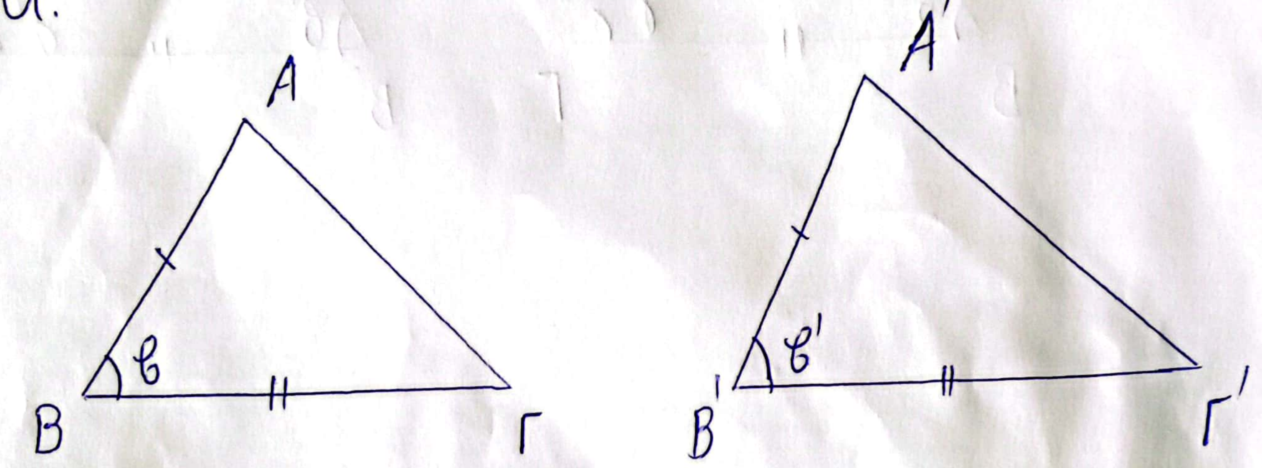
Κριτήρια Ισότητας Τριγώνων

Π-Γ-Π: Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.



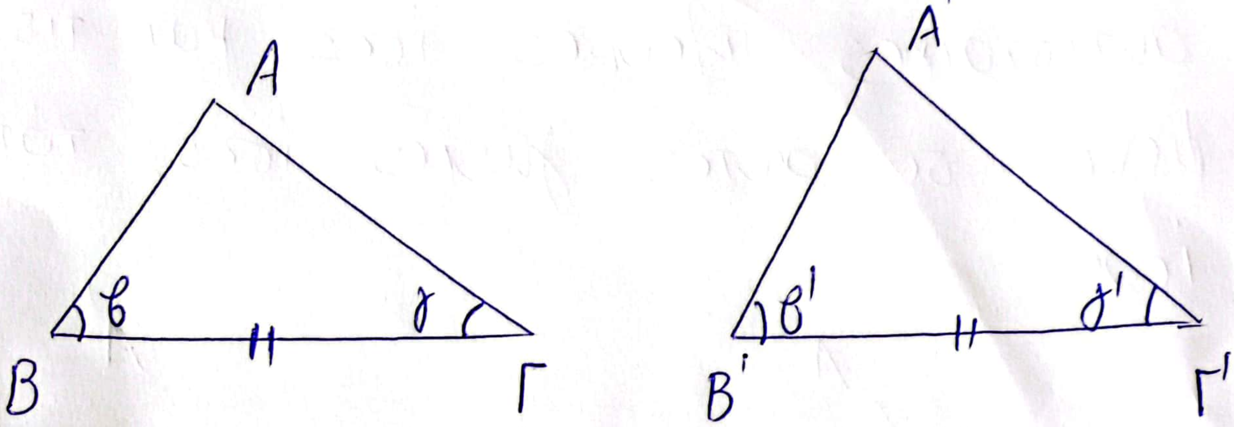
Απόδειξη: Λόγω της υπόθεσης $\hat{B} = \hat{B}'$ μπορούμε να "τοποθετήσουμε" την $\hat{B}'$ στη $\hat{B}$ ώστε να συμπέσουν οι AB με A'B' και οι BΓ, B'Γ'.

Επειδή $|AB| = |A'B'|$, θα συμπέσουν τα σημεία B και B' και για τον ίδιο λόγο $|B\Gamma| = |B'\Gamma'|$, θα συμπέσουν τα σημεία

Γ και Γ', οπότε $|ΒΓ| = |Β'Γ'|$.

Επομένως, τα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι ίσα. ■

Γ-Π-Γ:



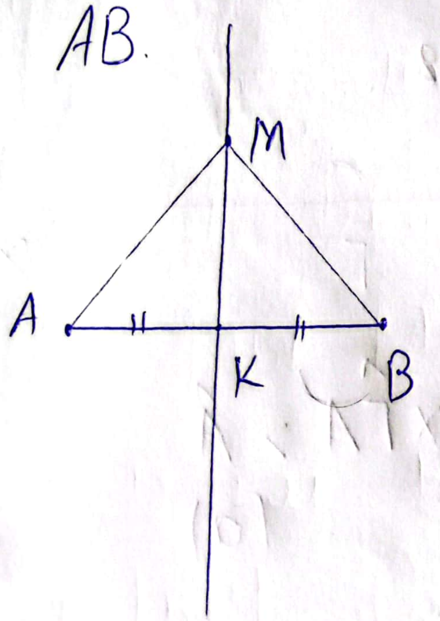
Πρόταση (Η μεσοκάθετος σαν γεωμετρικός τόπος - διδασκαλία)

Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του. Αντίστροφα, αν ένα σημείο ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος, τότε ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος αυτού.

Απόδειξη

Έστω τυχόν ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

Ορθό: Έστω Μ σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΒ.



Το ζητούμενο ($|ΜΑ|=|ΜΒ|$) προκύπτει από την ισότητα των τριγώνων ΑΚΜ και ΒΚΜ (λόγω Π-Γ-Π).

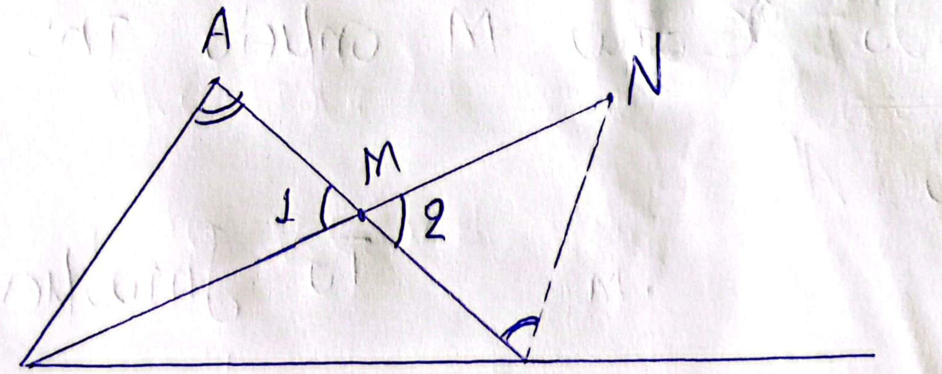
Αντίστροφο: Έστω σημείο M του επιπέδου ώστε $|MA| = |MB|$, και έστω (ε) η μεσοκάθετος του AB. Θα δείξουμε ότι $M \in (\varepsilon)$ (H/W)

H/W: Ασκήσεις 1.9.1 - 1.9.4: ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΝ

▶ Σχετικά μεγέθη γωνιών τριγώνου

Πρόταση: Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ, η παραπληρωματική κάθε γωνίας είναι μεγαλύτερη καθεμίας των δύο άλλων γωνιών.

Απόδειξη:



Θα αποδείξουμε ότι $x\hat{\Gamma}A > \hat{A}$

(α)

Έστω M το μέσο της $ΑΓ$ και N: σημείο επί της ημιευθείας BM ώστε $|BM| = |MN|$.

Τα τρίγωνα $ΑΒΜ$ και $ΓΜΝ$ είναι ίσα διότι: $|AM| = |MΓ|$, $|BM| = |MN|$ και $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ ως κατακορυφήν. Έπεται ότι $α = M\hat{Γ}N < x\hat{Γ}A$ διότι N: εσωτερικό σημείο της $x\hat{Γ}A$. Όμοια, $β < x\hat{Γ}A$ ∎

Βάσει της πρότασης αυτής προκύπτουν τα ακόλουθα.

(I) Σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα δύο γωνιών του είναι μικρότερο των δύο ορθών.

(II) Ένα τρίγωνο έχει το πολύ μια αμβλεία γωνία

(III) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι δύο ίσες γωνίες του είναι οξείες.

(IV) Κάθε ορθογώνιο τρίγωνο έχει τις άλλες δύο γωνίες του οξείες.

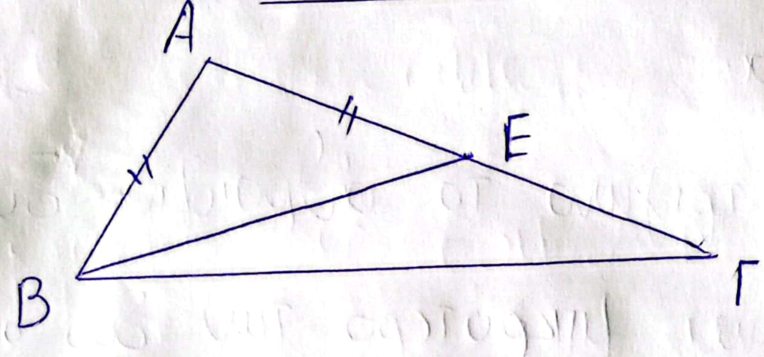
<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ

(i) απέναντι από μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται μεγαλύτερη γωνία

(ii) απέναντι από μεγαλύτερη γωνία βρίσκεται μεγαλύτερη πλευρά.

<u>Απόδειξη</u>

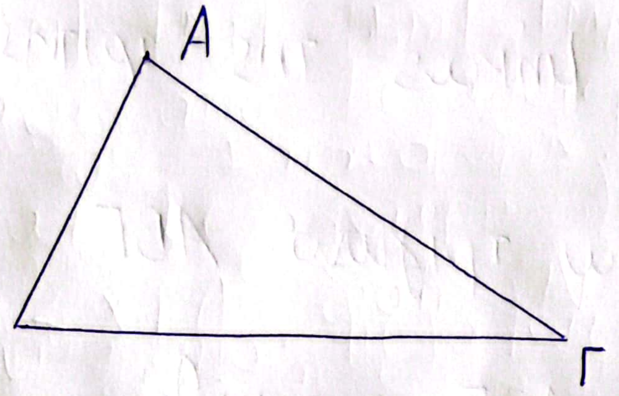
(i)



Έστω $|ΑΓ| > |ΑΒ|$ και θα δείξουμε $β > γ$. Υπάρχει Ε μεταξύ των Α και Γ ώστε $|ΑΒ| = |ΑΕ|$. Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές και συνεπώς

$\hat{ABE} = \hat{AEB} > \hat{A\Gamma B} = \gamma$. Επιπλέον, E: εσωτερικό σημείο της γωνίας β, οπότε $\beta > \hat{ABE} > \gamma$, όπως θέλαμε

(ii)



Έστω $\hat{A} > \hat{B}$ $(\alpha > \beta)$ και δδο $|B\Gamma| > |A\Gamma|$.

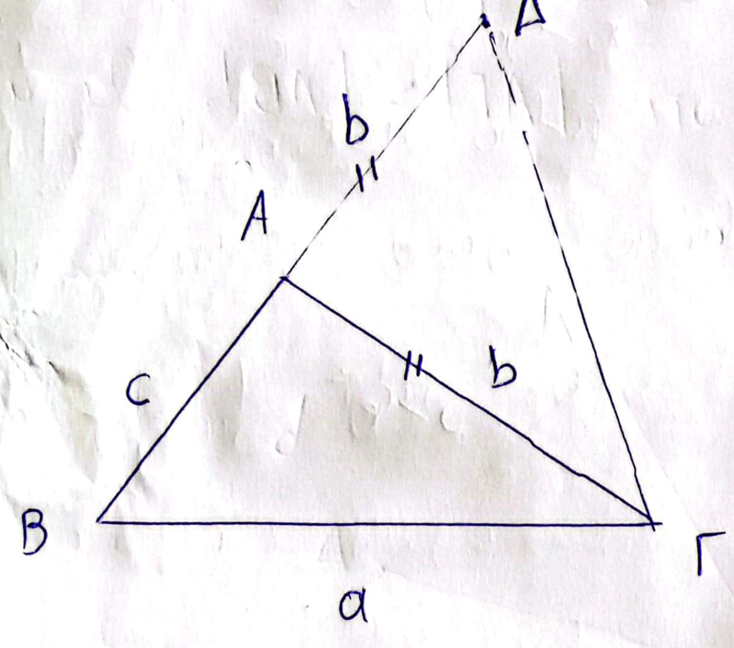
- Αν $|B\Gamma| = |A\Gamma|$ τότε $AB\Gamma$: ισοσκελές με βάση AB, οπότε $\alpha = \beta$, άτοπο
- Αν $|B\Gamma| < |A\Gamma|$ τότε λόγω (i) $\alpha < \beta$, άτοπο.

Συνεπώς, $|B\Gamma| > |A\Gamma|$. ∎

Τριγωνική Ανισότητα

Σε κάθε τρίγωνο, το άθροισμα των μηκών δύο πλευρών του είναι μεγαλύτερο του μήκους της τρίτης πλευράς.

Απόδειξη: Έστω ότι η $a = |ΒΓ|$ είναι η μεγαλύτερη από όλες τις πλευρές. Θα δείξουμε ότι $a < b + c$.



Προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήμα ΑΔ ίσο με ΑΓ. Στο τρίγωνο ΒΔΓ ισχύει

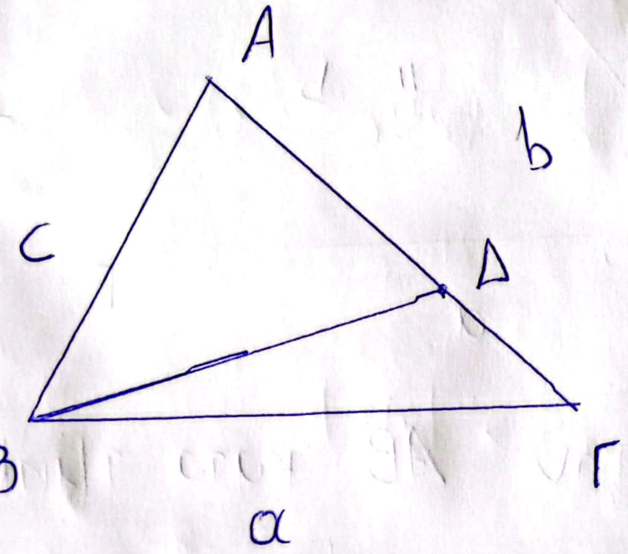
$$B\hat{Γ}Δ > A\hat{Γ}Δ = Γ\hat{Δ}B$$

ΓΑΔ: ισοσκελές με βάση ΔΓ

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, $b+c > a$, όπως θέλαμε. ∎

<u>Πρόταση</u>: Σε κάθε τρίγωνο, η διαφορά των μηκών των δύο πλευρών του είναι μικρότερη του μήκους της τρίτης πλευράς.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ας υποθέσουμε ότι $|ΑΓ| > |ΑΒ|$. Θα αποδείξουμε ότι $a > b-c$



Έστω Δ σημείο της ΑΓ με $|ΑΔ| = |ΑΒ|$.

Τότε, ΑΔΒ ισοσκελές και $\hat{ΑΒΔ} = \hat{ΑΔΒ}$.

Στο τρίγωνο ΔΒΓ η γωνία $B\hat{\Delta}\Gamma$ είναι αμβλεία ως εξωτερική της οξείας γωνίας $B\hat{\Delta}A$ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΔ.

Ώστε, $B\hat{\Delta}\Gamma > \Delta\hat{B}\Gamma \Rightarrow a > |\Delta\Gamma| = b - c$. ■

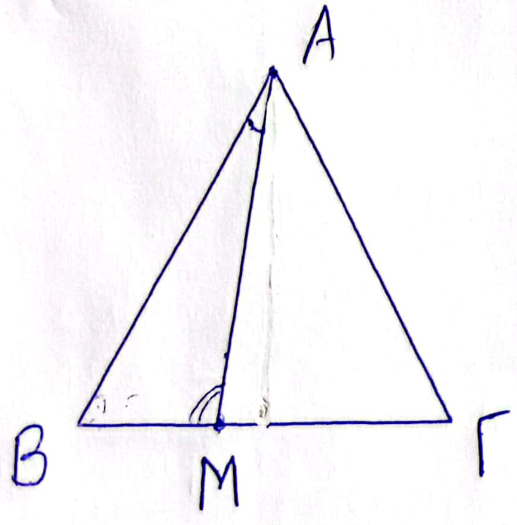
Συνολικά

Σε κάθε τρίγωνο ισχύουν:

$|a-b| < c < a+b$, $|b-c| < a < b+c$, $|a-c| < b < a+c$.

Άσκηση: Αν Μ είναι σημείο της βάσης ΒΓ ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, να αποδειχθεί ότι $|AM| < |AB|$.

Λύση:



Έστω, προς άτοπο, $|AM| \geq |AB|$. Τότε $\beta \geq \hat{M}_1$, άρα $\gamma \geq \hat{M}_1$. Όμως, στο τρίγωνο $MA\Gamma$ η $\hat{M}_1$ είναι εξωτερική της $A\hat{M}\Gamma$, οπότε $\hat{M}_1 > \gamma$, άτοπο.

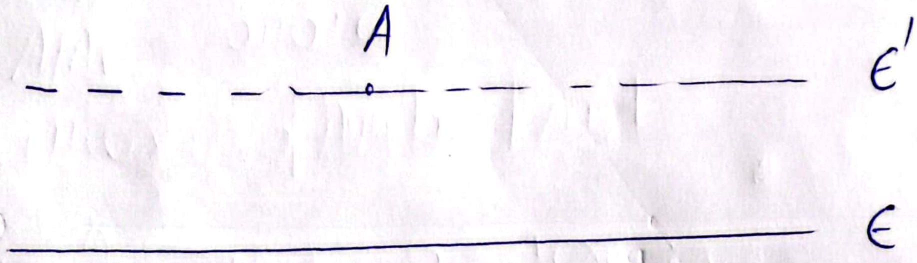
Συνεπώς, $|AM| < |AB|$

<u>Πόρισμα</u>: Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο οι κάθετες πλευρές του είναι γνήσια μικρότερες της υποτείνουσας.

<u>H/W</u>: <u>1.11.1 - 1.11.2</u> - Γεωμετρικόν

Παράλληλες Ευθείες

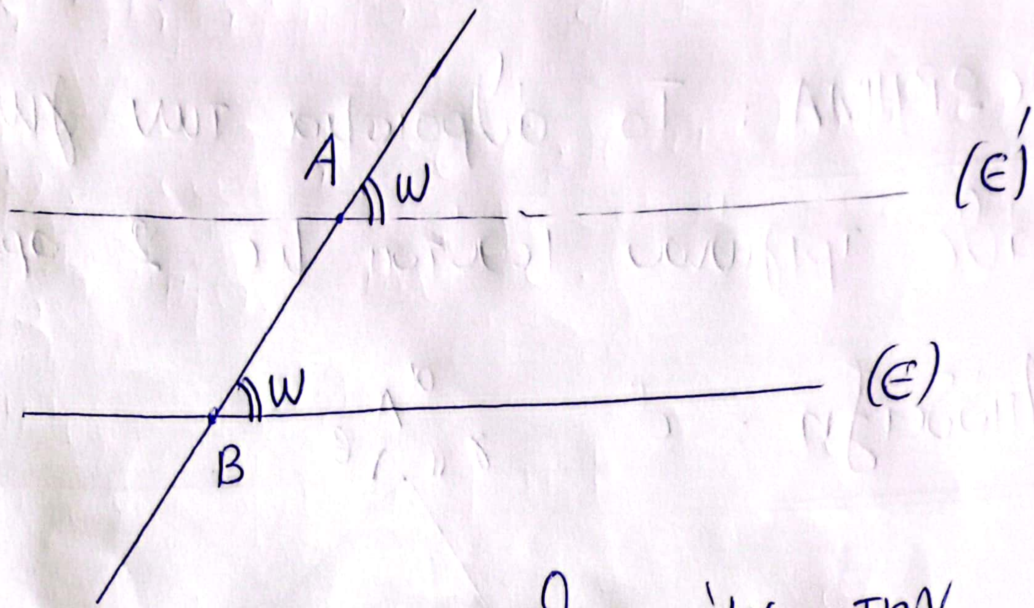
Αξίωμα Παραλληλίας: Από σημείο Α εκτός μιας ευθείας ε άγεται μοναδική παράλληλος προς την ε.



Πόρισμα: Αν μια ευθεία ε τέμνει την ευθεία δ τότε και κάθε άλλη ευθεία (η), παράλληλη στην ε, τέμνει την δ.

Απόδειξη: Αν η (η) δεν έτεμνε την δ, τότε από το σημείο τομής Α των ε και δ θα είχαμε δύο διαφορετικές παραλλήλους προς την (η), άτοπο από το Αξίωμα Παραλληλίας.

Κατασκευή: Έστω ευθεία (ε) και σημείο Α εκτός αυτής.

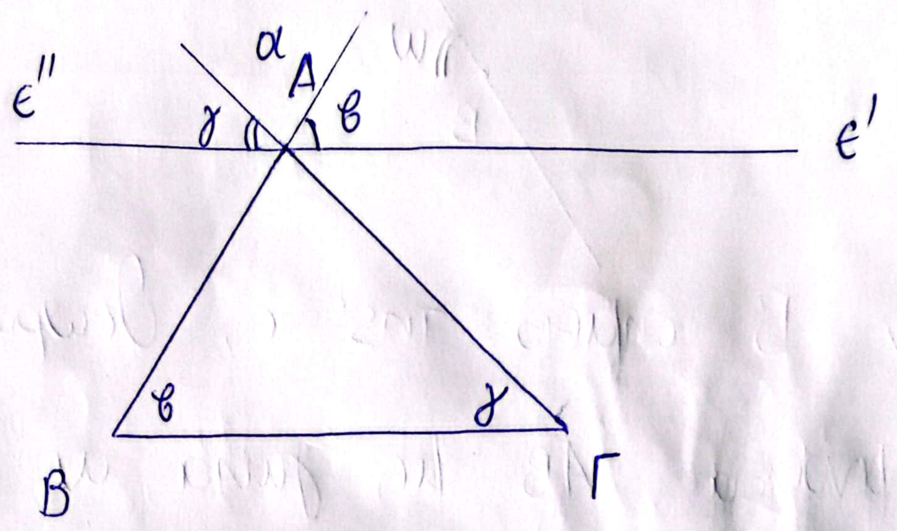


Αν Β σημείο της ε, θεωρούμε την τέμνουσα ΑΒ με γωνία ω με την (ε).
Σχηματίζουμε στο Α ίδια γωνία ω.
Λόγω αξιώματος παραλληλίας, η ε' είναι μοναδική με ε' // ε.

Σχόλιο: Η ε' δεν τέμνει την ε διότι αν είχαν κοινό σημείο Γ, τότε ΑΒΓ τρίγωνο, άτοπο: διότι: $\omega + \hat{A} = 2$ ορθές ενώ σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα δύο οποιωνδήποτε γωνιών του είναι μικρότερο των 2 ορθών.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου ισούται με 2 ορθές.

<u>Απόδειξη</u>:



Κάνουμε δύο φορές την κατασκευή της παραλλήλου προς τη βάση ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ απέναντι από την κορυφή Α,

<u>1η φορά</u>: τέμνουσα ΑΒ, ε'//ΒΓ

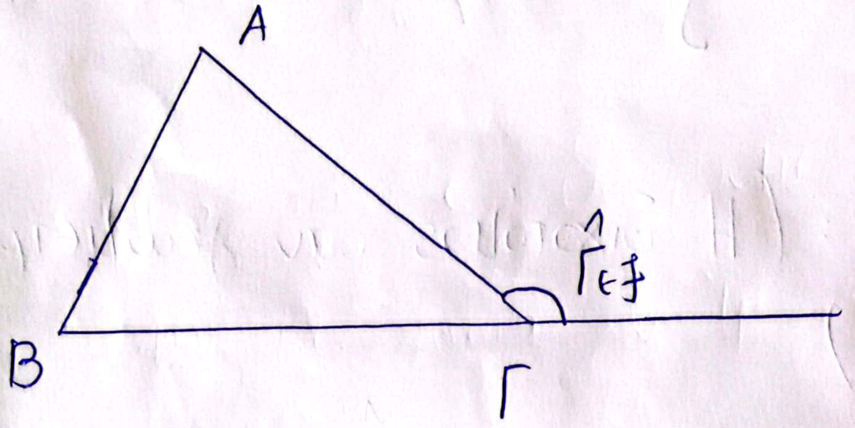
<u>2η φορά</u>: τέμνουσα ΑΓ, ε''//ΒΓ

ε' = ε'' και α + β + γ = 2 ορθές.

■

Πόρισμα: Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.

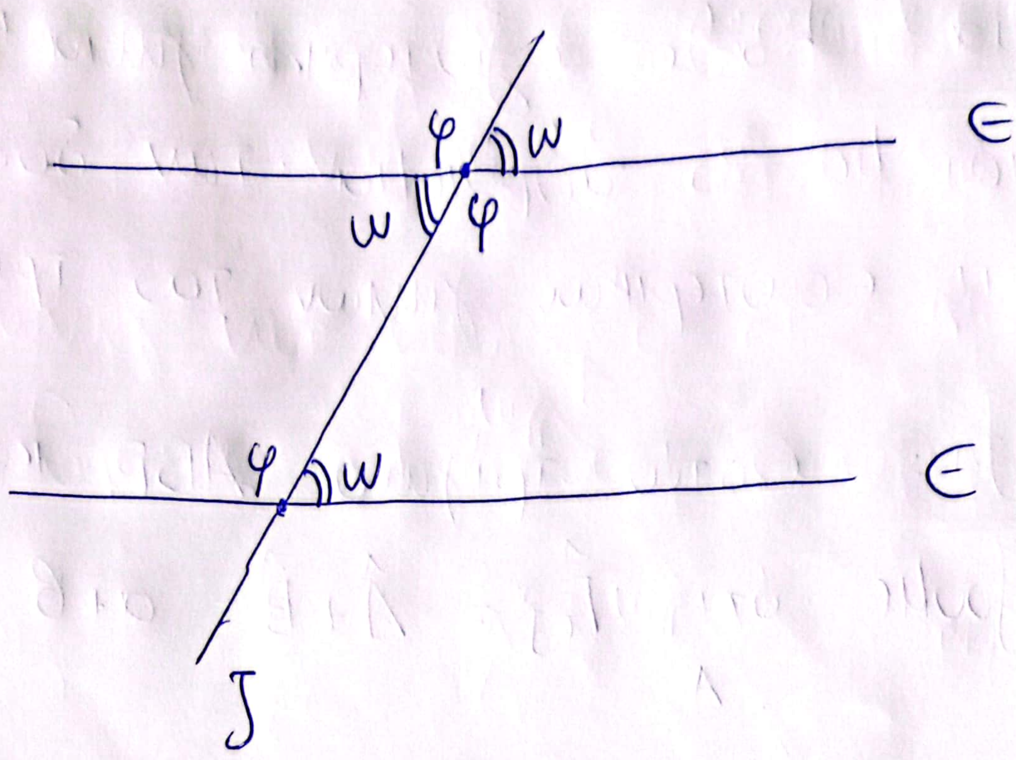
Απόδειξη: Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και θα αποδείξουμε ότι $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = \hat{A} + \hat{B} = \alpha + \beta$



$$\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 180^\circ - \hat{\Gamma} \overset{21}{=} \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} - \hat{\Gamma} = \hat{A} + \hat{B}$$

∎

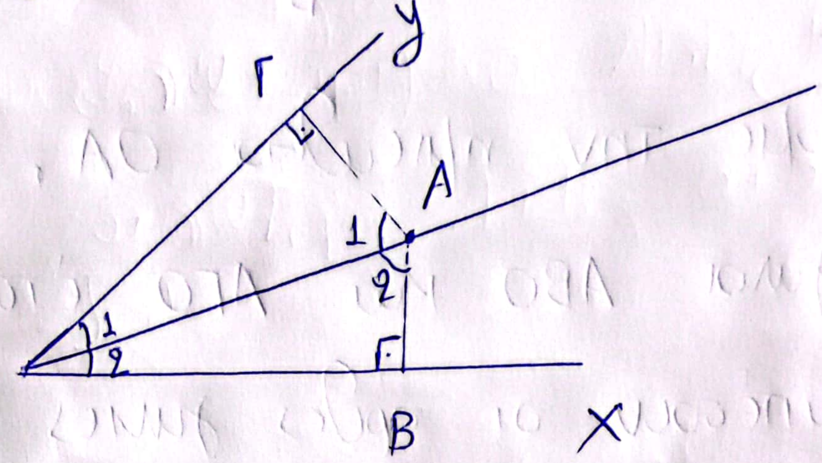
H/W: 1.15.9 - 1.15.3 - ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΝ



<u>Πρόταση</u> : (Η διχοτόμος σαν γεωμετρικός τόπος)

Έστω κυρτή γωνία $x\hat{O}y$. Ένα σημείο Α του επιπέδου ανήκει στη διχοτόμο της $x\hat{O}y$ αν και μόνο αν ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας $x\hat{O}y$.

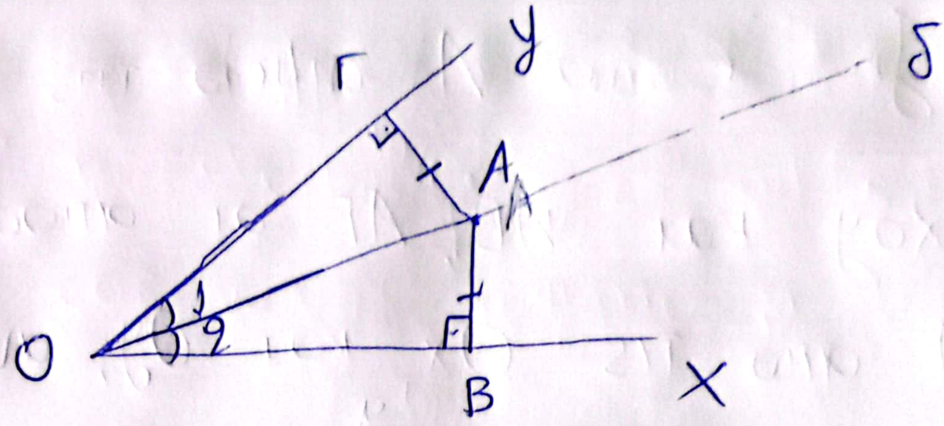
__Απόδειξη__: Έστω A σημείο της διχοτόμου της $x\hat{O}y$ και AB, $A\Gamma$ οι αποστάσεις του A από τις Ox και Oy, αντίστοιχα.



Επειδή $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, προκύπτει $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (άθροισμα γωνιών τριγώνου).

Τότε τα τρίγωνα $A\Gamma O$ και BAO είναι ίσα λόγω Γ-Π-Γ, άρα: $|AB| = |A\Gamma|$ που είναι το ζητούμενο.

Αντίστροφα, έστω σημείο A το οποίο ισαπέχει από τις Ox και Oy.



Θεωρούμε την ημιευθεία ΟΑ. Τοποθετώντας τα τρίγωνα ΑΒΟ και ΑΓΟ έτσι ώστε να συμπέσουν οι ορθές γωνίες του $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ και η ΓΑ με την ΒΑ. Τότε και οι ίσες υποτείνουσες ΟΑ = ΟΑ πρέπει να συμπέσουν και τα τρίγωνα θα έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες.

Άρα τα ΑΒΟ και ΑΓΟ είναι ίσα, οπότε

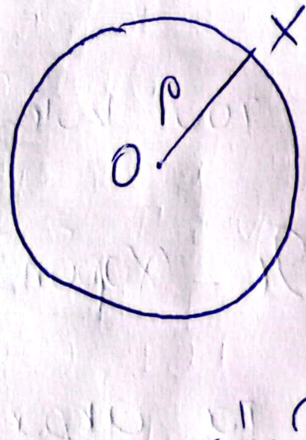
$\hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow$ Οδ: διχοτόμος της $x\hat{O}y$.

<u>H/W</u>: Πόρισμα 1.15.13 – Γεωμετρικόν.

Άσκηση 1.15.9 – Γεωμετρικόν

Κύκλος

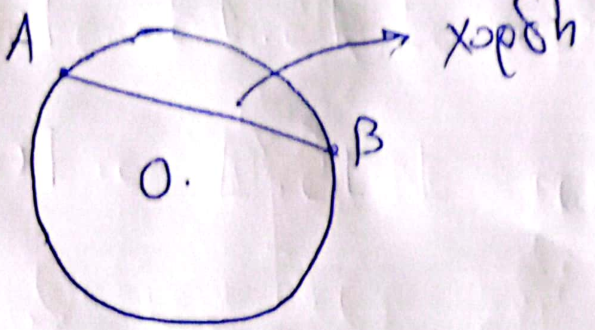
Κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας ρ είναι το σχήμα του επιπέδου που αποτελείται από όλα τα σημεία Χ με την ιδιότητα $|OX| = \rho$



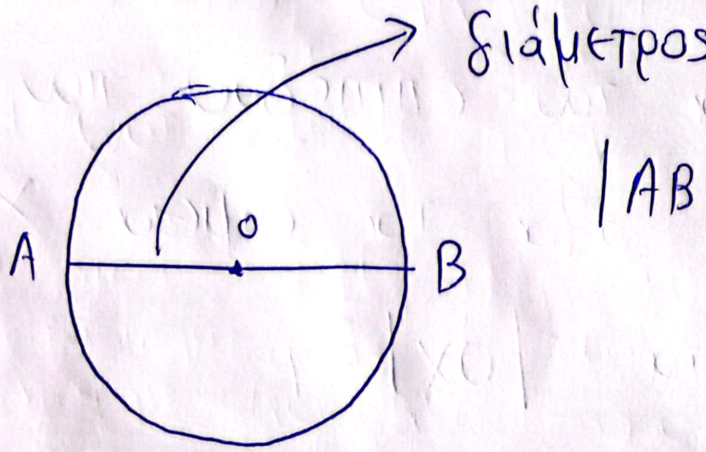
Χ: εσωτερικό του κύκλου $:\Longleftrightarrow |OX| < \rho$

Χ: εξωτερικό του κύκλου $:\Longleftrightarrow |OX| > \rho$

<u>Ορσ</u>: Δύο κύκλοι είναι ίσοι όταν οι ακτίνες τους είναι ίσες.



Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο σημεία του κύκλου λέγεται <u>χορδή</u>



$|AB| = 2\rho$

Συνεπώς, το κέντρο του κύκλου ανήκει στη μεσοκάθετο κάθε χορδής του (αφού ισαπέχει από τα άκρα της χορδής)

Ισχύουν τα ακόλουθα:

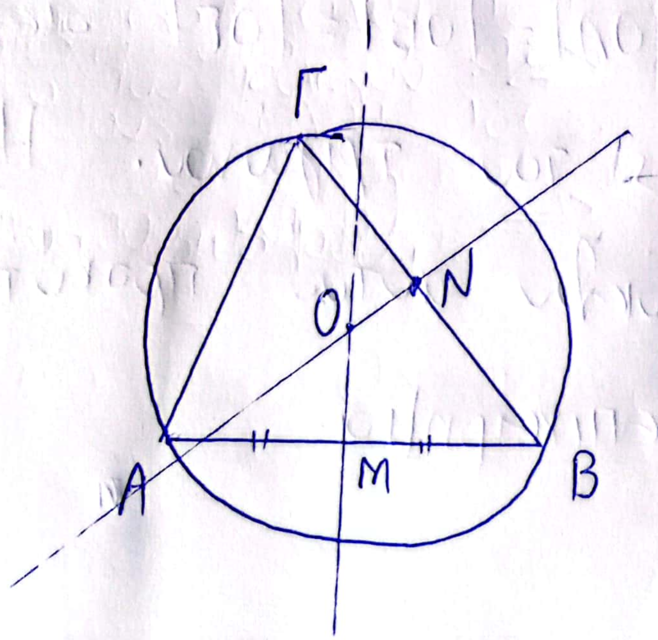
(1) Η κάθετος από το κέντρο προς τη χορδή κύκλου διέρχεται από το μέσον αυτής.

(2) (HW) Τα μέσα παραλλήλων χορδών κύκλου περιέχονται στη διάμετρο την κάθετη στις χορδές αυτές.

(3) Το μήκος χορδής κύκλου ακτίνας ρ είναι $\leq 2\rho$.

<u>Πρόταση</u>: Για κάθε τριάδα σημείων Α, Β και Γ, μη περιεχομένων στην ίδια ευθεία, υπάρχει ένας και μοναδικός κύκλος διερχόμενος από αυτά.

<u>Απόδειξη</u>:



Οι μεσοκάθετοι των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ και ΒΓ τέμνονται σε σημείο Ο.

Πράγματι, αν δεν είχαν κοινό σημείο τότε θα ήταν παράλληλες και από το Β θα είχαμε τις κάθετες ΒΜ και ΒΝ σε δύο παράλληλες, οπότε Μ, Ν και Β συνευθειακά, άτοπο.

Συνεπώς, $\left.\begin{array}{l} |OA| = |OB| \\ |OB| = |O\Gamma| \end{array}\right\} \Rightarrow |OA| = |O\Gamma|$

που σημαίνει Ο ανήκει μεσοκάθετο του ΑΓ.

Συνεπώς, ο κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα $\rho = |OA| = |OB| = |O\Gamma|$ διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου. Η μοναδικότητα του κύκλου αυτού προκύπτει με το ίδιο επιχείρημα.

$\blacksquare$

Πρόταση: Μια χορδή AB ενός κύκλου (O,ρ) δεν περιέχει άλλα σημεία του κύκλου εκτός των άκρων της A και B.

Απόδειξη: Αν η χορδή περιείχε ένα ακόμη σημείο Γ του κύκλου, τότε επειδή AOB ισοσκελές και Γ επί της βάσης AB, θα είχαμε: $\rho = |O\Gamma| < |OA| = \rho$, άτοπο. ∎

Κύκλος και ευθεία

Πρόταση: Μια ευθεία AB περιέχει το πολύ δύο σημεία ενός κύκλου.

Απόδειξη: Αν μια ευθεία είχε τρία κοινά σημεία με έναν κύκλο, τότε ένα εξ' αυτών θα ήταν μεταξύ των δύο άλλων, τα οποία ορίζουν χορδή του κύκλου.

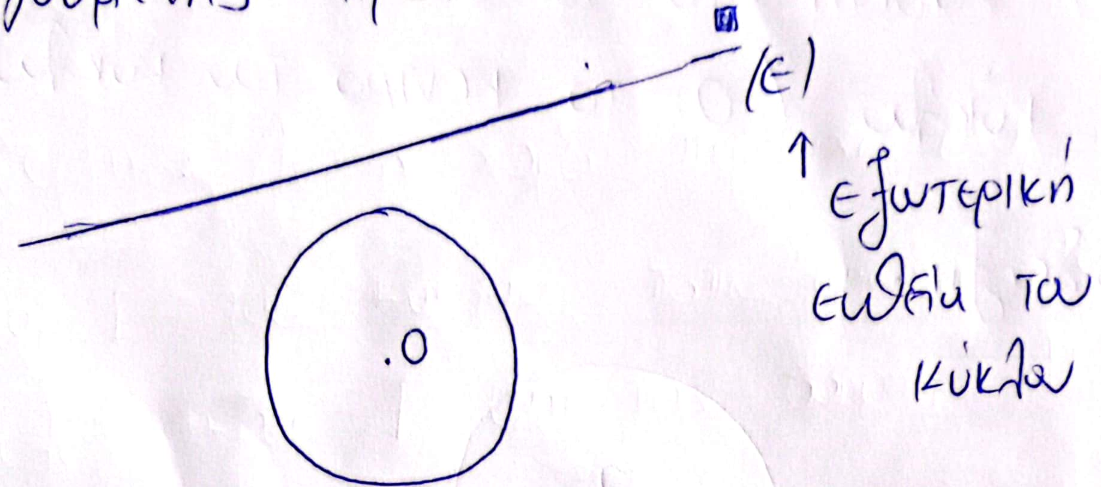
Ορισμός: Τον κύκλο της προηγούμενης πρότασης τον ονομάζαμε **περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου** και το κέντρο Ο του κύκλου αυτού, **περίκεντρο**.

Πόρισμα 2.1.8 - Γεωμετρικόν

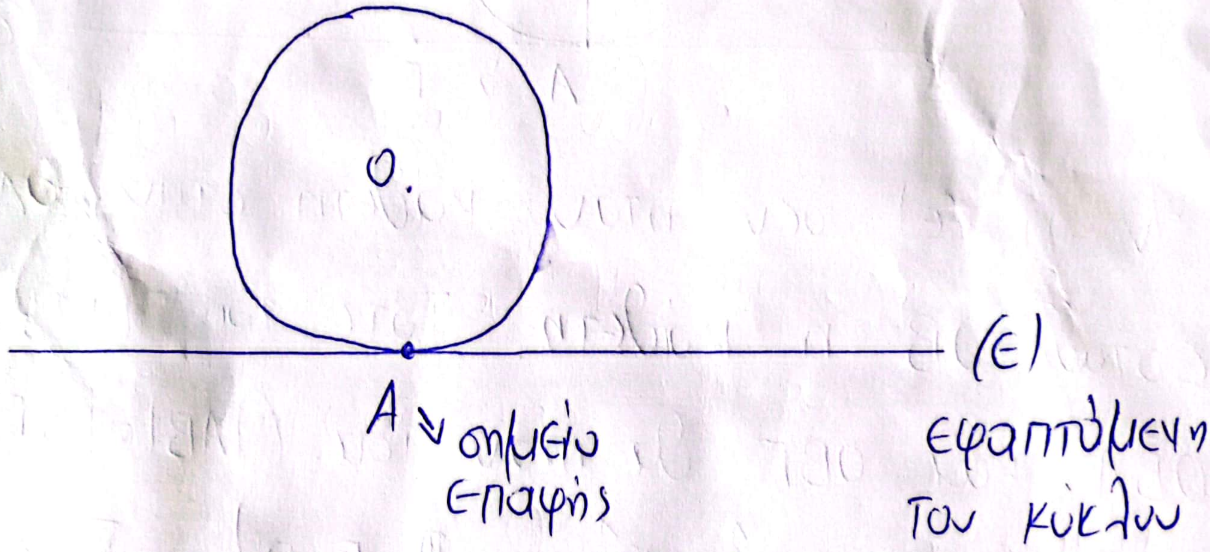
Διάμετροι φαίνονται υπό ορθή γωνία.

Συνεπώς, η χορδή αυτή θα περιείχε και τρίτο σημείο του κύκλου, άτοπο λόγω της προηγούμενης πρότασης.

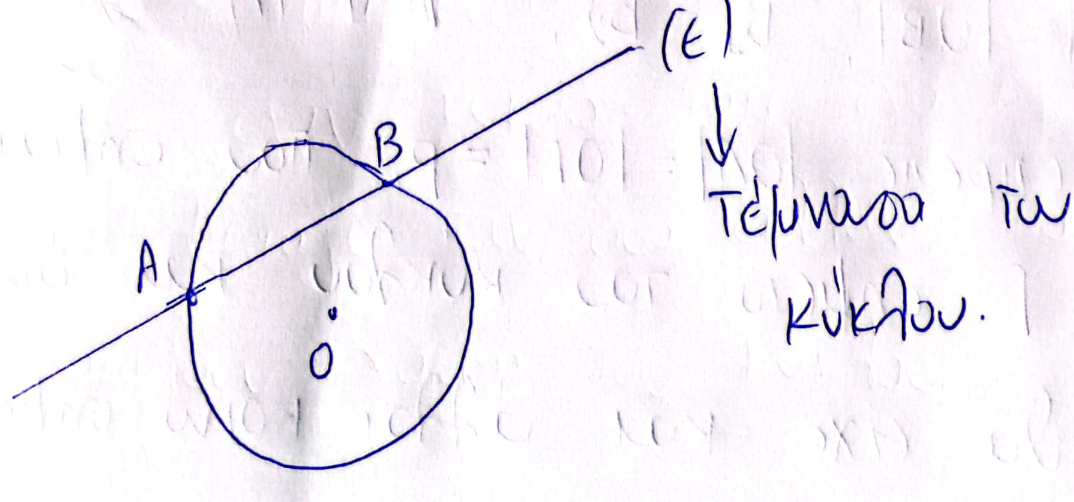
(i)



(ii)

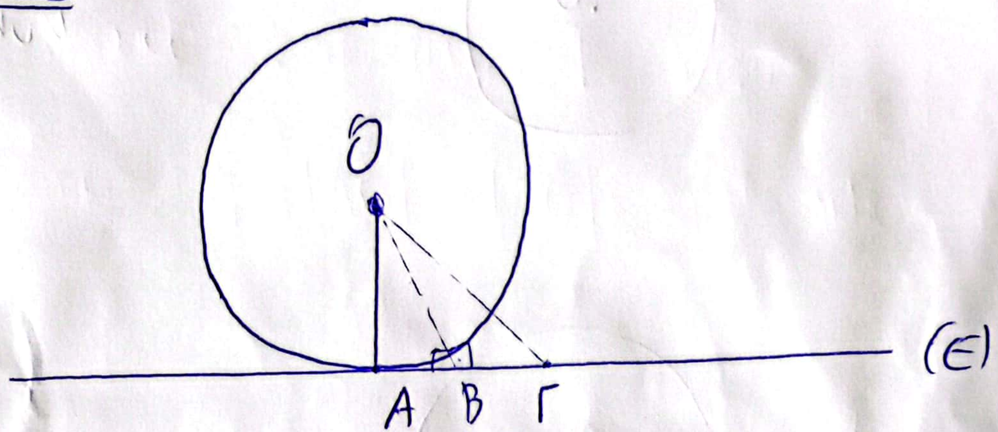


(iii)

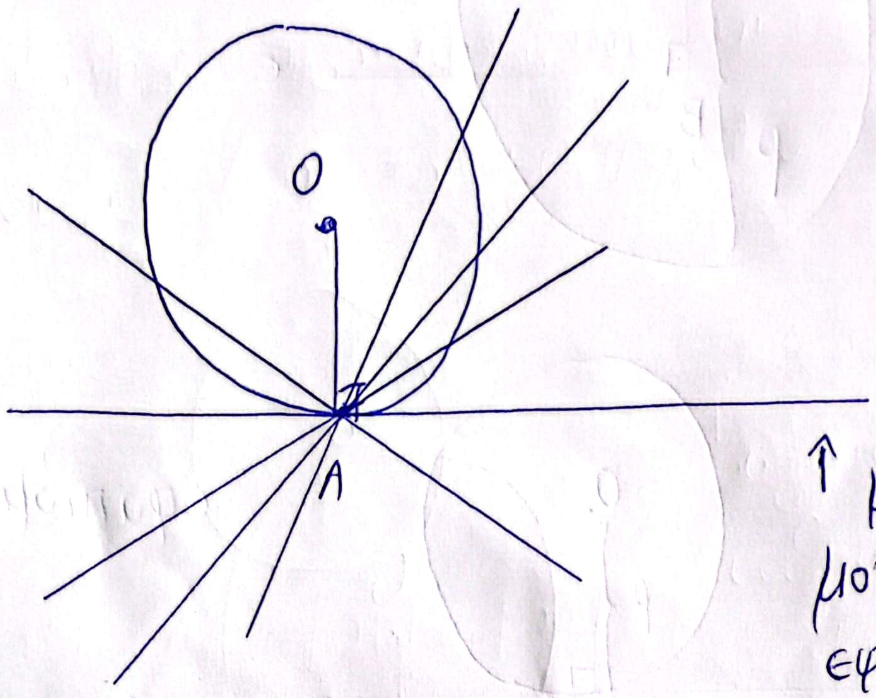


Θεώρημα: Μια ευθεία που έχει μόνο ένα κοινό σημείο Α με έναν κύκλο, είναι κάθετη στο Α στην ακτίνα ΟΑ του κύκλου (Ο: το κέντρο του κύκλου).

Απόδειξη:



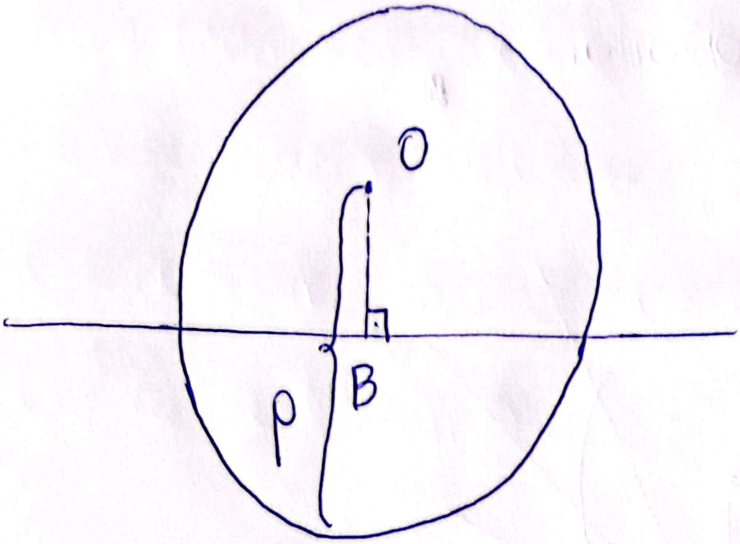
Αν η (ε) δεν ήταν κάθετη στην ΟΑ, τότε έστω ΟΒ η κάθετη. Τότε τα τρίγωνα ΟΒΑ και ΟΒΓ θα ήταν ίσα. (|ΑΒ| = |ΒΓ|, |ΟΒ| = |ΟΒ|, $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$, Π-Γ-Π). Συνεπώς θα έπρεπε |ΟΑ| = |ΟΓ| = ρ, που σημαίνει ότι Γ: σημείο του κύκλου και άρα η (ε) θα είχε και άλλο κοινό σημείο με τον κύκλο, άτοπο.



↑ μια και μοναδική εφαπτόμενη.

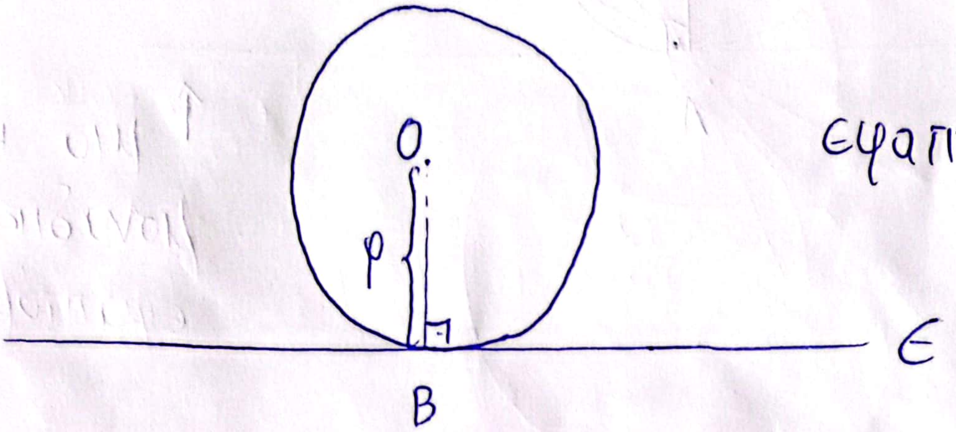
<u>Πόρισμα</u>: Δοθείσης ευθείας ε και δοθέντος σημείου O εκτός αυτής, τότε ο κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ τέμνει την ευθεία τότε και μόνον, όταν $\rho > |OB|$, όπου B η προβολή του O επί της ε.
Αν $\rho = |OB|$ τότε ο κύκλος εφάπτεται της ε στο B ενώ αν $\rho < |OB|$ ο κύκλος δεν τέμνει την ε.

(i)



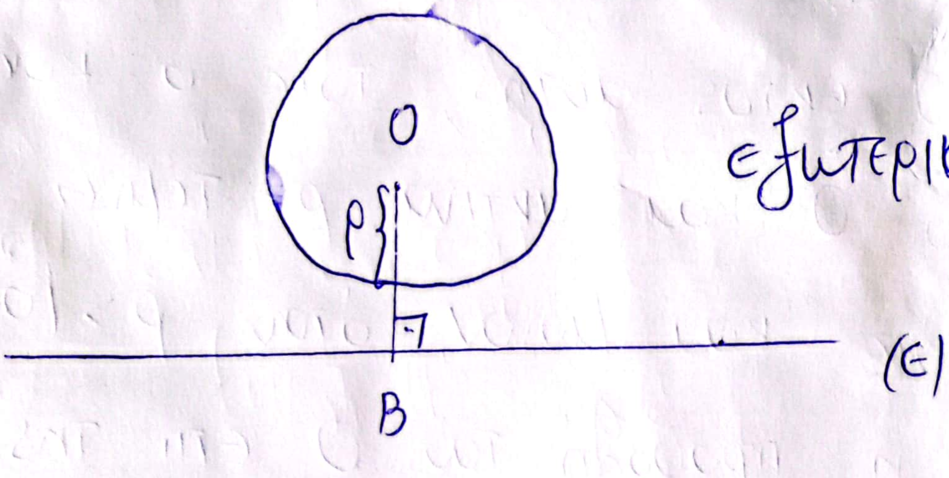
τέμνουσα

(ii)



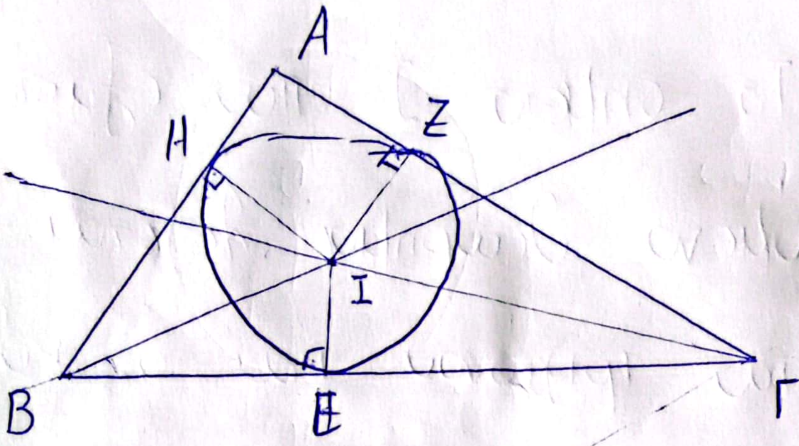
εφαπτόμενη

(iii)



εξωτερική

Θεώρημα: Οι τρεις διχοτόμοι των γωνιών τριγώνου ΑΒΓ διέρχονται από κοινό σημείο Ι που είναι το κέντρο κύκλου εφαπτομένου ταυτόχρονα και στις 3 πλευρές του ΑΒ.



Ι: το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών Β και Γ. Τότε $|IE| = |IH| = |IZ|$

Από $|IH| = |IZ|$ προκύπτει Ι: σημείο της διχοτόμου της γωνίας Α. Η καθετότητα των πλευρών στα άκρα των ακτίνων του κύκλου κέντρου Ι και ακτίνας $r = |IH| = |IE| = |IZ|$ δείχνει ότι ο κύκλος αυτός εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου. ■

H/W: Άσκηση 2.2.1 - Γεωμετρικόν

Σχόλιο: Το σημείο I που εξασφαλίζει το προηγούμενο θεώρημα λέγεται έγκεντρο του τριγώνου και ο κύκλος με κέντρο I που εφάπτεται των τριών πλευρών του τριγώνου λέγεται **εγγεγραμμένος** κύκλος του τριγώνου.