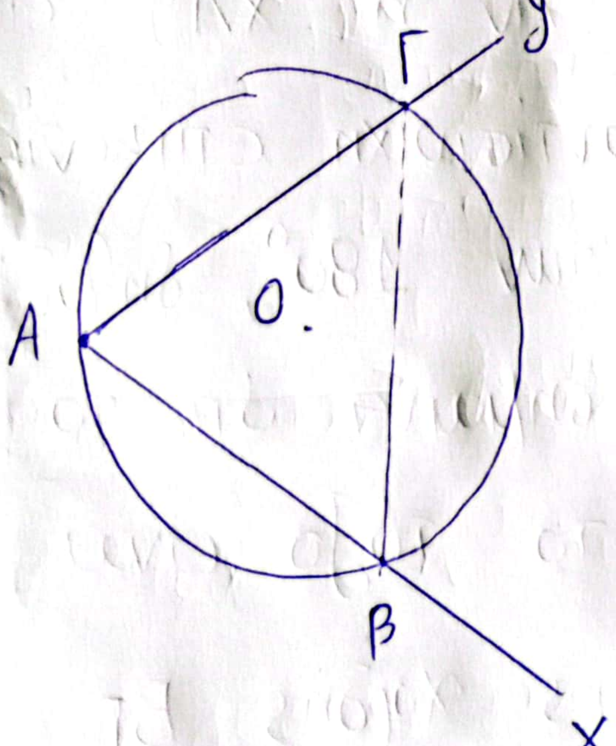


Τόξα $\longleftrightarrow$ γωνίες

H/W : ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΝ, 2.12.3 και 2.12.8

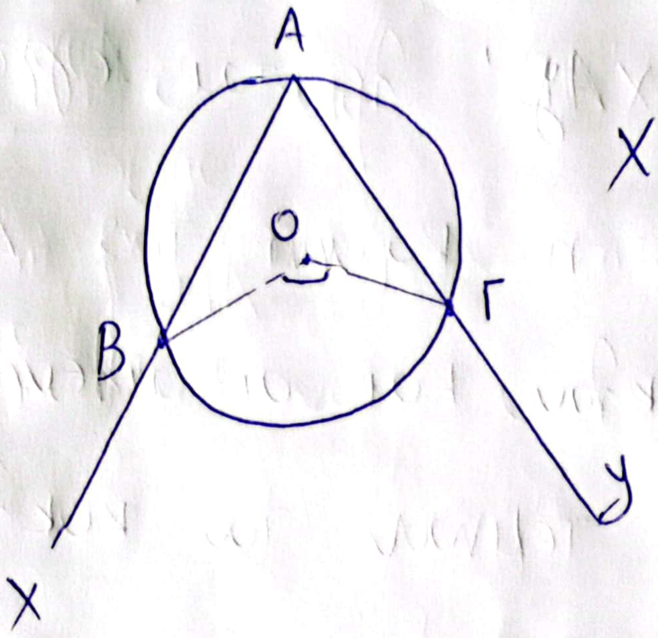
Εγγεγραμμένες Γωνίες

Μια γωνία xAy λέγεται **εγγεγραμμένη** σε κύκλο αν η κορυφή της A είναι σημείο του κύκλου και οι πλευρές της Ax και Ay τέμνουν τον κύκλο σε δύο άλλα σημεία B και Γ διαφορετικά του A.



$B\Gamma$: χορδή της εγγεγραμμένης $x\hat{A}y$.

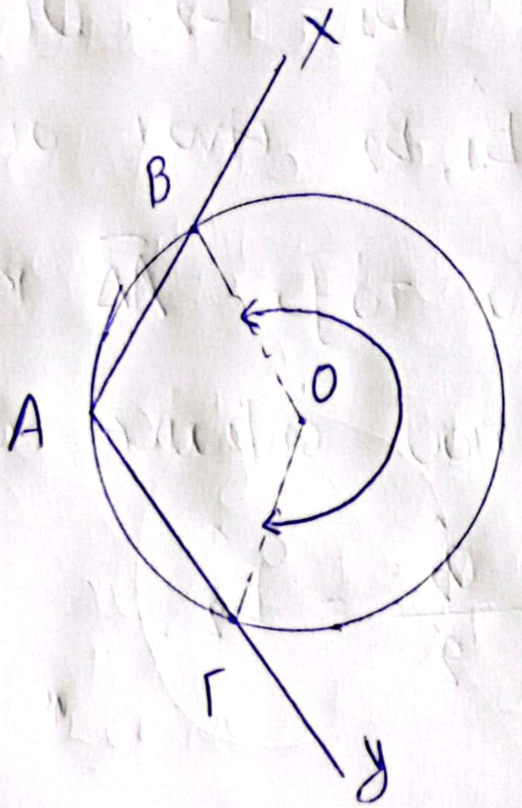
Πρόταση: Κάθε εγγεγραμμένη γωνία σε κύκλο έχει μέτρο το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο.



$$x\hat{A}y = \frac{B\hat{O}\Gamma}{2}$$

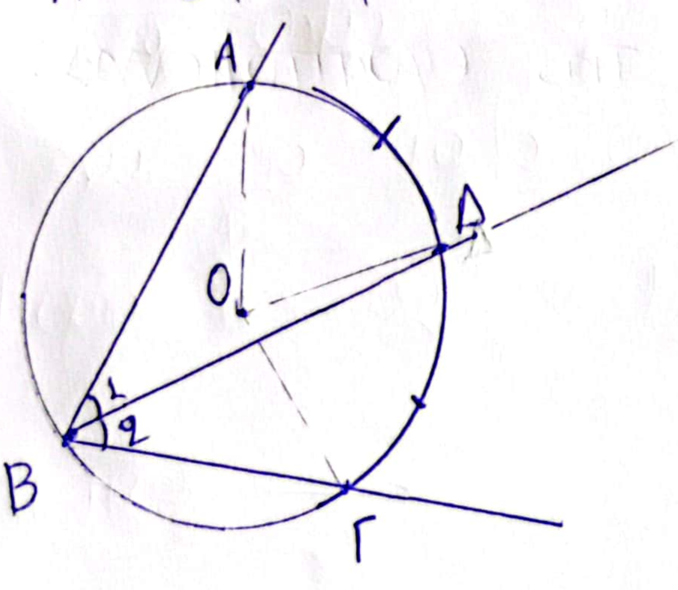
Σχόλιο - διδακτικό: Αν η $x\hat{A}y$ είναι αμβλεία τότε η αντίστοιχη επίκεντρη έχει μέτρο μεγαλύτερο των 180°, δηλαδή είναι μη-κυρτή. Αυτό σημαίνει ότι το κέντρο του κύκλου και το τόξο είναι από την ίδια μεριά της χορδής ΒΓ

βλέπε ⟶



<u>Άσκηση</u>: Αν $A\hat{B}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη σε κύκλο γωνία βαίνουσα επί τόξου $\overset{\frown}{A\Delta\Gamma}$, τότε η ΒΔ, όπου Δ: μέσον του τόξου $\overset{\frown}{A\Delta\Gamma}$ είναι η διχοτόμος της $A\hat{B}\Gamma$.

<u>Λύση</u>:



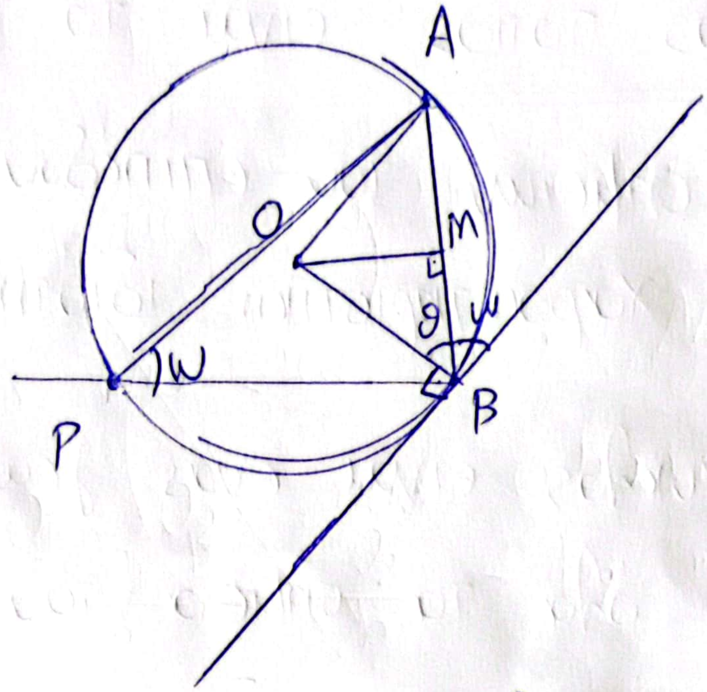
Θα δείξουμε ότι $\hat{B_1} = \hat{B_2}$. Οι αντίστοιχες επίκεντρες των $\hat{B_1}, \hat{B_2}$ είναι οι $\hat{O_1}, \hat{O_2}$ βαίνουσες στα ίσα τόξα $\overset{\frown}{ΑΔ}$ και $\overset{\frown}{ΔΓ}$, οπότε $\hat{O_1} = \hat{O_2}$ που σημαίνει ότι:

$$\hat{B_1} = \frac{\hat{O_1}}{2} = \frac{\hat{O_2}}{2} = \hat{B_2}.$$

<u>Πρόταση</u> (Γωνία Χορδής και Εφαπτομένης)

Η γωνία ω που σχηματίζεται από χορδή ΑΒ του κύκλου και εφαπτόμενη στο άκρο της Β είναι ίση με την εγγεγραμμένη που βλέπει το τόξο μεταξύ της χορδής αυτής και της εφαπτομένης.

Απόδειξη :



Η γωνία ω έχει τις πλευρές της κάθετες στις πλευρές της γωνίας $B\hat{O}M$, όπου M το μέσο της χορδής AB. Και οι δύο αυτές γωνίες είναι συμπληρωματικές της γωνίας θ που σχηματίζει η χορδή με την OB, άρα ίσες. Άρα:

$$\omega = B\hat{O}M = \frac{B\hat{O}A}{2} = B\hat{P}A.$$

∎

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

Γεωμετρικός τόπος είναι το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που έχουν μια κοινή χαρακτηριστική ιδιότητα.

πχ1: Ο κύκλος είναι ένας γεωμετρικός τόπος αφού όλα τα σημεία του και μόνον αυτά έχουν την ιδιότητα να απέχουν μία ορισμένη απόσταση από ένα σταθερό σημείο.

πχ 2: Η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι γεωμετρικός τόπος αφού όλα τα σημεία της και μόνον αυτά έχουν την ιδιότητα να ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος.

Πχ 3: Η διχοτόμος μιας γωνίας είναι γεωμετρικός τόπος, αφού όλα τα σημεία της και μόνον αυτά, έχουν την ιδιότητα να ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας. και να βρίσκονται στο εσωτερικό της γωνίας.

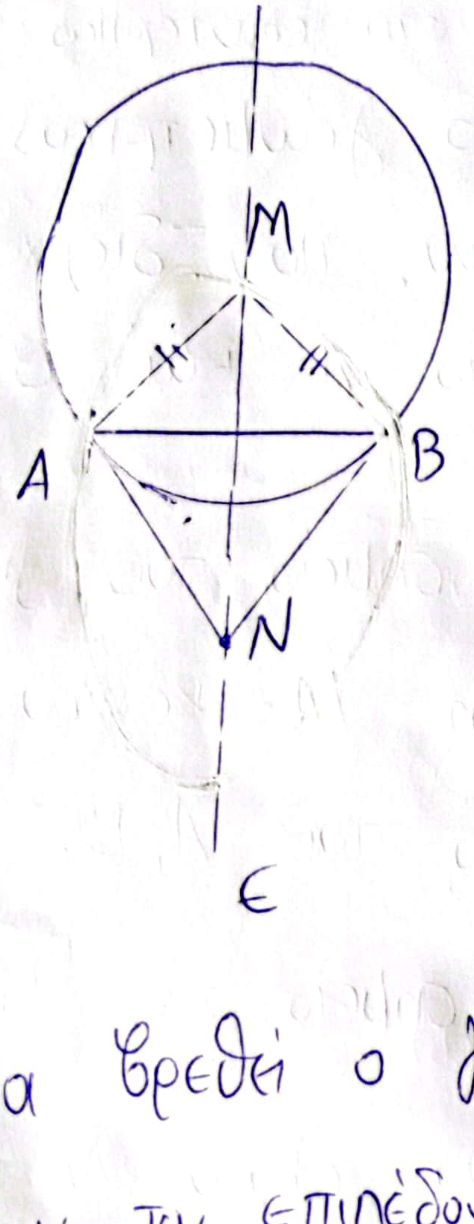
Πχ 4: Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων, που διέρχονται από δύο σταθερά σημεία A και B.

Λύση: Έστω M σημείο του ζητούμενου γεωμ. τόπου, δηλαδή M: κέντρο κύκλου που διέρχεται από τα A, B. Τότε

$|MA| = |MB| \Rightarrow$ M: σημείο της μεσοκαθέτου του AB. Αντίστροφα, έστω N: σημείο της μεσοκαθέτου του AB. Τότε $|NA| = |NB|$.

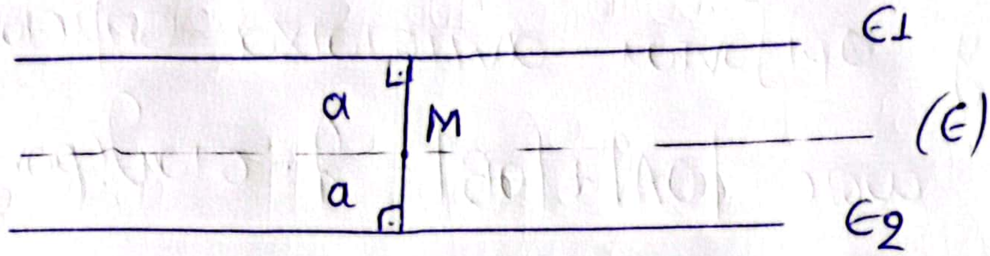
Άρα, ο κύκλος με κέντρο N και ακτίνα $\rho = |NA| = |NB|$ διέρχεται των σημείων Α και Β. Συνεπώς το Ν είναι σημείο του γεωμ. τόπου.

Τελική απάντηση: Η μεσοκάθετος του ΑΒ



ΠΧ 5: Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2.

▶ Έστω σημείο M του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου.



Έστω ε η παράλληλη από το M προς την ε_2, οπότε ε παράλληλη προς την ε_1. Άρα το M ανήκει στην ευθεία ε που είναι παράλληλη προς τις ε_1 και ε_2 και ισαπέχει από αυτές. Αντίστροφα, κάθε σημείο της ε ισαπέχει από τις ε_1 και ε_2.

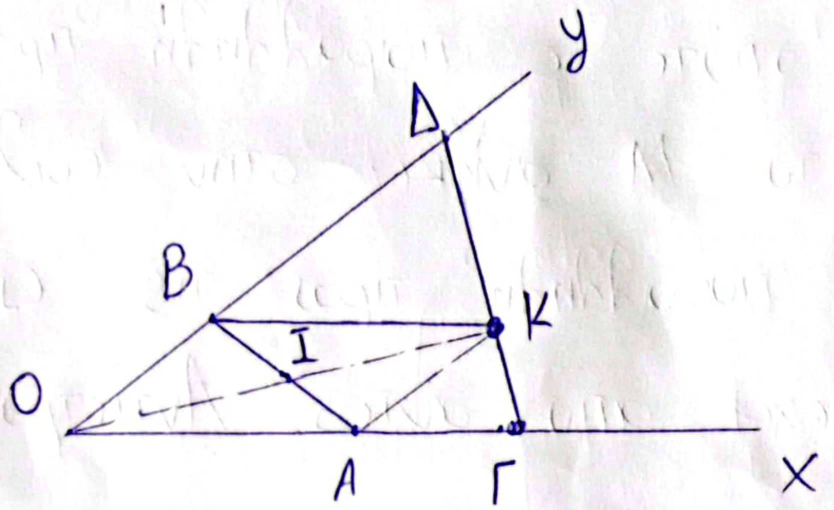
<u>Απάντηση</u>: γεωμετρικός τόπος = ε

↑

μεσοπαράλληλος των ε_1, ε_2.

Πχ 6: Στις πλευρές Ox και Oy γωνίας $x\hat{O}y$ ορίζονται αντίστοιχα σημεία A και B έτσι ώστε $|OA|+|OB|=\lambda$: σταθερό. Να βρεθεί ο γεωμ. τόπος του μέσου του AB.

Λύση:



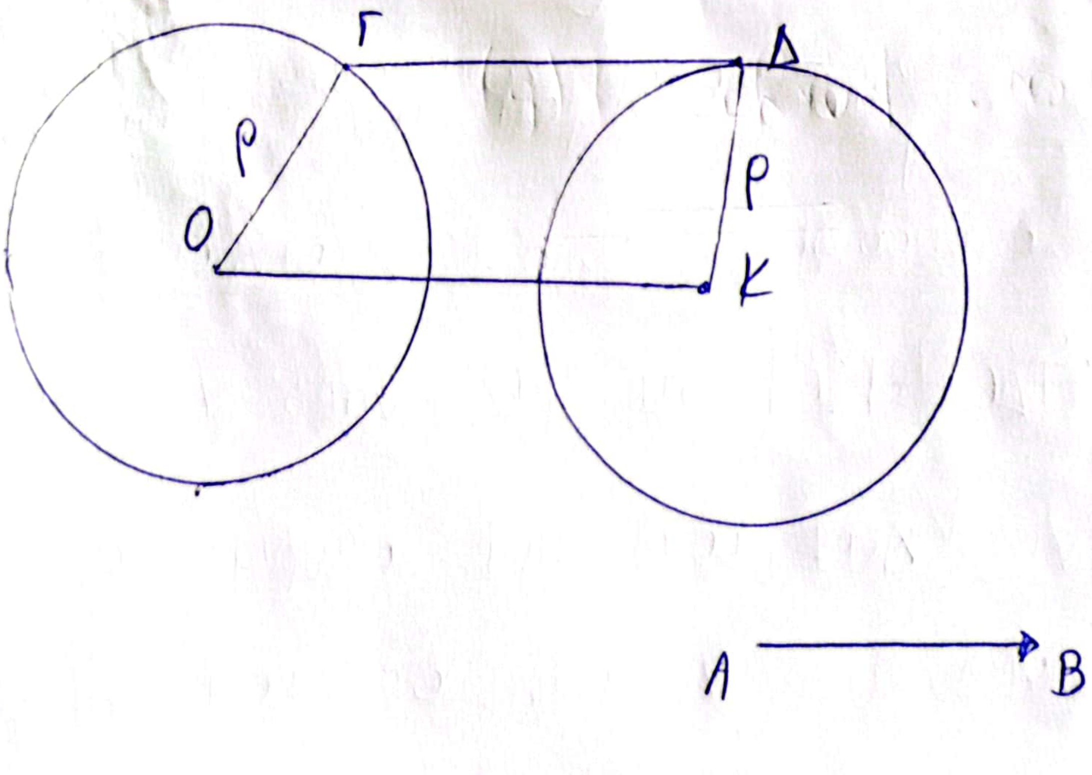
Έστω I το μέσον του AB και σημείο K εσωτερικό της $x\hat{O}y$ με $|OI|=|IK|$. Τότε, $BKAO$ είναι παρ/μο διότι οι διαγώνιοι του διχοτομούνται. Έστω σημεία Γ στην Ox και Δ στην Oy με $|O\Gamma|=|O\Delta|=\lambda$

Τότε τα τρίγωνα ΓAK και $KB\Delta$ είναι ισοσκελή και τα Γ, K, Δ συνευθειακά.

Άρα, το Ι ανήκει στην ευθεία ΕΖ που ενώνει τα μέσα Ε, Ζ των πλευρών του ισοσκελούς τριγώνου ΓΟΔ. (κάνε το αντίστροφο)

πχ 7 : Παράλληλη μεταφορά κύκλου

Δοθέντος κύκλου Ο(ρ) και ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, από κάθε σημείο Γ του Ο(ρ) φέρνουμε παράλληλο, ίσο και ομόρροπο προς το ΑΒ, ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ. Να βρεθεί ο γεωμ. τόπος των σημείων Δ.



Λύση: Έστω Δ σημείο του ζητούμενου γεωμ. τόπου. Τότε $\Gamma\Delta \uparrow\uparrow AB$ και $|\Gamma\Delta| = |AB|$. Θεωρώ Κ σημείο με $OK \uparrow\uparrow AB$ και $|OK| = |AB|$. Τότε το ΓΔΚΟ είναι παρ/μο και άρα $|\Delta K| = |O\Gamma| = \rho$, δηλαδή Δ: σημείο του κύκλου $K(\rho)$. Αντίστροφα, αν Δ: σημείο του $K(\rho)$ βρίσκουμε σημείο Γ του $O(\rho)$ με $\Gamma\Delta \uparrow\uparrow AB$ και $|\Gamma\Delta| = |AB|$, άρα το Δ είναι σημείο του ζητούμενου τόπου.

Απάντηση: Κύκλος $K(\rho)$