Ασκήσεις Άλγεβρας I - Φυλλάδιο Γ

Άσκηση Γ1. Να δείξετε ότι το σύνολο $S = \left\{a + b\sqrt[3]{2} \in \mathbb{R} \mid a,\, b \in \mathbb{Z}\right\}$ δεν είναι υποδακτύλιος του δακτυλίου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Άσκηση Γ2. Έστω R και S δύο δακτύλιοι με μονάδες 1_R και 1_S, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $U(R \times S) = U(R) \times U(S)$. Στη συνέχεια να προσδιορίσετε τα αντιστρέψιμα στοιχεία του δακτυλίου $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3$.

Άσκηση Γ3. Έστω R ένας δακτύλιος με μονάδα 1_R ο οποίος δεν έχει διαιρέτες του μηδενός. Αν $a,\, b \in R$ είναι τέτοια ώστε $ab = 1_R$ τότε ισχύει και $ba = 1_R$.

Άσκηση Γ4.

(i) Έστω $f\colon R \to S$ ένας μορφισμός δακτυλίων. Αν ο R είναι ακέραια περιοχή έπεται απαραίτητα ότι και ο S είναι ακέραια περιοχή;

(ii) Έστω $f\colon R \to S$ ισομορφισμός δακτυλίων. Να δείξετε ότι αν ο R είναι περιοχή τότε είναι και ο S περιοχή.

Άσκηση Γ5. Να βρείτε δακτύλιο R και υποδακτύλιο S του R ώστε ο S να είναι σώμα αλλά ο R να μην είναι σώμα.

Άσκηση Γ6. Ποιοι από τους επόμενους δακτυλίους είναι σώματα;
$(i)\, \mathbb{Z}[i]$ $\quad (ii)\, \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ $\quad (iii)\, \mathbb{Z}_{13}$.

Άσκηση Γ7.

(i) Να προσδιοριστούν όλοι οι μορφισμοί δακτυλίων από το $\mathbb{Z}$ στο $\mathbb{Z}$.

(ii) Υπάρχει μορφισμός δακτυλίων $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ με $\mathrm{Ker(f)} = \mathbb{Z}$;

(iii) Έστω p πρώτος φυσικός αριθμός με $p \geq 5$. Να προσδιορισθούν όλοι οι μορφισμοί δακτυλίων από τον $\mathbb{Z}_p$ στον $\mathbb{Z}_3$.

Άσκηση Γ8. Να δοθεί παράδειγμα δακτυλίου R με διαιρέτες του μηδενός ο οποίος περιέχει ένα ιδεώδες I έτσι ώστε ο δακτύλιος πηλίκο R/I να μην έχει διαιρέτες του μηδενός.

Άσκηση Γ9. (2ο Θεώρημα Ισομορφισμών Δακτυλίων) Έστω I, J δύο ιδεώδη ενός δακτυλίου R με μονάδα 1_R. Να δείξετε ότι

(i) το J είναι ιδεώδες του $I + J$,

(ii) το $I \cap J$ είναι ιδεώδες του I και ότι υπάρχει ισομορφισμός δακτυλίων

$$I/I \cap J \cong I + J/J.$$

Άσκηση Γ10. (3ο Θεώρημα Ισομορφισμών Δακτυλίων) Έστω I και J δύο ιδεώδη ενός δακτυλίου R με μονάδα 1_R τέτοια ώστε $I \subseteq J$. Να δείξετε ότι το $J/I = \{x + I \in R/I \mid x \in J\}$ είναι ιδεώδες του R/I και υπάρχει ισομορφισμός δακτυλίων

$$(R/I)/(J/I) \cong R/J.$$