Λύση: $APOK$: παρ/μο $\Rightarrow |AP| = |KO|$

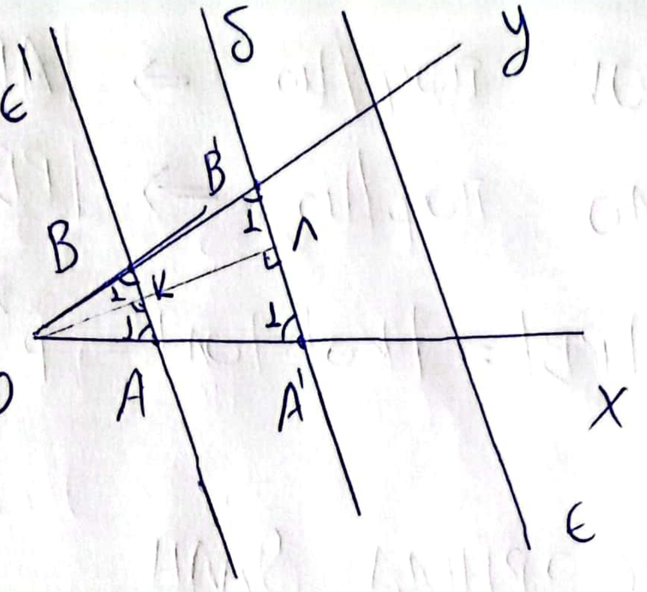
$PBΛO$: παρ/μο $\Rightarrow |PB| = |OΛ|$

οπότε: $|PA||PB| = |KO|\cdot|OΛ| = \rho^2$: σταθερό. ∎

ΘΕΩΡΗΜΑ ΘΑΛΗ

Έστω γωνία $x\hat{O}y$ και ευθεία ε τέμνουσα και τις δύο πλευρές της γωνίας. Από τα σημεία Α της Ox φέρνουμε παράλληλο προς την ε τέμνουσα την Oy στο Β. Τότε ο λόγος $\kappa = \frac{|OB|}{|OA|}$ είναι σταθερός και ανεξάρτητος της θέσης του Α επί της Ox. Αντίστροφα, αν για δύο σημεία Α και Α' της Ox και δύο σημεία Β και Β' της Oy οι λόγοι $\frac{|OB|}{|OA|} = \frac{|OB'|}{|OA'|}$ τότε $AB \parallel A'B'$.

<u>Απόδειξη :</u>



<u>Ορθό</u>

Έστω $A \neq A'$ δύο σημεία επί της Ox.

Από τα A, A' φέρουμε παράλληλες ε', δ προς την ε, αντίστοιχα, οι οποίες τέμνουν την Oy στα σημεία B και B', αντίστοιχα. Θα δείξουμε $\dfrac{|OB|}{|OA|} = \dfrac{|OB'|}{|OA'|}$

Τα τρίγωνα AOB και $A'OB'$ έχουν:

$\hat{O} = \hat{O}$, $\hat{A_1} = \hat{A_1'}$ (εντός εκτός επί τα αυτά των $\varepsilon' /\!/ \delta$ με τέμνουσα Ox)

$\hat{B_1} = \hat{B_1'}$ (εντός εκτός επί τα αυτά των $\varepsilon' /\!/ \delta$ με τέμνουσα Oy)

Άρα: Θεωρώντας το ύψος OK του τριγώνου AOB, τότε έχουμε ότι: Ύψος του τριγώνου

$A'OB'$. Τα τρίγωνα OKB και $O\Lambda B'$ είναι ορθογώνια και όμοια. Άρα:

$$\frac{|OK|}{|O\Lambda|} = \frac{|OB|}{|OB'|}$$

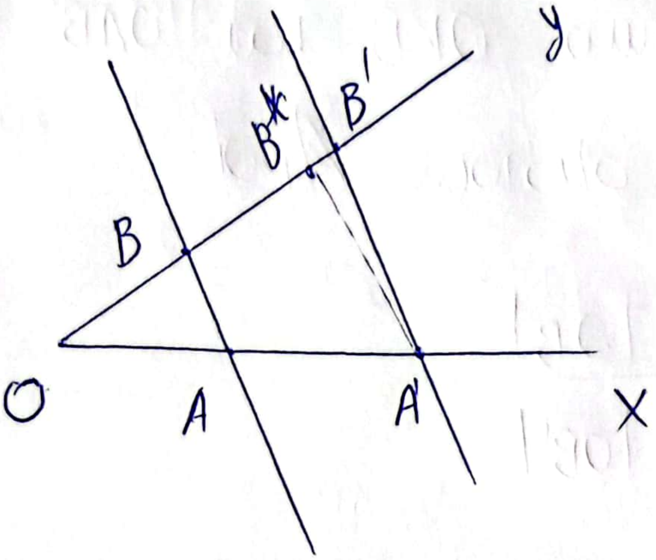
Με το ίδιο επιχείρημα για τα ορθογώνια και όμοια τρίγωνα OKA και $O\Lambda A'$ παίρνουμε

$$\frac{|OK|}{|O\Lambda|} = \frac{|OA|}{|OA'|},$$ άρα:

$$\frac{|OB|}{|OB'|} = \frac{|OA|}{|OA'|} \Longrightarrow \boxed{\frac{|OB|}{|OA|} = \frac{|OB'|}{|OA'|}}$$

<u>Αντίστροφο</u>: Έστω A, A' επί της Ox και B, B' επί της Oy ώστε:

$$\frac{|OB|}{|OA|} = \frac{|OB'|}{|OA'|}$$ θα δείξουμε $AB \parallel A'B'$.



Έστω $A'B^*$ η παράλληλος από το A' προς την AB (αξίωμα παραλληλίας). Θα δείξουμε $B \equiv B^*$. Από το Θαλή, αφού $A'B^* \parallel AB$, έχουμε: $\frac{|OB|}{|OA|} = \frac{|OB^*|}{|OA'|}$, άρα

$$\frac{|OB'|}{|OA'|} = \frac{|OB^*|}{|OA'|} \Rightarrow |OB| = |OB^*| \Rightarrow B \equiv B^*$$

∎

<u>Πόρισμα</u>: Με τις προϋποθέσεις του θεωρήματος, για κάθε ευθύγραμμο τμήμα AA' επί της Ox και το αντίστοιχο τμήμα BB' επί της Oy έχουμε $\frac{|BB'|}{|AA'|}$ = σταθερό.

Όμοια Πολύγωνα

Δύο πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών (και επομένως γωνιών) λέγονται **όμοια** όταν α) έχουν αντίστοιχες γωνίες ίσες και β) πλευρές ανάλογες. Η λέξη **αντίστοιχες** σημαίνει ότι μπορούμε να περιγράψουμε τα πολύγωνα ΑΒΓΔ... και Α'Β'Γ'Δ'... με τα ίδια γράμματα και οι γωνίες που αντιστοιχούν στα ίδια γράμματα είναι ίσες και οι προσκείμενες σε αυτές πλευρές ανάλογες, δηλαδή:

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|B\Gamma|}{|B'\Gamma'|} = \frac{|\Gamma\Delta|}{|\Gamma'\Delta'|} = \dots = \kappa$$

Η σταθερά κ λέγεται **λόγος ομοιότητας** του πολυγώνου.

Σχόλιο ① Στην περίπτωση των τριγώνων η ισότητα των γωνιών συνεπάγεται την αναλογία των πλευρών και αντίστροφα.

② Όλα τα τετράγωνα είναι όμοια μεταξύ τους.

③ Όλοι οι ρόμβοι που έχουν αντίστοιχα ίση μια από τις γωνίες τους είναι όμοιοι μεταξύ τους.

④ (SOS) Να δείξετε ότι δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

Λύση : Το άθροισμα των γωνιών ενός κανονικού ν-γώνου είναι $2(\nu-2)\llcorner$.

Άρα, κάθε μια γωνία του είναι $\frac{2(\nu-2)}{\nu}$ L.

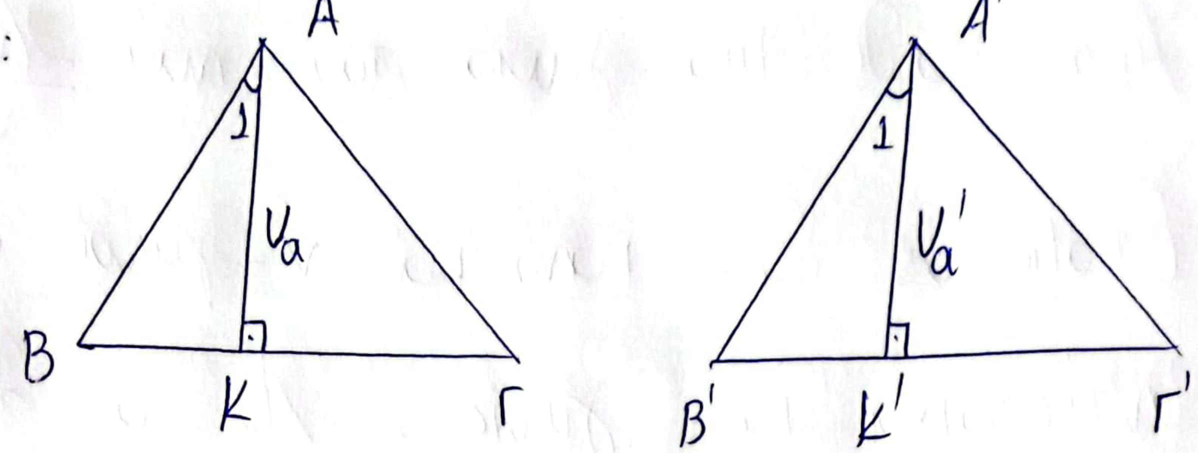
Επομένως δύο κανονικά ν-γωνα έχουν αντίστοιχα ίσες γωνίες. Αν ο λόγος δύο πλευρών τους είναι κ, τότε επειδή όλες οι πλευρές ενός κανονικού πολυγώνου είναι ίσες μεταξύ τους, και ο λόγος δύο άλλων αντίστοιχων πλευρών στα δύο πολύγωνα θα είναι επίσης κ. ∎

Άσκηση 1: Έστω δύο όμοια τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' με λόγο ομοιότητας

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|A\Gamma|}{|A'\Gamma'|} = \frac{|B\Gamma|}{|B'\Gamma'|} = \kappa.$$

Να δειχθεί ότι $\frac{E(AB\Gamma)}{E(A'B'\Gamma')} = \kappa^2$

Λύση:



Θεωρούμε τα αντίστοιχα ύψη υ_α και υ_α' από τις κορυφές A και A' αντίστοιχα.

Τα ορθογώνια τρίγωνα AKB και $A'K'B'$ είναι όμοια διότι: $\hat{K} = \hat{K}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{A}_1 = \hat{A}_1'$

άρα: $$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{\upsilon_\alpha}{\upsilon_\alpha'} = \frac{|BK|}{|B'K'|} = \kappa.$$

Τότε: $$\frac{E(AB\Gamma)}{E(A'B'\Gamma')} = \frac{\frac{1}{2}\upsilon_\alpha |B\Gamma|}{\frac{1}{2}\upsilon_\alpha' |B'\Gamma'|} = \frac{\upsilon_\alpha}{\upsilon_\alpha'} \frac{|B\Gamma|}{|B'\Gamma'|}$$

$$= \kappa^2$$

■

H/W: Άσκηση 3.10.6 – ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΝ.

Ο τύπος του Ήρωνα

Έστω $\tau = \frac{1}{2}(a+b+c)$ η ημιπερίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ. Τότε

$$E(AB\Gamma) = \sqrt{\tau(\tau-a)(\tau-b)(\tau-c)}$$

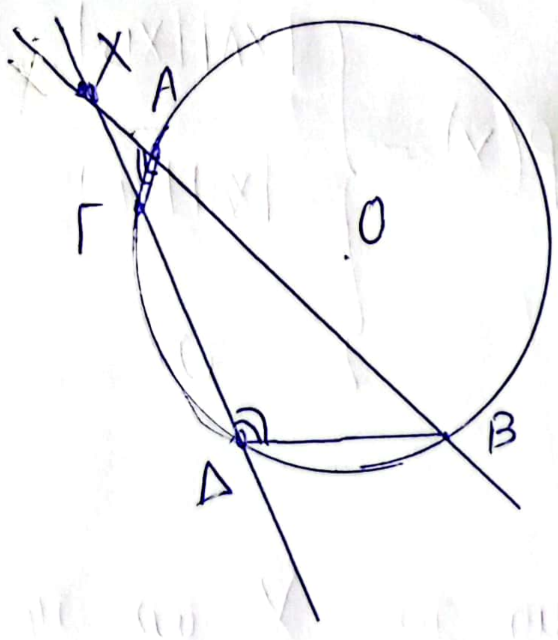
Πρόταση: Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Η ακτίνα r του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ ικανοποιεί: $r^2 = \frac{(\tau-a)(\tau-b)(\tau-c)}{\tau}$.

Εφαρμογή: $\tau^2 r^2 = \tau(\tau-a)(\tau-b)(\tau-c) \Rightarrow$

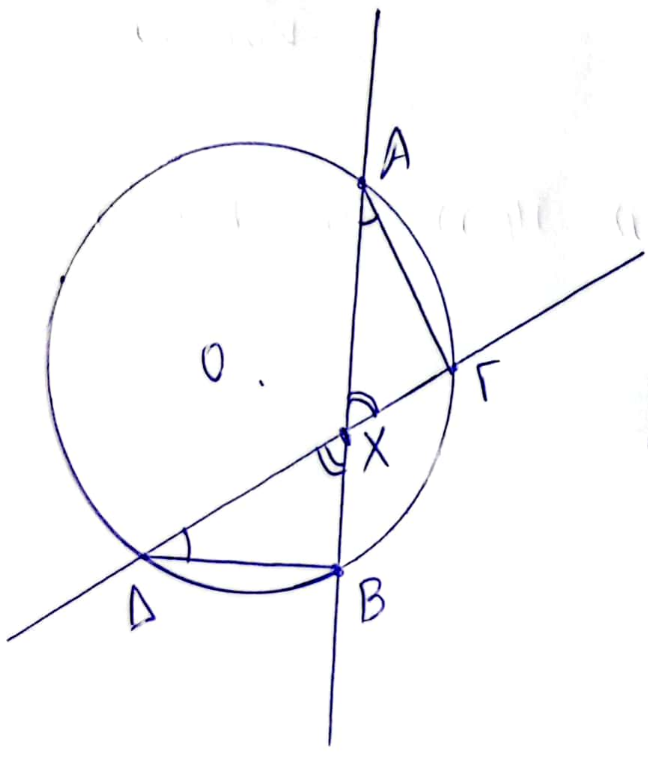
$\Rightarrow \tau^2 r^2 = E^2 \Rightarrow \boxed{E = \tau r}$

Δύναμη ως προς κύκλο

Θεώρημα: Δοθέντος κύκλου $O(\rho)$ και σημείου X εκτός του κύκλου, έστω ευθεία που διέρχεται από το X και τέμνει τον κύκλο στα σημεία A και B. Τότε το γινόμενο $|XA||XB|$ είναι ανεξάρτητο της κατεύθυνσης της ευθείας και εξαρτάται μόνον από την θέση του σημείου ως προς τον κύκλο.



X: εξωτερικό του κύκλου



X: εσωτερικό του κύκλου

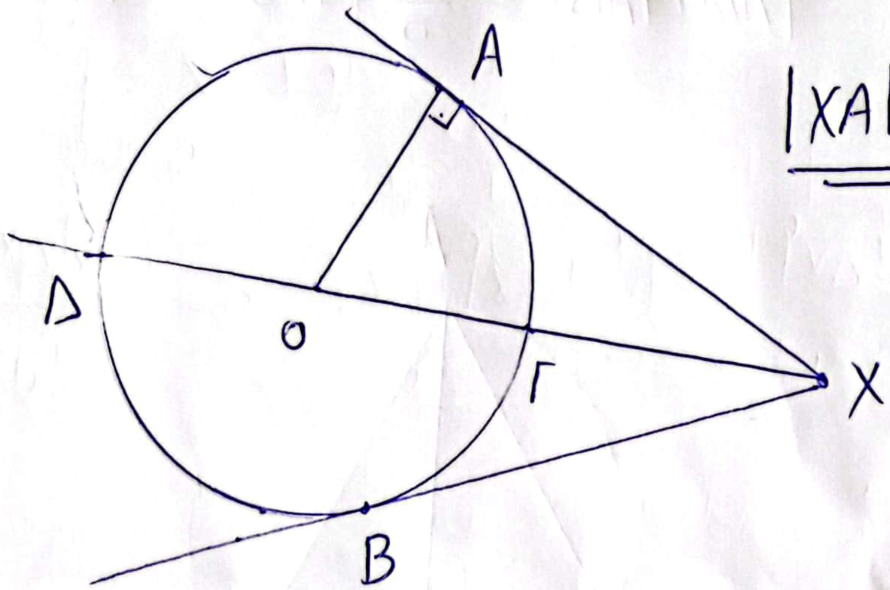
Απόδειξη: Θεωρούμε δύο διαφορετικές ευθείες που διέρχονται από το X και τέμνουν τον $O(\rho)$ στα σημεία (A, B) και (Γ, Δ) αντίστοιχα. Τα τρίγωνα $XA\Gamma$ και $X\Delta B$ που σχηματίζονται είναι όμοια. [$\hat{X}$: κοινή και $\hat{\Delta} = \hat{A}$] Άρα:
$\hat{B} = \hat{\Gamma}$

$$\frac{|XA|}{|X\Gamma|} = \frac{|X\Delta|}{|XB|} \Rightarrow |XA||XB| = |X\Gamma||X\Delta|$$

Ορισμός:
$$\rho(X) = \begin{cases} |XA||XB|, & X: \text{εξωτερικό του κύκλου} \\ -|XA||XB|, & X: \text{εσωτερικό του κύκλου} \\ 0, & X: \text{σημείο του κύκλου} \end{cases}$$

Δύναμη του X ως προς τον κύκλο $O(\rho)$.

▶ Έστω X εξωτερικό σημείο του κύκλου $O(\rho)$. Η ευθεία OX τέμνει τον $O(\rho)$ στα σημεία Γ, Δ. Έστω επίσης οι εφαπτόμενες του κύκλου από το X στα σημεία A, B του $O(\rho)$



$|XA| = |XB|$

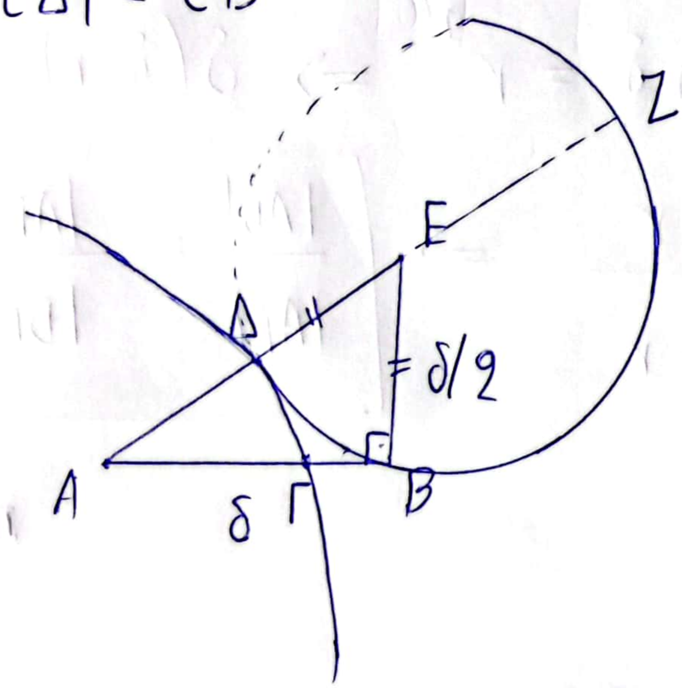
$$
\begin{aligned}
\rho(X) = |X\Gamma|\cdot|X\Delta| &= (|OX| - |O\Gamma|)(|OX| + |O\Delta|) \\
&= (|OX| - \rho)(|OX| + \rho) \\
&= |OX|^2 - \rho^2
\end{aligned}
$$

■

Κατασκευή (Χρυσή Τομή): Κατασκεύασε σημείο Γ που διαιρεί δοθέν ευθύγραμμο τμήμα AB σε μέσο και άκρο λόγο, δηλαδή:

$$\frac{|AB|}{|A\Gamma|} = \frac{|A\Gamma|}{|B\Gamma|}$$ (ο λόγος ολόκληρου προς το μεγάλο ισούται με τον λόγο του μεγάλου προς το μικρό τμήμα)

Απόδειξη: Σχηματίζουμε ορθογώνιο τρίγωνο ABE με $|BE| = \frac{\delta}{2}$, όπου $\delta = |AB|$. Επί της υποτείνουσας EA θεωρούμε σημείο Δ ώστε $|E\Delta| = EB$



Ο κύκλος $A(r)$, όπου $r = |A\Delta|$ τέμνει την AB σε σημείο Γ. Επίσης για το εξωτερικό σημείο A του κύκλου $E(\frac{\delta}{2})$ ισχύει:

$$\rho(A) = |AE|^2 - \rho^2 = |AE|^2 - |EB|^2 \underset{\text{Πυθαγόρειο Θεώρημα}}{=} |AB|^2$$

καθώς και $\rho(A) = |A\Delta| \cdot |AZ|$

άρα: $|AB|^2 = |A\Delta| \cdot |AZ| \Longrightarrow \delta^2 = r(r + |\Delta Z|)$

$$\Longrightarrow \underbrace{\delta^2 = r(r+\delta)}_{\downarrow} \Longrightarrow r^2 + r\delta - \delta^2 = 0$$

$$\delta \cdot \delta = r \cdot (r+\delta) \Longrightarrow \frac{\delta}{r} = \frac{r+\delta}{\delta}$$

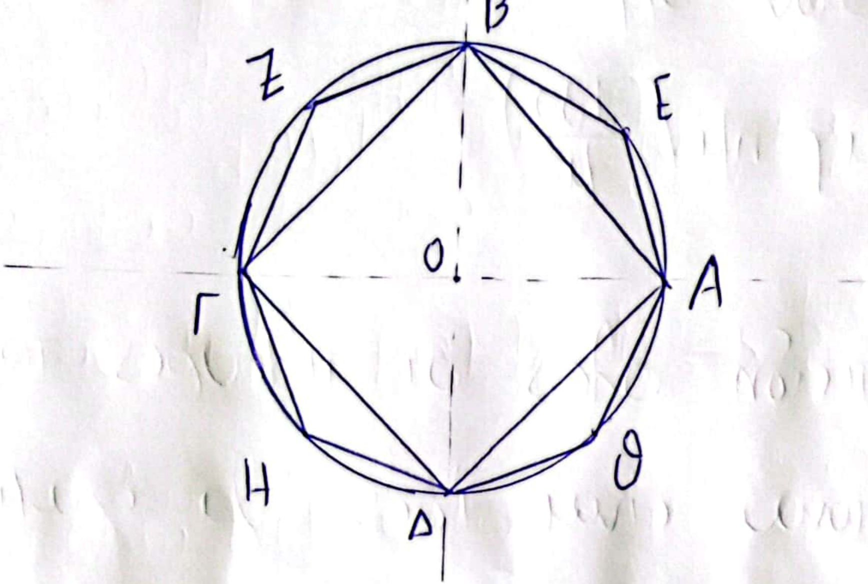
καλύτερα: $\delta^2 - r\delta = r^2 \Longrightarrow \delta(\delta - r) = r \cdot r$

$$\Longrightarrow \frac{\delta}{r} = \frac{r}{\delta - r} \Longrightarrow \boxed{\frac{|AB|}{|A\Gamma|} = \frac{|A\Gamma|}{|B\Gamma|}}$$

∎

Κύκλου μέτρηση

❗ Θεωρούμε κύκλο $O(\rho)$ και τετράγωνο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε αυτόν.



Π_1 : ΑΒΓΔ
2^2

Τα μέσα των τόξων $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ και $\overset{\frown}{\Delta A}$ ορίζουν τέσσερα πρόσθετα σημεία Ε, Ζ, Η και Θ και το ΑΕΒΖΓΗΔΘ είναι κανονικό οκτάγωνο, Π_2 : ΑΕΒΖΓΗΔΘ
2^3

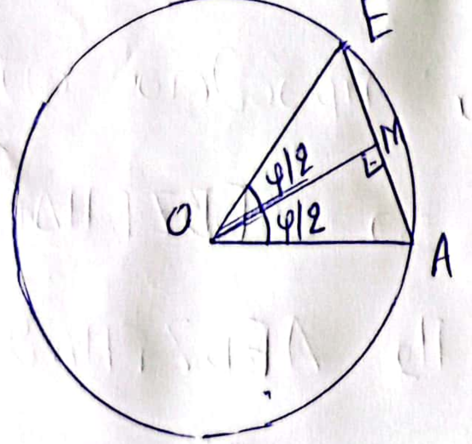
Το 16-γωνο Π_3 προκύπτει ανάλογα.
$\underset{2^4}{\overset{\|}{16}}$

Γενικά το κανονικό πολύγωνο Π_ν έχει $2^{\nu+1}$ πλευρές.

<u>Λήμμα ①</u>: Το κανονικό πολύγωνο με μ πλευρές, εγγεγραμμένο στον $O(\rho)$ έχει περίμετρο

$$\tilde{P}_\mu = 2\mu\rho\,\eta\mu\left(\frac{180}{\mu}\right)$$

<u>Απόδειξη</u>: Επειδή όλες οι πλευρές του κανονικού μ-γώνου είναι ίσες θα έχουμε $\tilde{P}_\mu = \mu|AE|$, όπου AE μια πλευρά του.



Το AOE είναι ισοσκελές με $\hat{O} = \frac{360}{\mu} = \varphi$

$$\Rightarrow \frac{\varphi}{2} = \frac{180}{\mu}$$

Άρα, $\tilde{P}_\mu = \mu|AE| = 2\mu|EM| = 2\mu\rho\,\eta\mu\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

$$\Longrightarrow \boxed{\tilde{P}_\mu = 2\mu\rho\,\eta\mu\left(\frac{180}{\mu}\right)}$$

■

<u>Λήμμα ②</u>: Η ακολουθία των περιμέτρων $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \dots$ των πολυγώνων $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots$ είναι αύξουσα.

<u>Απόδειξη</u>: Κάθε τέτοιο πολύγωνο έχει διπλάσιες το πλήθος πλευρές από το προηγούμενο του. Για $\mu \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$\frac{\tilde{P}_\mu}{\tilde{P}_{2\mu}} \overset{\text{Λήμμα ①}}{=} \frac{2\rho\mu\,\eta\mu\left(\frac{180}{\mu}\right)}{4\rho\mu\,\eta\mu\left(\frac{180}{2\mu}\right)} = \frac{\eta\mu\left(\frac{180}{\mu}\right)}{2\eta\mu\left(\frac{180}{2\mu}\right)}$$

$$= \frac{\eta\mu\left(\frac{180}{\mu}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{180}{2\mu}\right)}{2\eta\mu\left(\frac{180}{2\mu}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{180}{2\mu}\right)} = \frac{\eta\mu\left(\frac{180}{\mu}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{180}{2\mu}\right)}{\eta\mu\left(\frac{180}{\mu}\right)}$$

$$= \sigma\upsilon\nu\left(\frac{180}{2\mu}\right) < 1$$

■

Λήμμα ③ Κάθε κανονικό μ-γωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας ρ έχει περίμετρο μικρότερη από αυτήν του περιγεγραμμένου τετραγώνου στον ίδιο κύκλο.

Συμπέρασμα: Τα Λήμματα ② και ③ εξασφαλίζουν ότι η ακολουθία $(\tilde{P}_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}}$ των περιμέτρων των πολυγώνων $\Pi_1, \Pi_2, \ldots$ έχει όριο Α. Το όριο Α το ορίζουμε ως **μήκος ή περίμετρο κύκλου**.

Ο αριθμός π

<u>Θεώρημα</u>: Για κάθε κύκλο ο λόγος της περιμέτρου προς τη διάμετρο του είναι μια σταθερά π ανεξάρτητη της ακτίνας του κύκλου.

<u>Απόδειξη</u>: Ας υποθέσουμε ότι ο λόγος της περιμέτρου p προς τη διάμετρο $2r$ ενός συγκεκριμμένου κύκλου $O(r)$ είναι α και ένας άλλος κύκλος $K(r')$ έχει αντίστοιχο λόγο περιμέτρου προς διάμετρο $\alpha' = \frac{p'}{2r'} < \alpha$. Από τον ορισμό της περιμέτρου του κύκλου ως ορίου περιμέτρων εγγεγραμμένων πολυγώνων, θα υπάρχει κανονικό πολύγωνο με μ πλευρές

εγγεγραμμένο στον $O(r)$ και με περί-
μετρο $\tilde{P_\mu}$ που ικανοποιεί:

$$\underbrace{2r\alpha'}_{P'} < \tilde{P_\mu} < \underbrace{2r\alpha}_{P}$$

η οποία ισοδυναμεί με $\alpha' < \frac{\tilde{P_\mu}}{2r} < \alpha$

Το αντίστοιχο κανονικό πολύγωνο με μ πλευρές και εγγεγραμμένο στον $K(r')$ έχει $\frac{\tilde{P_\mu}'}{2r'} = \frac{\tilde{P_\mu}}{2r}$

άρα: $\alpha' = \frac{P'}{2r'} < \frac{\tilde{P_\mu}'}{2r'} \Rightarrow P' < \tilde{P_\mu}'$,

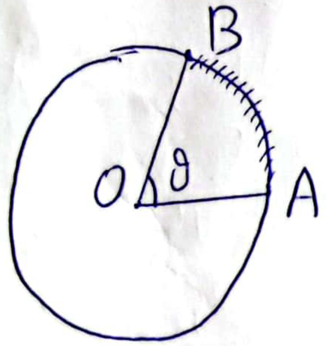
άτοπο διότι το P' είναι το όριο της αύξουσας ακολουθίας των $(\tilde{P_\mu}')_{\mu\in\mathbb{N}}$.

Εναλλάσσοντας τους ρόλους των $O(r)$ και $K(r')$ αποδεικνύουμε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο ότι και η $\alpha < \alpha'$ οδηγεί σε άτοπο.

Άρα θα πρέπει $\alpha' = \alpha$. ■

Πόρισμα: Η περίμετρος ενός κύκλου ακτίνας r είναι ίση με $2\pi r$.

- Με ανάλογες διαδικασίες βρίσκουμε:

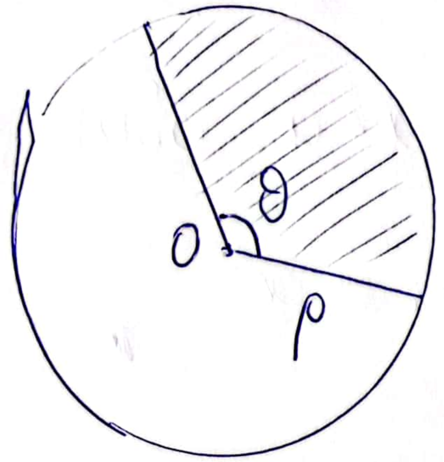


$$|\overset{\frown}{AB}| = \theta \frac{\pi}{180} \rho$$

(θ: το μέτρο της γωνίας σε μοίρες)

- **Εμβαδόν κύκλου**: $E = \pi \rho^2$, ρ: η ακτίνα του κύκλου

Εμβαδόν κυκλικού τομέα



$$E = \frac{\theta \pi}{360} \rho^2$$