# Ευκλείδεια Γεωμετρία - Μάθημα 1º

9/4/2024

email: 1) e.papapetros@upatras.gr (πανεπιστημιακό)
2) bpapapetros@gmail.com

Σύγγραμμα: ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΝ (Πάρις Πάμφιλος)

## Αντικείμενο Ευκλείδειας Γεωμετρίας:

Εξετάζει τις ιδιότητες σχημάτων στο επίπεδο και στο χώρο και κυρίως αυτές που σχετίζονται με μετρήσεις (μήκη, γωνίες, εμβαδά, όγκο κ.τ.λ).

- **Επιπεδομετρία** (ιδιότητες σχημάτων του επιπέδου, π.χ: τρίγωνο, τετράγωνο, κύκλος κτλ.),
- **Στερεομετρία** (ιδιότητες σχημάτων του χώρου, πχ: κύβος, σφαίρα κτλ)

**Πρωταρχικές Έννοιες** : το σημείο, η ευθεία, το επίπεδο και η επιφάνεια.

**Σχόλιο** : Τα στοιχεία του Ευκλείδη αρχίζουν με 23 ορισμούς ( πχ. (2) Γραμμή δε μήκος απλατές) και συνεχίζει με τα **5 Αιτήματα του Ευκλείδη** τα οποία θα καλούμε αξιώματα:

(1) Από οποιοδήποτε σημείο προς οποιοδήποτε σημείο μπορούμε να φέρουμε μια ευθεία γραμμή.

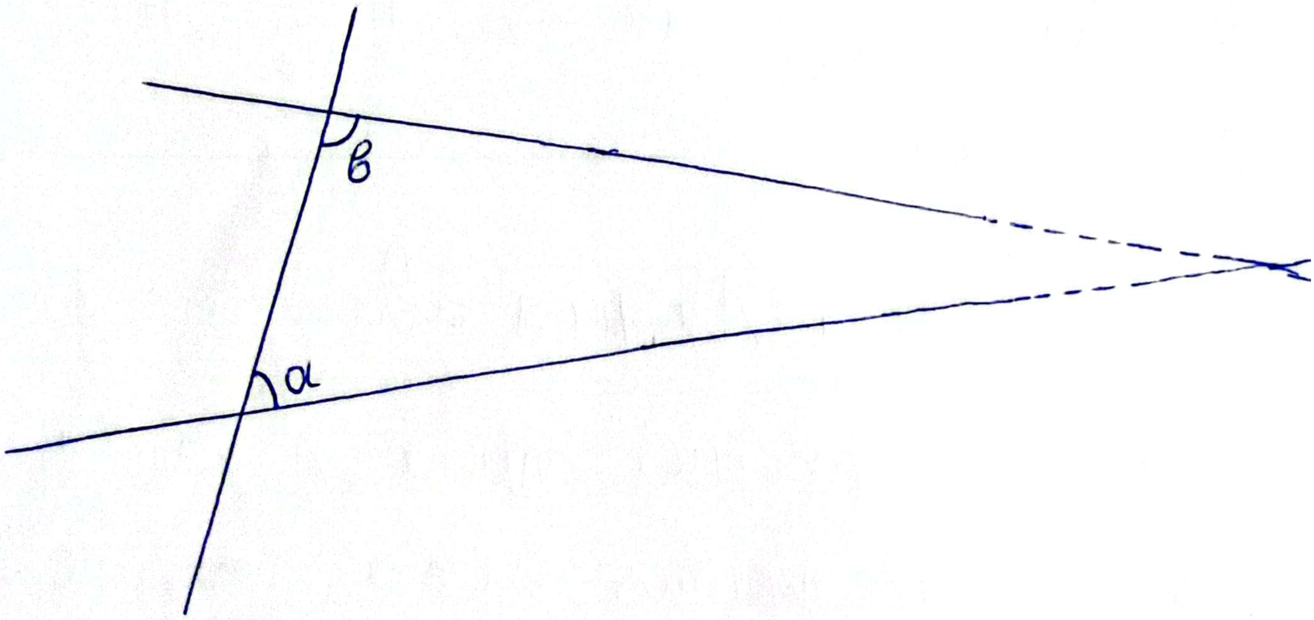
(2) Κάθε πεπερασμένη ευθεία μπορεί να επεκτείνεται συνεχώς και ευθυγράμμως.

(3) Μπορούμε να γράψουμε έναν κύκλο με οποιοδήποτε κέντρο και ακτίνα

(4) Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες.

(5) [Αξίωμα Παραλληλίας]

Αν μια ευθεία που τέμνει δύο άλλες ευθείες σχηματίζει εντός και επί τα αυτά γωνίες συνολικά λιγότερες από δύο ορθές, οι εν λόγω ευθείες, προεκτεινόμενες απεριόριστα, συναντώνται σε εκείνη τη μεριά όπου σχηματίζονται οι γωνίες που είναι λιγότερες από δύο ορθές.




<u>Σχόλιο</u>: Τα 5 αξιώματα του Ευκλείδη δεν αρκούν για την απόδειξη όλων των προτάσεων που ακολουθούν στο βιβλίο του.

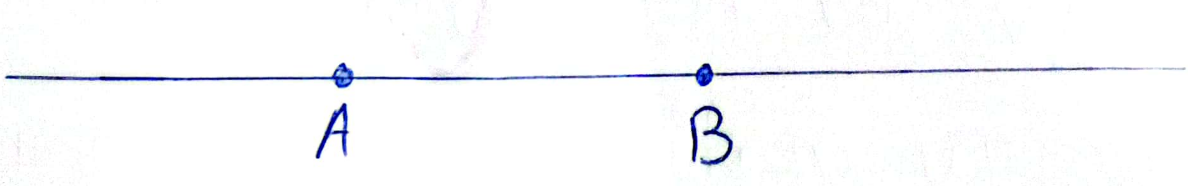
**!** Ο Hilbert έδωσε σύστημα με τέσσερα μόνο αξιώματα.

## ▶ Ευθεία και Ευθύγραμμο Τμήμα

Το επίπεδο αποτελείται από σημεία που συμβολίζουμε με κεφαλαία γράμματα Α, Β, Γ, Δ, .... Ένα από τα πιο απλά σχήματα του επιπέδου είναι η ευθεία, με συνήθη σύμβολα ε, ζ, η, ... ή ε', ζ', η' κτλ

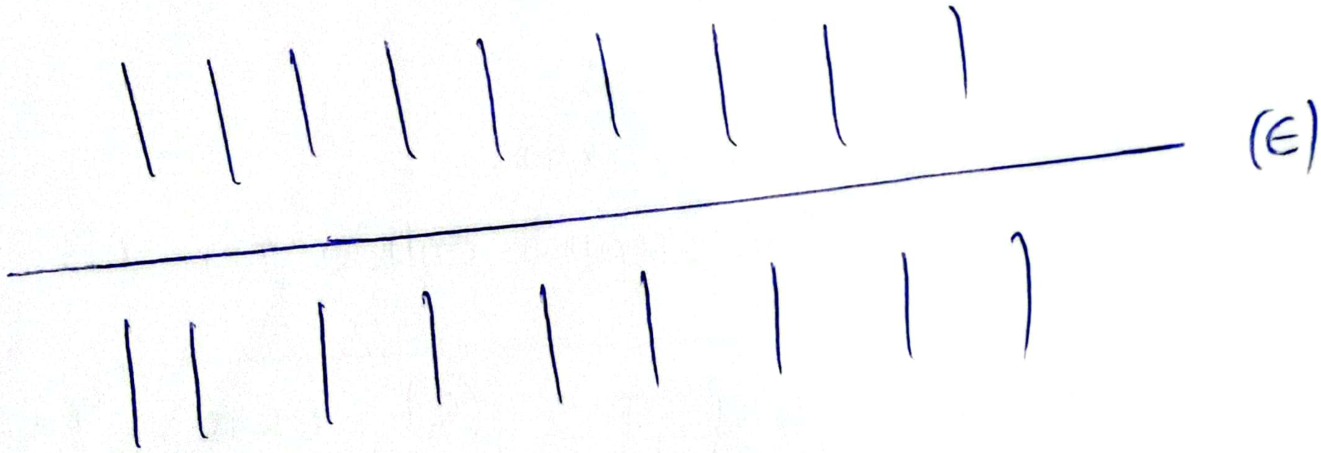

## Αρχικά Αξιώματα Ευθειών

(i) Δύο διαφορετικά σημεία Α και Β ορίζουν μία ακριβώς ευθεία, την οποία συμβολίζουμε με ΑΒ

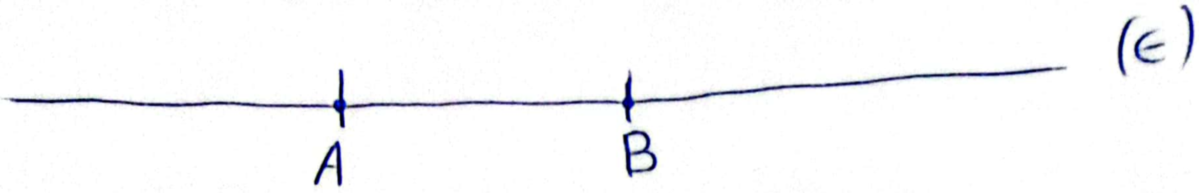


(ii) Κάθε ευθεία έχει άπειρα σημεία. Για κάθε ευθεία υπάρχουν άπειρα σημεία του επιπέδου που δεν ανήκουν σε αυτή και για κάθε σημείο υπάρχουν άπειρες ευθείες που δεν διέρχονται από αυτό.

(iii) Κάθε ευθεία χωρίζει το επίπεδο σε δύο μέρη, τα οποία λέγονται <u>ημιεπίπεδα</u>



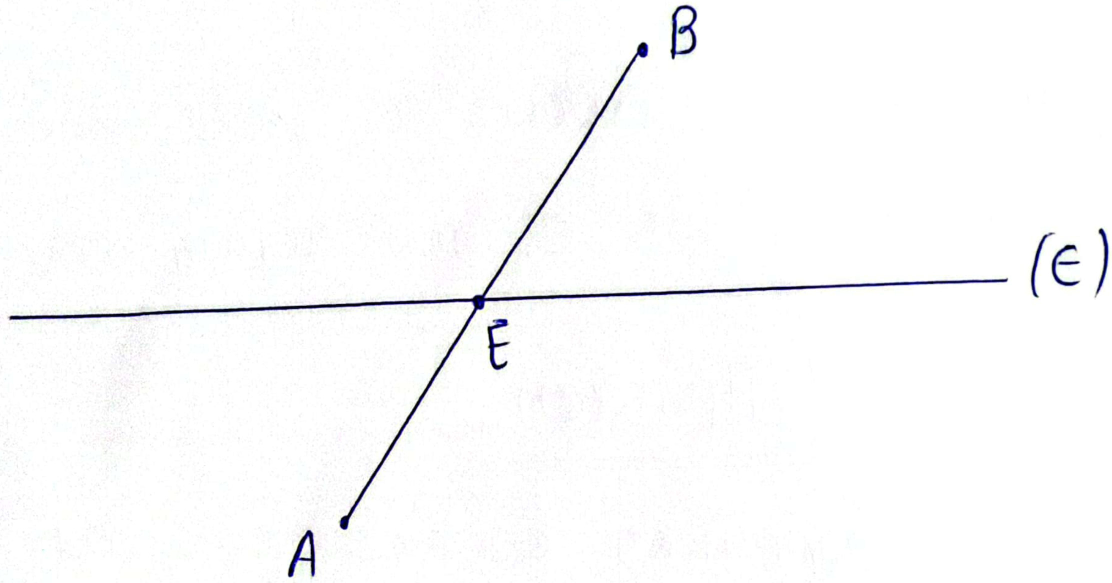

(iv) Δύο σημεία Α, Β μιας ευθείας (ε) ορίζουν ένα ευθύγραμμο τμήμα το οποίο συμβολίζουμε επίσης με ΑΒ.




AB: A, B και όλα τα σημεία που βρίσκονται "μεταξύ" των A και B


Τα υπόλοιπα σημεία της (ε), εκτός του ευθύγραμμου τμήματος AB λέμε ότι αποτελούν το εξωτερικό του ευθύγραμμου τμήματος.

(v) Αν τα σημεία Α και Β βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ευθείας ε, τότε όλα τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ περιέχονται στο ίδιο ημιεπίπεδο.
Αν τα Α και Β βρίσκονται σε διαφορετικά ημιεπίπεδα της ε, τότε το σημείο τομής Ε της ε και της ευθείας ΑΒ βρίσκεται μεταξύ των Α και Β.




Σας θυμίζει κάποιο γνωστό θεώρημα της Ανάλυσης το παραπάνω για συγκεκριμένη κατηγορία συναρτήσεων;;

• **Παράλληλες** ονομάζουμε δύο ευθείες που δεν τέμνονται (όχι κοινά σημεία).

Την ευθεία στην οποία περιέχεται ένα ευθύγραμμο τμήμα την ονομάζουμε φορέα του ευθύγραμμου τμήματος.

• **Παράλληλα** λέμε δύο ευθύγραμμα τμήματα των οποίων οι φορείς είναι παράλληλες ευθείες.

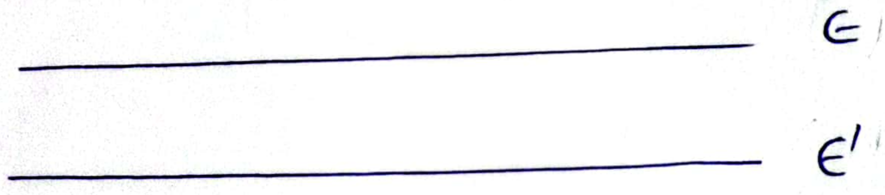
• **Τέμνουσα** μιας ευθείας ε λέμε κάθε ευθεία ε', διαφορετική της ε, που τέμνει την ε.

## Πρόταση

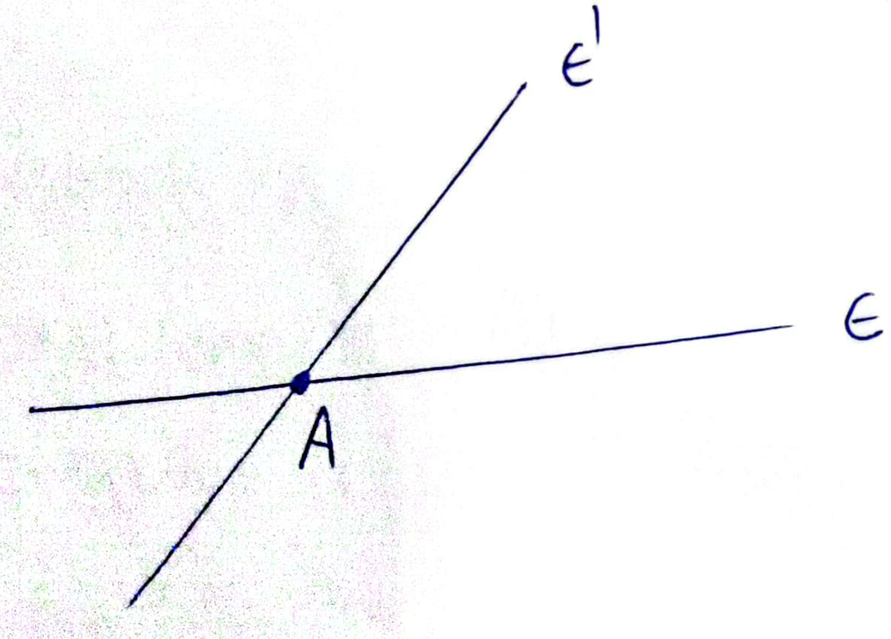
Δύο διαφορετικές ευθείες ή είναι παράλληλες ή τέμνονται σε ένα ακριβώς σημείο.

Απόδειξη →

**Απόδειξη** : Έστω ε και ε' δύο διαφορετικές ευθείες. Αν αυτές δεν τέμνονται, τότε είναι εξ' ορισμού παράλληλες. Αν τέμνονται τότε θα έχουν μόνο ένα κοινό σημείο Α. Πράγματι, αν είχαν και δεύτερο σημείο τομής $B \neq A$, τότε θα είχαμε δύο διαφορετικές ευθείες που διέρχονται από τα σημεία Α και Β και αυτό αντιβαίνει στο πρώτο αξίωμα των ευθειών. ∎

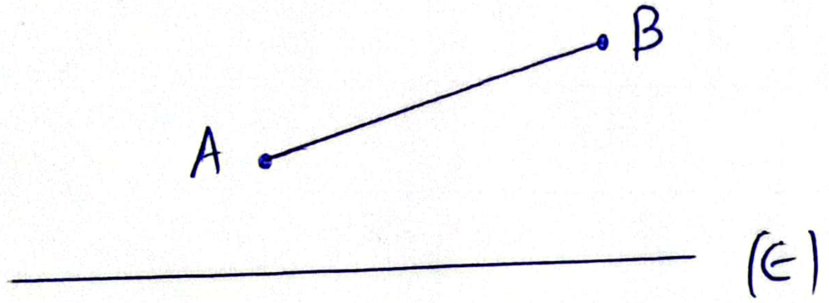



ή



**Άσκηση 1:** Δίνεται ευθεία ε. Δείξτε ότι αν το ευθύγραμμο τμήμα AB δεν τέμνει την ευθεία ε τότε τα A και B περιέχονται στο ίδιο ημιεπίπεδο.

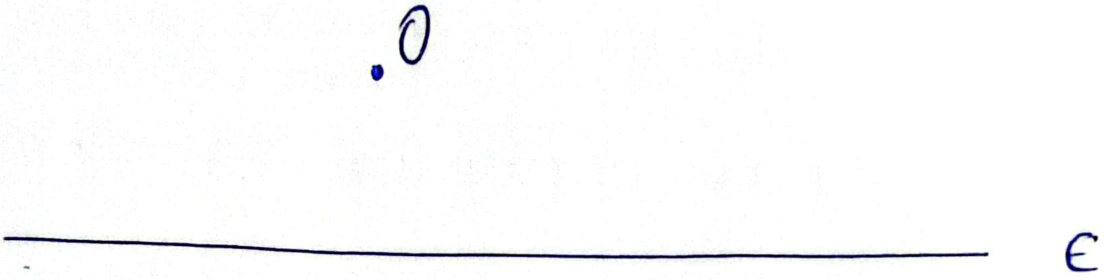
**Λύση:** Αν τα A και B περιέχονται σε διαφορετικά ημιεπίπεδα της ε τότε από το αξίωμα (v) των ευθειών, η AB τέμνει την ε, άτοπο. Συνεπώς τα A και B περιέχονται στο ίδιο ημιεπίπεδο. ∎




Ποιο γνωστό θεώρημα της Ανάλυσης σας θυμίζει η παραπάνω άσκηση για συγκεκριμένη κατηγορία συναρτήσεων;;

**Άσκηση 2:** Να δείξετε ότι για κάθε σημείο Ο του επιπέδου υπάρχουν άπειρες ευθείες διερχόμενες από αυτό.

**Λύση:** Έστω σημείο Ο του επιπέδου




και θεωρούμε ευθεία ε που δεν διέρχεται από το Ο (υπάρχει λόγω Αξιώματος (ii) των ευθειών). Πάλι από το Αξίωμα (ii) των ευθειών υπάρχουν άπειρα σημεία Α, Β, Γ,... της ε. Ορίζουμε για κάθε ένα από αυτά τις ευθείες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ...

(Αξίωμα (i) των ευθειών).

∎

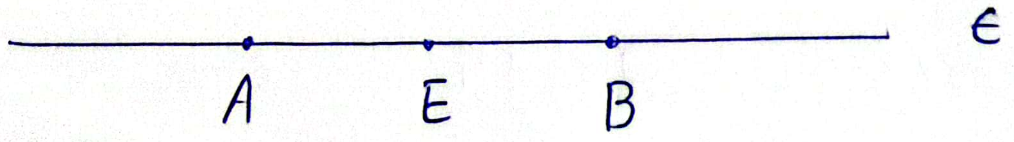
## ▸ Μήκος, Απόσταση

Ακολουθούν τα αξιώματα.

(I) Για κάθε ζεύγος σημείων $A$ και $B$ ορίζεται ένας πραγματικός αριθμός $|AB| \geq 0$ που ονομάζεται απόσταση των σημείων $A$ και $B$ και ικανοποιεί τις ιδιότητες

- $|AB| = |BA|$
- $|AB| = 0 \iff A = B$

(II) Για κάθε τριάδα διαφορετικών σημείων $A$, $B$ και $E$ της ίδιας ευθείας, ένα εκ των τριών είναι μεταξύ των άλλων δύο.




Αν το $E$ είναι μεταξύ των $A$ και $B$

τότε: $|AB| = |AE| + |EB|$

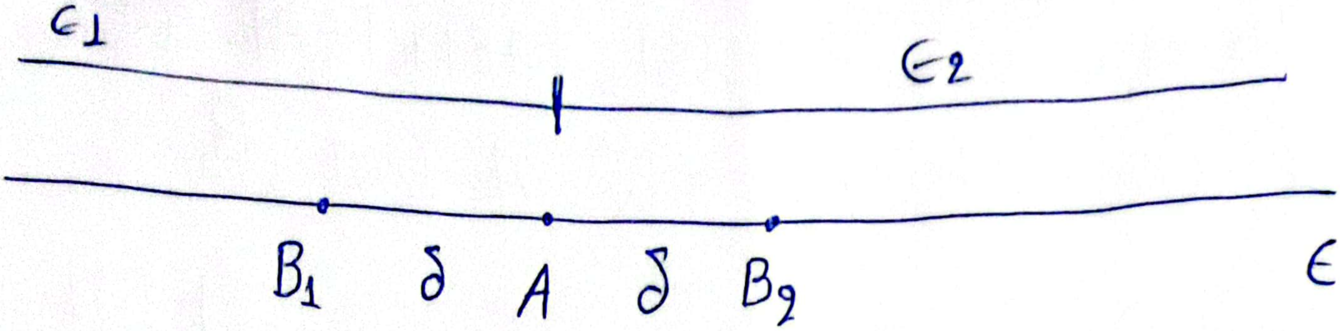
Αντίστροφα, αν $|AB| = |AE| + |EB|$ τότε το $E$ είναι μεταξύ των $A$ και $B$.

Παρένθεση: Αν $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ και $|\vec{x}|, |\vec{y}|$ είναι τα μήκη των διανυσμάτων $\vec{x}$ και $\vec{y}$ τότε γνωρίζουμε: $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$.

Πότε ισχύει η ισότητα;

(III) Ένα σημείο $A$ μιας ευθείας $\epsilon$ χωρίζει την ευθεία σε δύο μέρη $\epsilon_1$ και $\epsilon_2$ που έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $A$ και λέγονται ημιευθείες με αρχή το $A$.

Για κάθε θετικό αριθμό $\delta$ υπάρχει ένα ακριβώς σημείο $B_1$ της $\epsilon_1$ με $|B_1A| = \delta$ και ένα ακριβώς σημείο $B_2$ της $\epsilon_2$ με $|B_2A| = \delta$. Το $A$ είναι το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος $B_1B_2$.




Οι $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ λέγονται **αντικείμενες ημιευθείες.**

• Παράλληλες ονομάζουμε δύο ημιευθείες που περιέχονται σε παράλληλες ευθείες.

**Ορισμός** : **Μήκος** ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ ονομάζουμε την απόσταση $|AB|$ των άκρων του. Λέμε ότι δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ της ίδιας ευθείας ή διαφορετικών ευθειών είναι **ίσα**, όταν έχουν το ίδιο μήκος

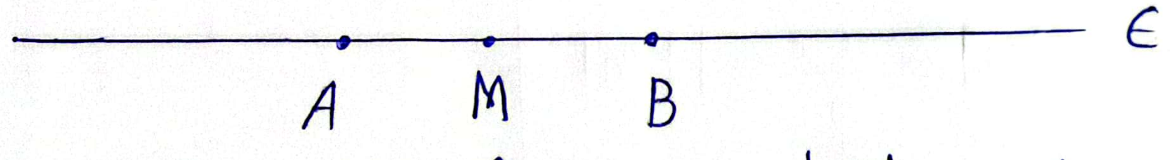
**Σχόλιο**: Το Αξίωμα (ΙΙΙ) σημαίνει ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε ευθύγραμμο τμήμα οποιουδήποτε μήκους θέλουμε.

Βάσει του (ΙΙΙ) μπορούμε να αποδείξουμε ότι:

**Λήμμα** (Ύπαρξη Μέσου Ευθυγράμμου Τμήματος)

Έστω $AB$ $(A \neq B)$ ένα ευθύγραμμο τμήμα. Υπάρχει εσωτερικό σημείο $M$ του $AB$ ώστε $|AM| = |MB|$.

**Απόδειξη**: Έστω $\epsilon$ η ευθεία που ορίζουν τα $A$ και $B$.




Για τον θετικό αριθμό $\delta = \dfrac{|AB|}{2}$ υπάρχει σημείο της ημιευθείας $(\epsilon_1)$ που ορίζει το $B$, έστω $M$, με $|BM| = \delta = \dfrac{|AB|}{2}$.

Το $M$ είναι μοναδικό με αυτή την ιδιότητα.

Επειδή $M \neq A$ (αλλιώς $|BM| = |BA| = \frac{|AB|}{2}$, άτοπο)

προκύπτει ότι το $M$ είναι εκατέρωθεν του $A$. Αν το $M$ ήταν στο εξωτερικό του $AB$ (δηλαδή αριστερά από το $A$) τότε:

$A$: μεταξύ $M$ και $B$, άρα από Αξίωμα

(I) έχουμε: $|BM| = |BA| + |AM|$, δηλαδή:

$$\frac{\delta}{2} = \delta + |AM|, \text{ άτοπο.}$$

Επομένως, $M$: μεταξύ $A$ και $B$ και:

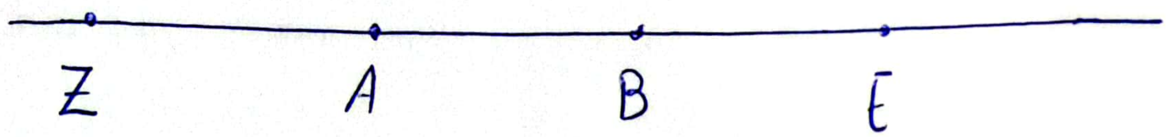
$$|AB| = |AM| + |MB| \Rightarrow \delta = |AM| + \frac{\delta}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{|AM| = \frac{\delta}{2} = |BM|}$$

**Άσκηση:** (Διπλασιασμός ευθύγραμμου τμήματος)

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Δείξτε ότι στην ευθεία ΑΒ υπάρχουν δύο σημεία Ε και Ζ ώστε Β: μέσον του ΑΕ και Α: μέσον του ΖΒ.

**Λύση:**



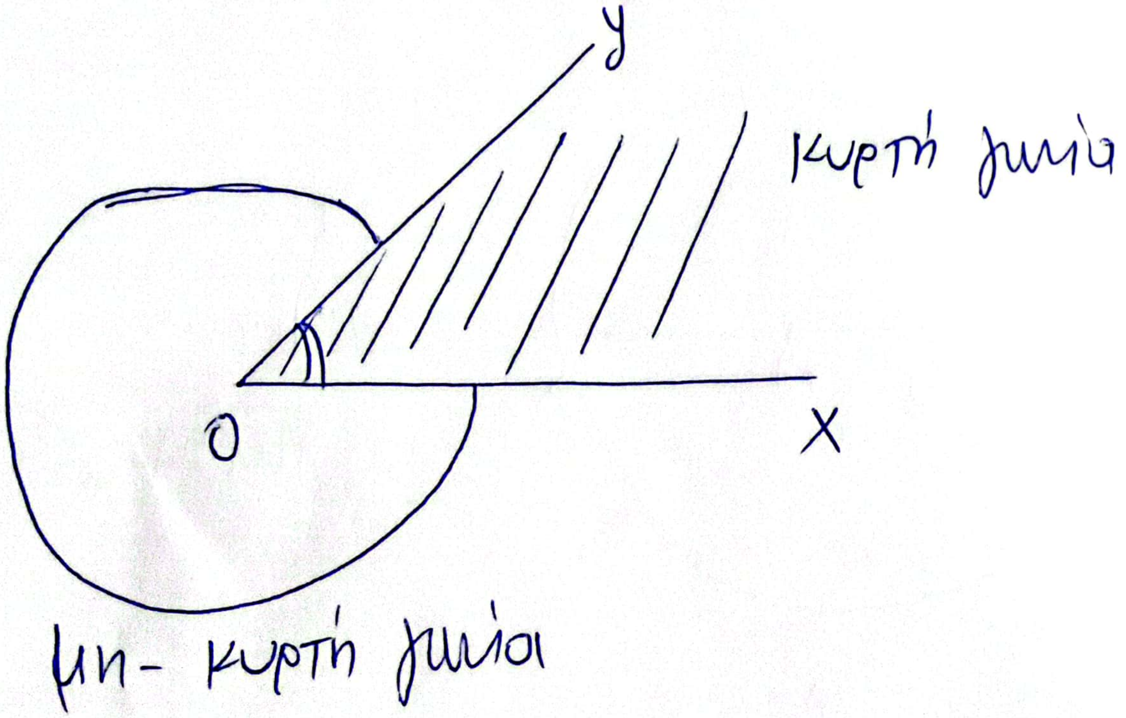

(i) Έστω σημείο Ε επί της ημιευθείας με αρχή το Β, που δεν περιέχει το Α, και μήκους $|BE| = |AB|$

(ii) Έστω σημείο Ζ επί της ημιευθείας με αρχή το Α, που δεν περιέχει το Β, με μήκος $|ZA| = |AB|$.

∎

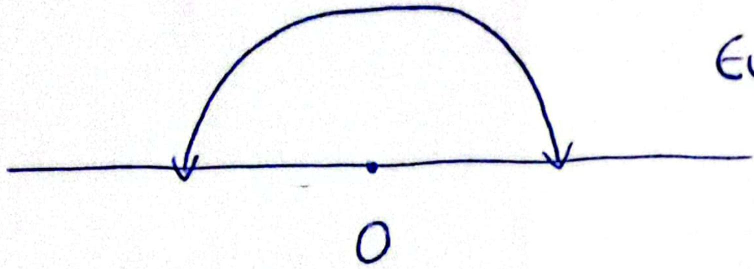
# Γωνίες

- Δύο ημιευθείες Οx και Οy με κοινό άκρο Ο και μη-περιεχόμενες στην ίδια ευθεία, χωρίζουν το επίπεδο σε δύο μέρη και ορίζουν μια κυρτή γωνία (ή απλά γωνία) και μια μη-κυρτή γωνία

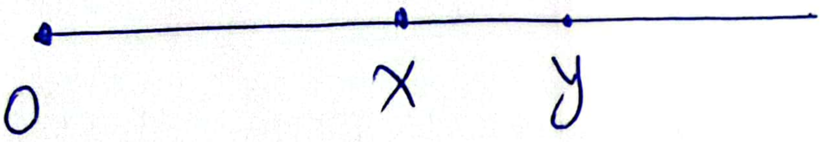



Ο: κορυφή της γωνίας.

Οx, Οy: πλευρές της γωνίας.

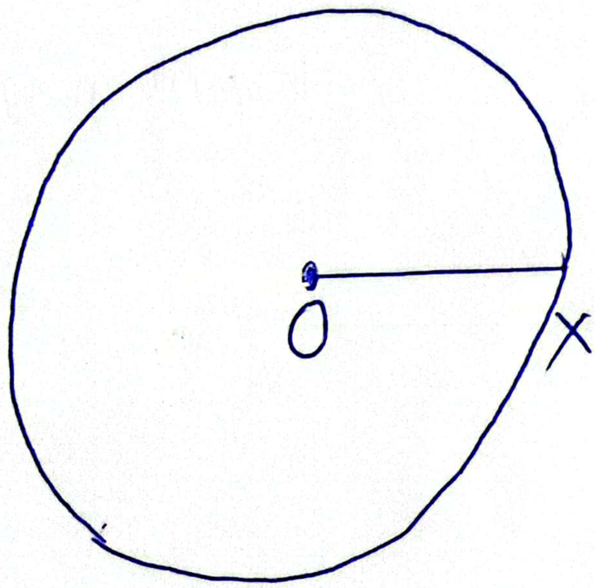
- 


ευθεία γωνία

- 


μηδενική γωνία

δεν έχει εσωτερικό

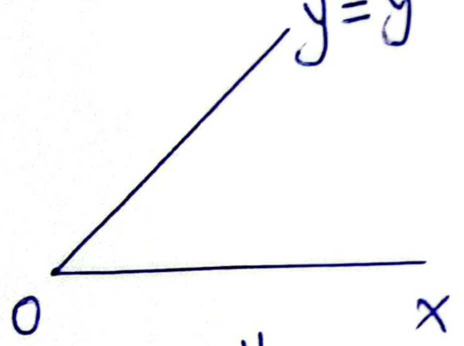
- 


πλήρης γωνία

εσωτερικό: Ox

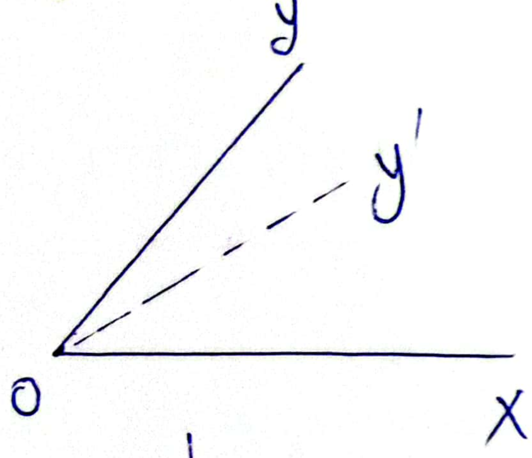
• **Σύγκριση γωνιών:** Θεωρούμε δύο γωνίες $x\hat{O}y$ και $x\hat{O}y'$ με κοινή αρχή O, κοινή πλευρά Ox και Oy, Oy' προς το ίδιο ημιεπίπεδο ως προς το φορέα της Ox

**1η περίπτωση:**



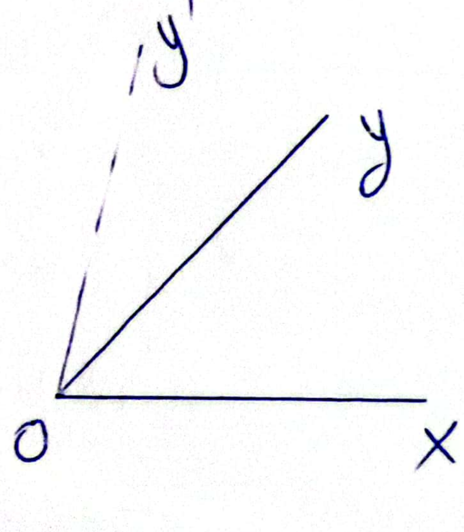

$x\hat{O}y = x\hat{O}y'$

**2η περίπτωση:**



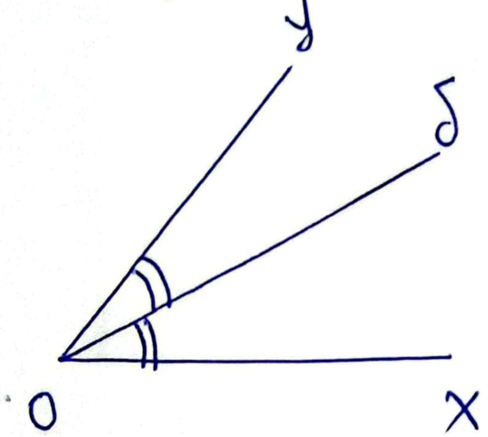

$x\hat{O}y' < x\hat{O}y$

**3η περίπτωση:**

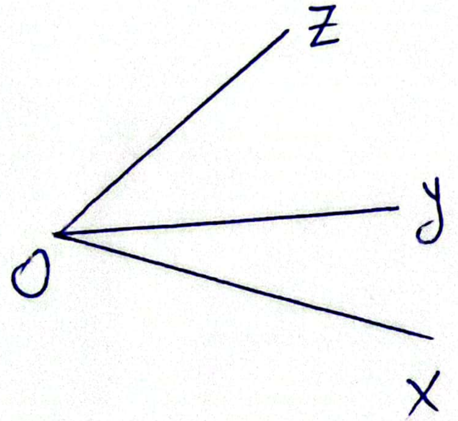



$x\hat{O}y' > x\hat{O}y$

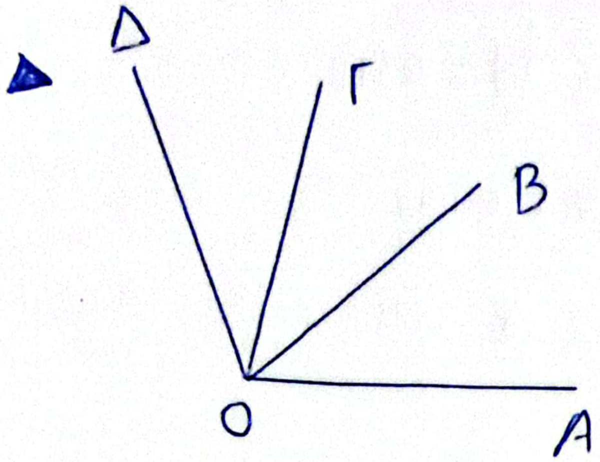
**Ορισμός**: **Διχοτόμος** μιας γωνίας $x\hat{O}y$ λέγεται η ημιευθεία $O\delta$ που βρίσκεται στο εσωτερικό της $x\hat{O}y$ και τέτοια ώστε $x\hat{O}\delta = \delta\hat{O}y$




## Πράξεις μεταξύ γωνιών




- $x\hat{O}y$, $y\hat{O}z$: εφεξής κοινή κορυφή, κοινή πλευρά και οι μη κοινές πλευρές εκατέρωθεν της κοινής.



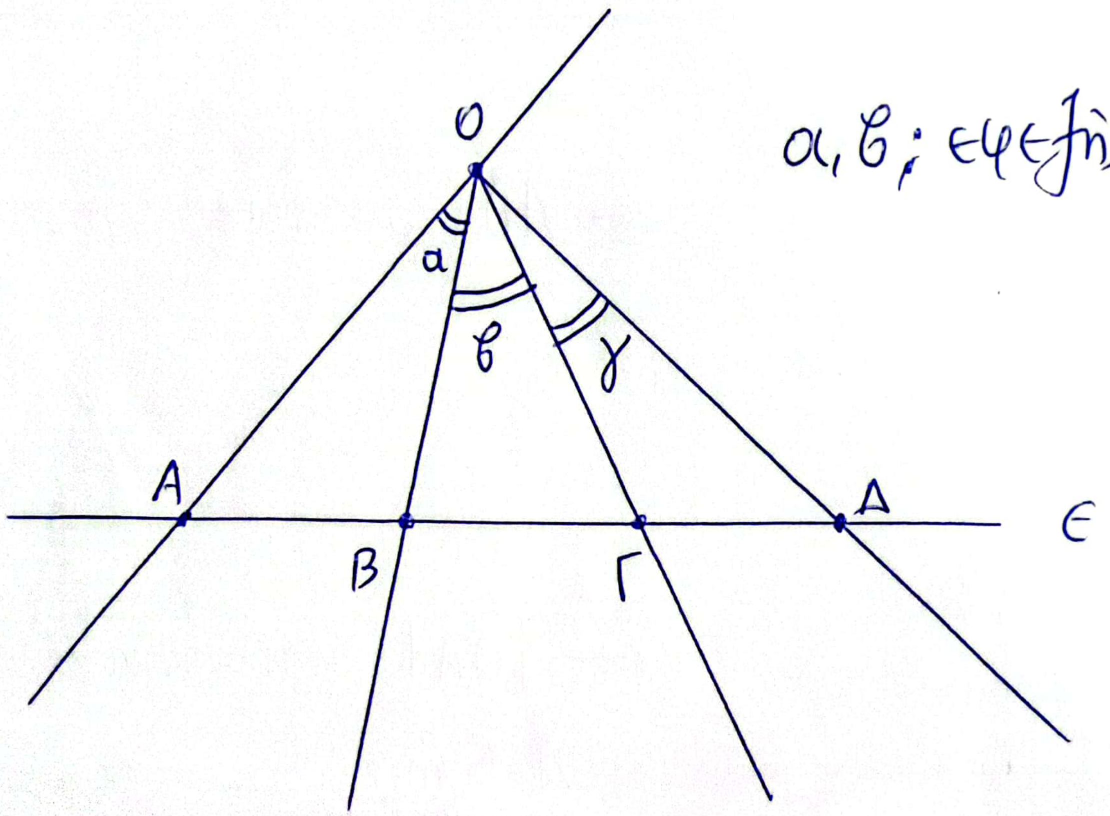

$A\hat{O}B$ : εφεξής με $B\hat{O}\Gamma$

$B\hat{O}\Gamma$ : εφεξής με $\Gamma\hat{O}\Delta$

$A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$, $\Gamma\hat{O}\Delta$ λέγονται <u>διαδοχικές</u>.

<u>Σχήμα</u>: Αντιστοίχιση ευθυγράμμων τμημάτων-γωνιών

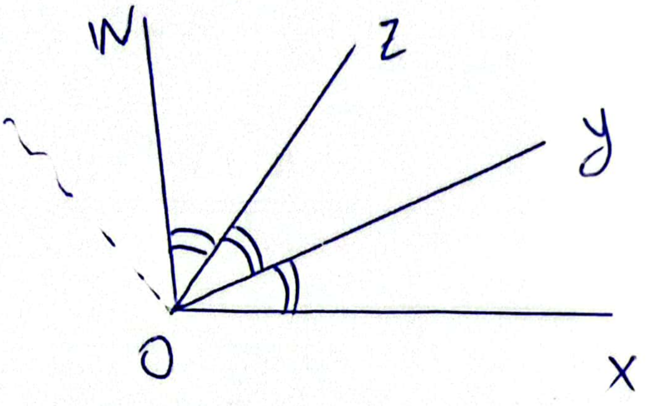
α, β: εφεξής



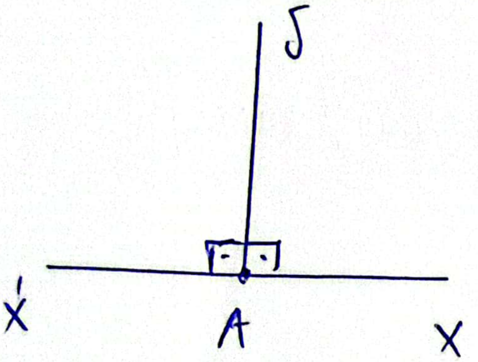

$$|A\Gamma| = |AB| + |B\Gamma| \rightsquigarrow \alpha \text{ "+" } \beta := \alpha + \beta = A\hat{O}\Gamma$$

$(A\hat{O}B + B\hat{O}\Gamma)$

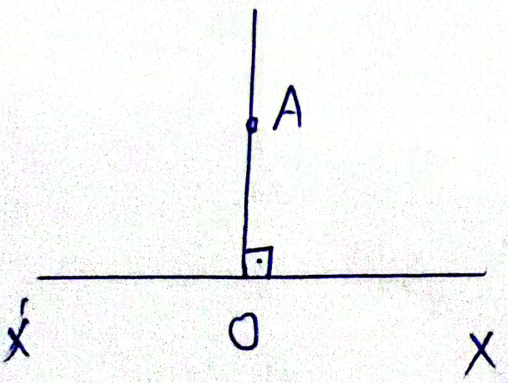
• **Γινόμενο** της γωνίας $x\hat{O}y$ επί ενός φυσικού αριθμού ν ονομάζεται το άθροισμα ν διαδοχικών γωνιών ίσων με την $x\hat{O}y$.




• **Ευθεία κάθετη από σημείο σε ευθεία**



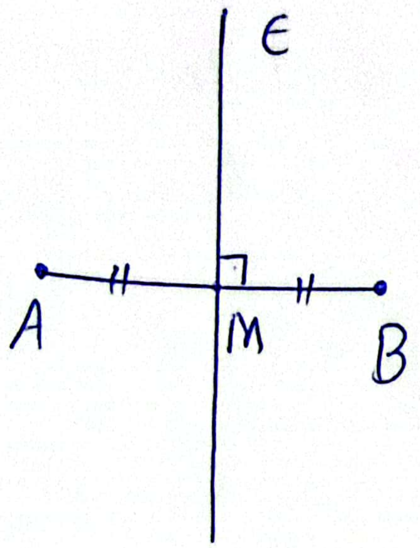

← Αδ: διχοτόμος της x'x.




← |OA|: απόσταση του A από την x'x.

**Σχόλιο**: Από σημείο A εκτός ευθείας ε άγεται μια ακριβώς κάθετος σε αυτήν.

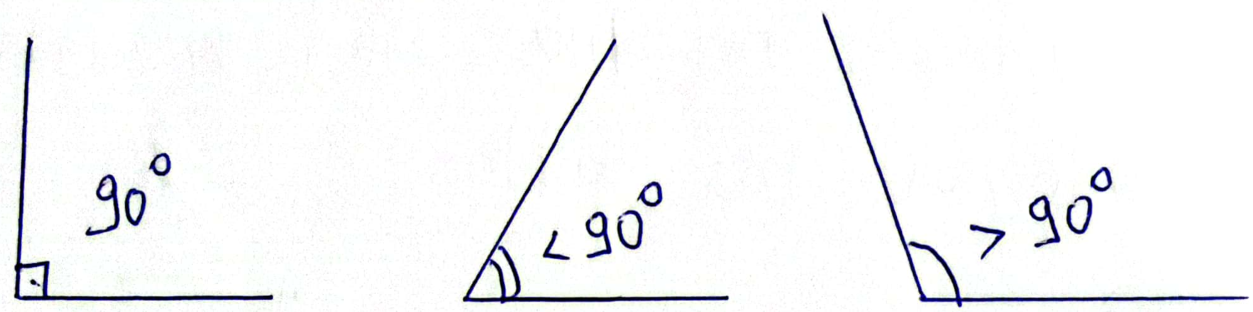
## • <u>Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος</u>




Η ευθεία ε που είναι κάθετη στο ευθ. τμήμα AB και διέρχεται από το μέσο M του AB λέγεται <u>μεσοκάθετος του AB</u>.

Τα A, B λέγονται συμμετρικά ως προς την ε και η ε: άξονας συμμετρίας.

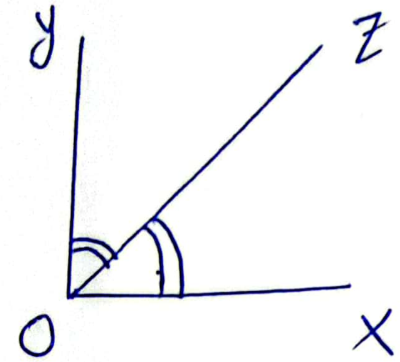
## • <u>Είδη γωνιών</u>




Ορθή γωνία     Οξεία γωνία     Αμβλεία γωνία

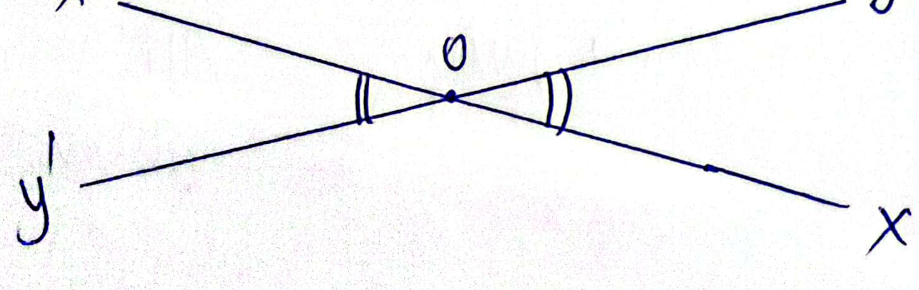
**Ορισμοί:** Δύο γωνίες καλούνται

(1) **συμπληρωματικές**, αν έχουν άθροισμα μια ορθή γωνία




(2) **παραπληρωματικές**, αν έχουν άθροισμα μια ευθεία γωνία

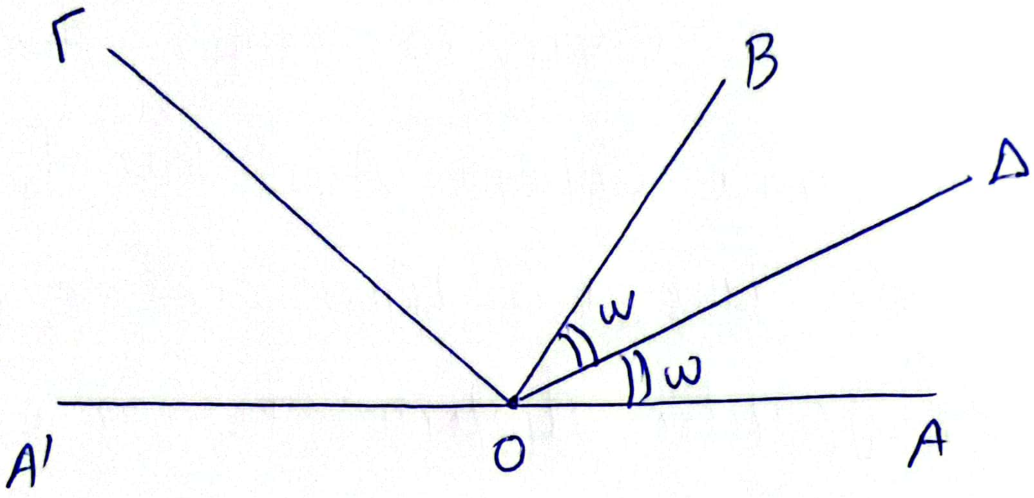
(3) **κατακορυφήν**, αν έχουν κοινή κορυφή και οι πλευρές της μιας είναι προεκτάσεις των πλευρών της άλλης.



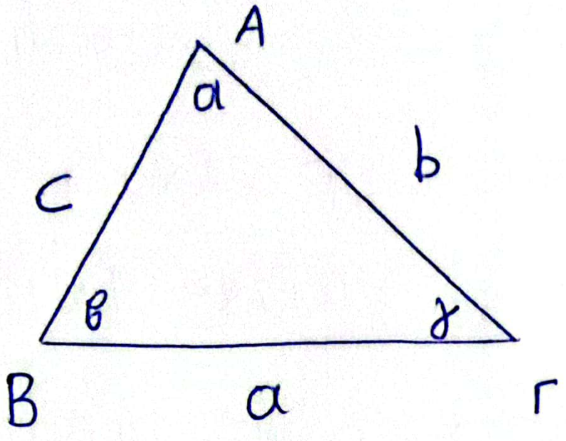

(*): $x'\hat{O}y' = x\hat{O}y$.

**H/W**: Θεωρούμε κυρτή γωνία ΑΟΒ, την διχοτόμο της ΟΔ, την αντικείμενη ημιευθεία ΟΑ' της ΟΑ και ΟΓ τυχαία ημιευθεία στο εσωτερικό της γωνίας $A'\hat{O}B$.

Να δείξετε: $\Gamma\hat{O}A + \Gamma\hat{O}B = 2\Gamma\hat{O}\Delta$



# Τρίγωνα




**Ορισμός**: **Τρίγωνο** είναι το σχήμα που ορίζεται από τρία σημεία Α, Β και Γ, μη περιεχόμενα σε μια και μόνο ευθεία, καθώς και τα ευθύγραμμα τμήματα που τα ενώνουν.

Α, Β, Γ: κορυφές του τριγώνου

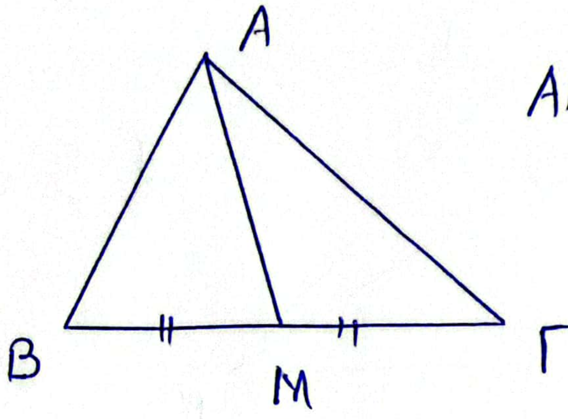
ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ: πλευρές του τριγώνου

$B\hat{A}\Gamma$, $A\hat{B}\Gamma$, $A\hat{\Gamma}B$: γωνίες του τριγώνου

Το άθροισμα $P = a+b+c$ λέγεται **περίμετρος του τριγώνου**.

# Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου

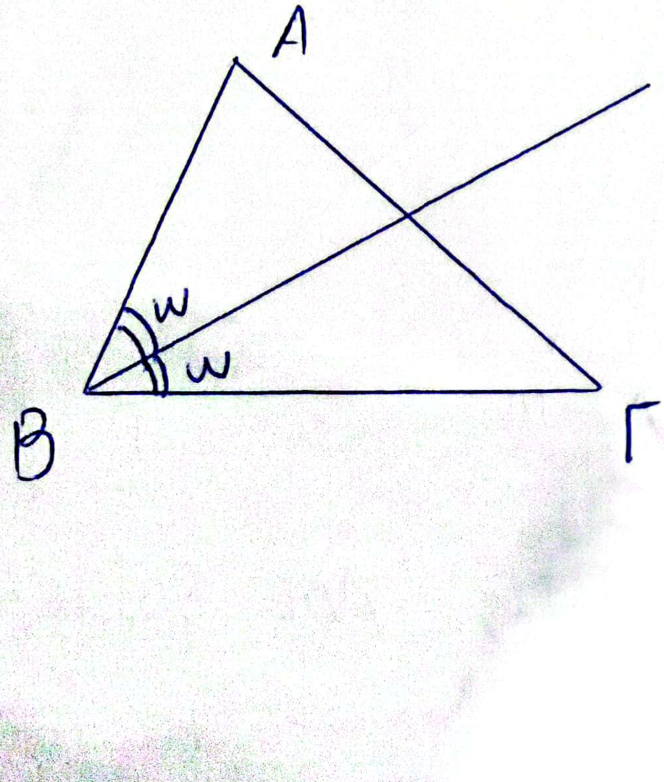
(1) **Διάμεσος** του τριγώνου καλείται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή με με το μέσο της απέναντι πλευράς.




ΑΜ: διάμεσος από την κορυφή Α

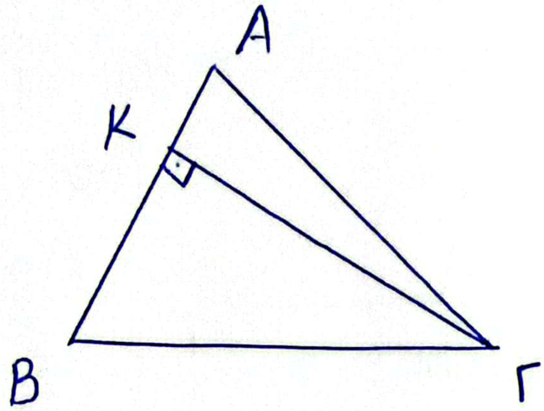
(3 διάμεσοι)

(2) **Διχοτόμος** του τριγώνου καλείται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή με την απέναντι πλευρά του και χωρίζει τη γωνία της κορυφής σε δύο ίσες γωνίες

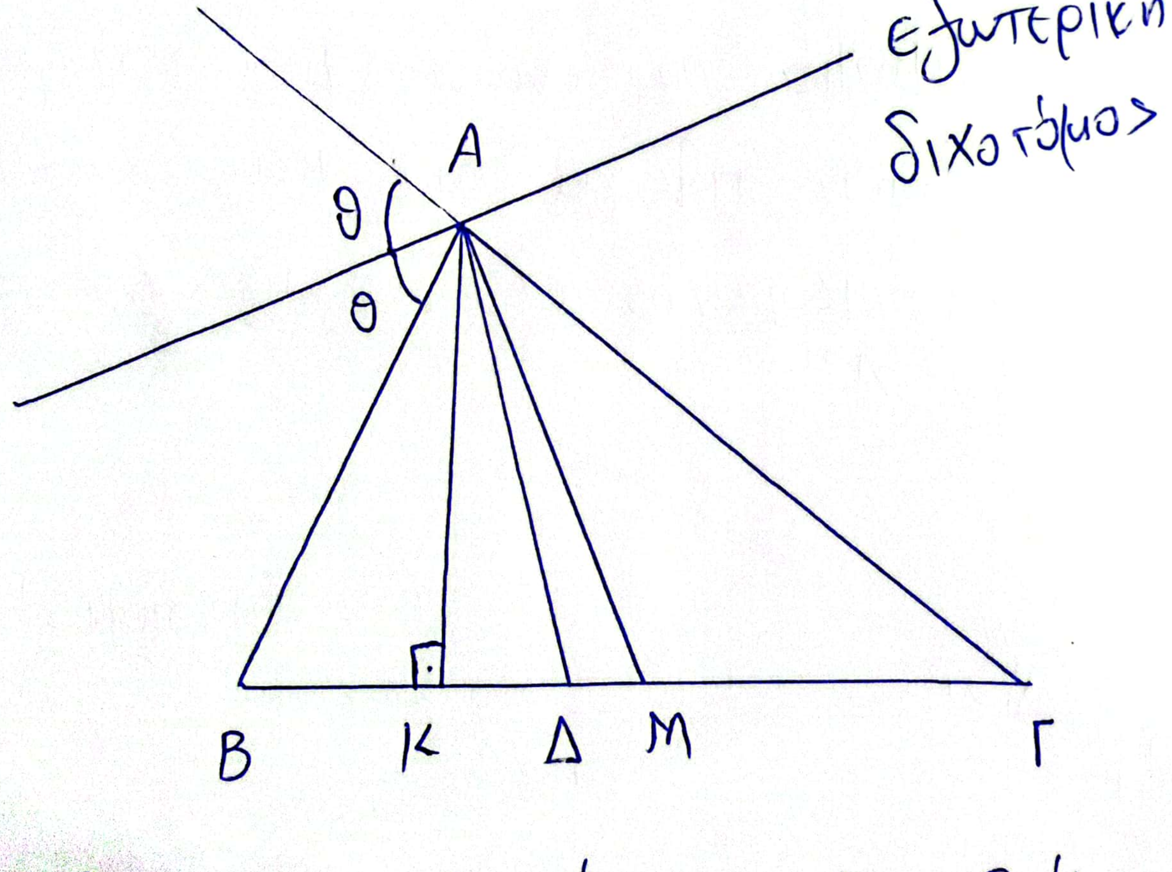



(3 διχοτόμοι)

(3) <u>Ύψος</u> του τριγώνου καλείται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή του τριγώνου με ένα σημείο της απέναντι πλευράς της και είναι κάθετο στην πλευρά αυτή.



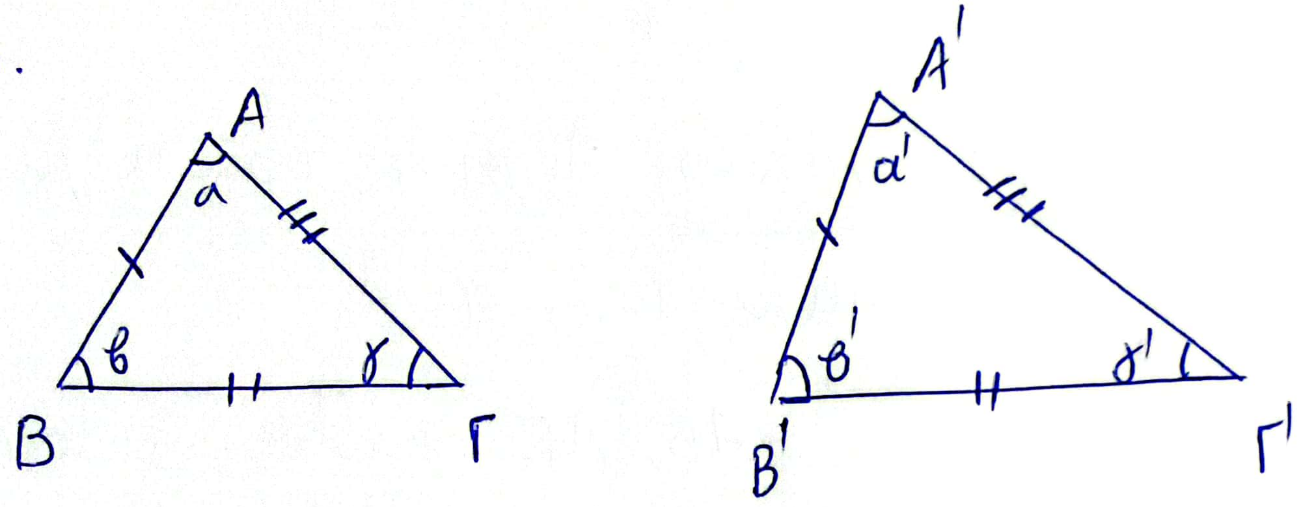

(3 ύψη)




AK: ύψος, AΔ: διχοτόμος, AM: διάμεσος

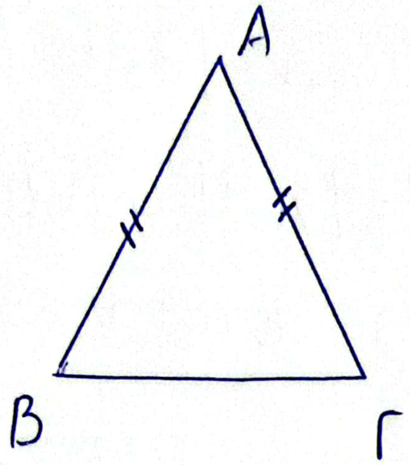
# Ισότητα Τριγώνων

Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ που έχουν αντίστοιχες πλευρές ίσες, $|AB| = |A'B'|$, $|B\Gamma| = |B'\Gamma'|$ και $|A\Gamma| = |A'\Gamma'|$ είναι ίσα. Δηλαδή έχουν και τις αντίστοιχες γωνίες ίσες.




- $AB = A'B' \Rightarrow \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$ $(\gamma = \gamma')$
- $B\Gamma = B'\Gamma' \Rightarrow \hat{A} = A'$ $(\alpha = \alpha')$
- $A\Gamma = A'\Gamma' \Rightarrow \hat{B} = \hat{B}'$ $(\beta = \beta')$

**Ορισμοί**: (1) **Ισοσκελές** λέγεται το τρίγωνο που έχει δύο πλευρές ίσες.

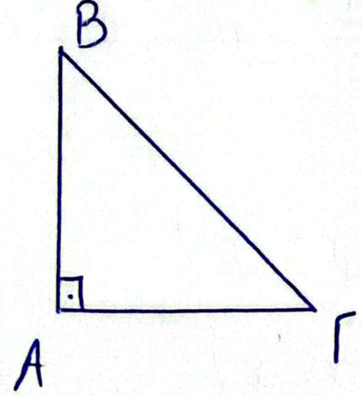


ΑΒ, ΑΓ: σκέλη

ΒΓ: βάση του τριγώνου

Α: κορυφή ισοσκελούς

(2) **Ορθογώνιο τρίγωνο** λέγεται το τρίγωνο που έχει μια γωνία του ορθή.



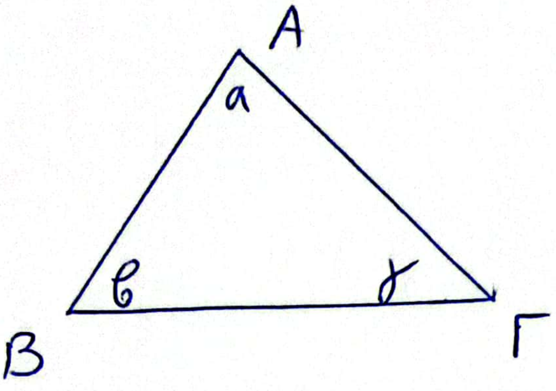
ΑΒ, ΑΓ: κάθετες πλευρές

ΒΓ: υποτείνουσα

(3) **Ισόπλευρο** λέγεται το τρίγωνο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες.

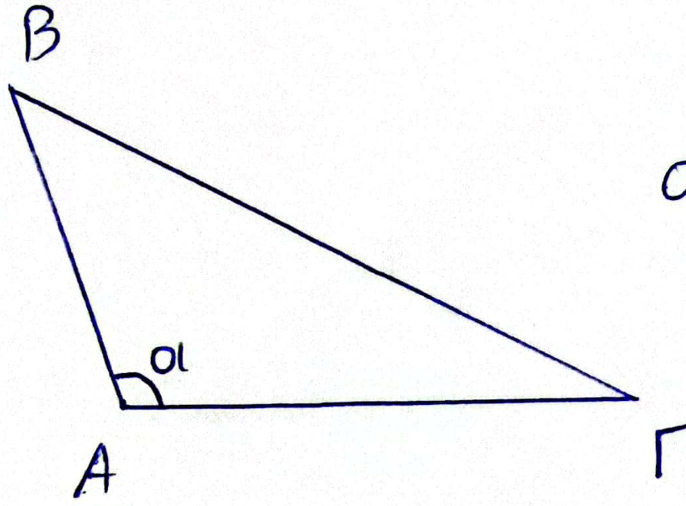
(*) Ισόπλευρο $\Rightarrow$ Ισοσκελές.

(4) Οξυγώνιο λέγεται το τρίγωνο που έχει όλες τις γωνίες του οξείες.




α, β, γ: οξείες

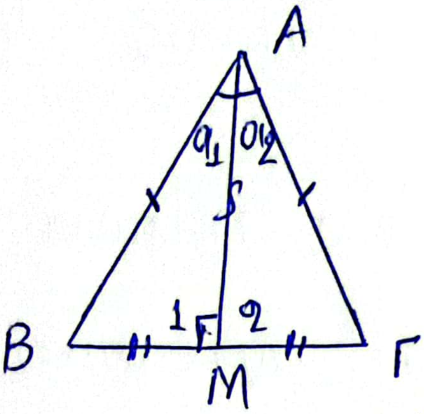
(5) Αμβλυγώνιο λέγεται το τρίγωνο που έχει μια γωνία του αμβλεία.




α: αμβλεία

**Πρόταση**: Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο, οι παρά τη βάση γωνίες είναι ίσες.

**Απόδειξη**: Έστω ισοσκελές τρίγωνο $A\hat{B}\Gamma$ με $|AB|=|A\Gamma|$




και θα αποδείξουμε $\beta=\gamma$. Φέρουμε την ΑΜ, όπου Μ: μέσο της ΒΓ. Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΜΓ έχουν τις αντίστοιχες πλευρές τους ίσες, οπότε είναι ίσα και άρα $\beta=\gamma$ ως γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές. Επιπλέον $\alpha_1=\alpha_2$, οπότε ΑΜ: διχοτομεί την $\alpha$ και τέλος:

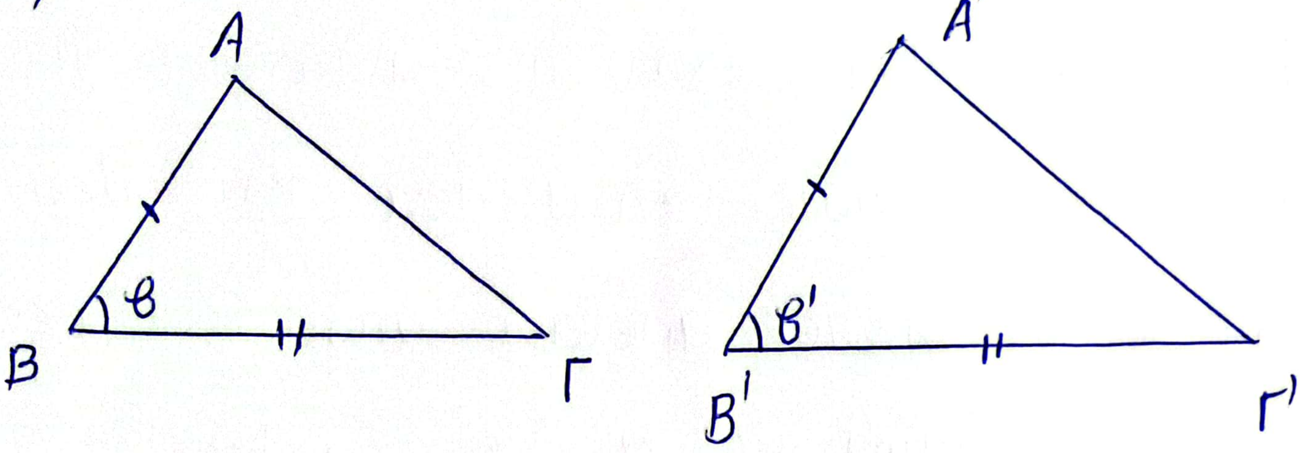
$\hat{M}_1=\hat{M}_2$, $\hat{M}_1, \hat{M}_2$: παραπληρωματικές,

οπότε: $AM \perp B\Gamma$.

**Πόρισμα** : (H/W) Οι γωνίες ενός ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες.

## • Κριτήρια Ισότητας Τριγώνων

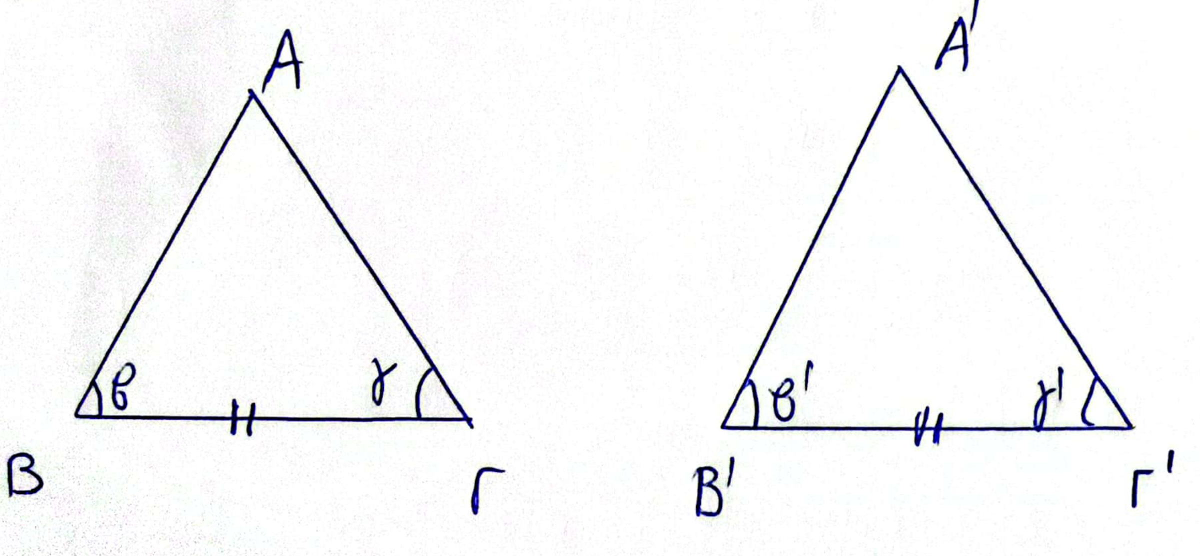
$\boxed{\Pi - \Gamma - \Pi}$ : Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' που έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.




**Απόδειξη**: Λόγω της υπόθεσης $B = B'$ μπορούμε να τοποθετήσουμε την $B'$ στη $B$ ώστε να συμπέσουν οι ΑΒ με Α'Β' και η ΒΓ με την Β'Γ' λόγω ισότητας $|AB| = |A'B'|$ θα συμπέσουν τα σημεία B και B' και για τον ίδιο λόγο θα συμπέσουν τα σημεία Γ και Γ', άρα $|B\Gamma| = |B'\Gamma'|$.

Επομένως, τα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι ίσα.

$\boxed{\Gamma - \Pi - \Gamma}$ : Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' που έχουν δύο αντίστοιχες γωνίες ίσες και τις περιεχόμενες σε αυτές πλευρές επίσης ίσες, είναι ίσα.




H/W: Να κάνετε την απόδειξη.