Δακτύλιοι Πηλίκα

Έστω $R=(R,+,\cdot)$ ένας προσεταιριστικός δακτύλιος με μονάδα 1_R και έστω I μια υποομάδα της προσθετικής ομάδας $(R,+)$.

Εφ' όσον η $(R,+)$ είναι αβελιανή ομάδα προκύπτει $I \trianglelefteq (R,+)$.

$\uparrow$

κανονική υποομάδα

και αβελιανή

Έτσι, η ορίζεται η προσθετική ομάδα πηλίκο $(R/I,+)$, όπου $R/I=\{r+I\subseteq R \mid r\in R\}$,

· $\forall r\in R$, $r+I := \{r+x\in R \mid x\in I\}$

· $\forall r,s\in R$, $r+I=s+I \iff r-s\in I$

· Η πρόσθεση στο R/I ορίζεται ως:

$+: R/I\times R/I \to R/I$, $(r+I)+(s+I) := (r+s)+I$

· Το μηδενικό στοιχείο της $(R/I,+)$ είναι

Το $0_R + I = I$ και για κάθε $r+I \in R/I$ ο αντίθετός του είναι ο $-(r+I) = (-r)+I$.

Ωστόσο ο R έχει και την πράξη του πολ/μού. Είναι λοιπόν εύλογη η απορία αν το R/I μπορεί να εφοδιαστεί επιπλέον με τη "φυσικά" επαγόμενη πράξη πολλαπλασιασμού

$$\cdot : R/I \times R/I \to R/I, \quad (r+I)\cdot(s+I) := rs+I$$

<u>Λήμμα</u>: Η πράξη $\cdot$ είναι καλά ορισμένη επί του R/I αν και μόνο αν το I είναι ιδεώδες του R.

<u>Απόδειξη</u>: "$\Rightarrow$" Υποθέτουμε ότι η πράξη $\cdot$ είναι καλά ορισμένη επί του R/I και θα δείξουμε ότι I: ιδεώδες του R. Επειδή $I \leq (R,+)$ αρκεί να δείξουμε:

$$rx, xr \in I, \quad \forall r \in R, \ \forall x \in I.$$

• Έστω λοιπόν $r \in R$ και $x \in I$. Επειδή $x+I = I = 0_R + I$ (διότι $x - 0_R = x \in I$) έχουμε:

$$(r+I, x+I) = (r+I, 0_R+I) \in R/I \xRightarrow[\text{επί του } R/I]{\cdot \text{ καλά ορισμένη}}$$

$$\cdot(r+I, x+I) = \cdot(r+I, 0_R+I) \Rightarrow (r+I)\cdot(x+I) = (r+I)\cdot(0_R+I)$$

$$\Longrightarrow rx + I = 0_R + I \Rightarrow rx - 0_R \in I \Rightarrow \underline{\underline{rx \in I}}.$$

Ανάλογα, αποδεικνύουμε ότι $xr \in I$ από το γεγονός ότι $(x+I, r+I) = (0_R+I, r+I) \in R/I$ και το γεγονός ότι η $\cdot$ είναι καλά ορισμένη επί του R/I. Ώστε, I: ιδεώδες του R.

"$\Longleftarrow$" Έστω τώρα I: ιδεώδες του R και θα αποδείξουμε ότι η $\cdot$ είναι καλά ορισμένη επί του R/I. Ας είναι λοιπόν

$$(r+I, s+I) = (r'+I, s'+I) \in R/I$$ και θα

δείξουμε: $\cdot(r+I, s+I) = \cdot(r'+I, s'+I)$, δηλαδή

$(r+I)\cdot(s+I) = (r'+I)\cdot(s'+I)$, δηλαδή ισοδύναμα θα δείξουμε ότι: $rs+I = r's'+I$.

Έχουμε: $(r+I, s+I) = (r'+I, s'+I) \Longrightarrow \begin{cases} r+I = r'+I \\ s+I = s'+I \end{cases}$

$\Longrightarrow r-r' \in I$ και $s-s' \in I$

- $\left.\begin{array}{l} r-r' \in I \\ s \in R \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{ιδεώδες}]{I:} (r-r')s \in I \Rightarrow rs - r's \in I$ ①

- $\left.\begin{array}{l} s-s' \in I \\ r' \in R \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{ιδεώδες}]{I:} r'(s-s') \in I \Longrightarrow r's - r's' \in I$ ②

Από ①, ② και επειδή I: ιδεώδες έχουμε

$(rs-r's)+(r's-r's') \in I \Longrightarrow rs - \cancel{r's} + \cancel{r's} - r's' \in I$

$\Longrightarrow rs - r's' \in I \Longrightarrow rs+I = r's'+I$, όπως θέλαμε.

∎

Πρόταση: Έστω $R=(R,+,\cdot)$ προσεταιριστικός δακτύλιος με μονάδα 1_R και έστω I ένα ιδεώδες του R. Τότε η τριάδα $(R/I,+,\cdot)$, όπου

$$+: R/I \times R/I \to R/I,\ (r+I)+(s+I)=(r+s)+I$$

$$\cdot: R/I \times R/I \to R/I,\ (r+I)\cdot(s+I) = rs+I$$

είναι προσεταιριστικός δακτύλιος με μηδενικό στοιχείο $0_R+I=I$ και μονάδα $1_{R/I}=1_R+I$.

Επιπλέον, αν ο R είναι μεταθετικός τότε και ο R/I είναι μεταθετικός.

Απόδειξη: Από την προηγούμενη ανάλυση, το ζεύγος $(R/I,+)$ είναι αβελιανή ομάδα με μηδενικό στοιχείο $0_{R/I}=0_R+I=I$ και

$$\forall r+I\in R/I: \ -(r+I)=(-r)+I\in R/I.$$

· Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η πράξη · του πολ/μού είναι προσεταιριστική, ότι επιμερίζει την πρόσθεση και ότι το 1_R+I είναι μονάδα του R/I.

· Έστω $r_1+I,\ r_2+I,\ r_3+I \in R/I$. Τότε:

(α) <u>προσεταιριστικότητα της ·</u>

$$(r_1+I)\cdot\big((r_2+I)\cdot(r_3+I)\big) = (r_1+I)\cdot(r_2r_3+I) =$$

$$= r_1(r_2r_3)+I = (r_1r_2)r_3+I = (r_1r_2+I)\cdot(r_3+I)$$

$$= \big((r_1+I)\cdot(r_2+I)\big)\cdot(r_3+I)$$

(β) <u>επιμεριστικές ιδιότητες</u>:

$$\big((r_1+I)+(r_2+I)\big)\cdot(r_3+I) = \big((r_1+r_2)+I\big)\cdot(r_3+I) =$$

$$(r_1+r_2)r_3+I = r_1r_3+r_2r_3+I = (r_1r_3+I)+(r_2r_3+I)$$

$$= (r_1+I)\cdot(r_3+I)+(r_2+I)\cdot(r_3+I)$$

Ανάλογα, $(r_1+I)\cdot((r_2+I)+(r_3+I)) =$

$(r_1+I)\cdot(r_2+I) + (r_1+I)\cdot(r_3+I)$.

(γ) 1_R+I : μονάδα : Πράγματι, για κάθε $r+I \in R/I$:

$(r+I)\cdot(1_R+I) = r\cdot 1_R + I = r+I$

$(1_R+I)\cdot(r+I) = 1_R\cdot r + I = r+I$

! Αν ο R είναι μεταθετικός τότε και ο R/I είναι μεταθετικός διότι:

$(r+I)\cdot(s+I) = rs+I = sr+I = (s+I)\cdot(r+I)$,

για κάθε $r+I, s+I \in R/I$. ∎

Ορισμός: Ο δακτύλιος R/I της προηγούμενης πρότασης λέγεται δακτύλιος πηλίκο του δακτυλίου R ως προς το ιδεώδες I.

Σχόλιο 1: Αν $f: R \to S$ είναι μορφισμός δακτυλίων τότε ο $Ker(f) = \{x \in R \mid f(x) = 0_S\}$ είναι ιδεώδες του R.

Σχόλιο 2: Έστω R δακτύλιος με μονάδα και I: ιδεώδες του R. Τότε ορίζεται ο δακτύλιος πηλίκο R/I. Θεωρούμε την απεικόνιση $\pi: R \longrightarrow R/I$, $\pi(r) = r + I$

▶ **π: μορφισμός δακτυλίων**: Για κάθε $r, s \in R$:

(i) $\pi(r+s) = (r+s)+I = (r+I)+(s+I) = \pi(r)+\pi(s)$

(ii) $\pi(rs) = (rs)+I = (r+I)\cdot(s+I) = \pi(r)\cdot\pi(s)$

(iii) $\pi(1_R) = 1_R + I = 1_{R/I}$

▶ **π: επί του R/I**: Έστω $y \in R/I$. Τότε $y = r + I$ για κάποιο $r \in R$ και συνεπώς:

$$\pi(r) = r + I = y.$$

▶ $Ker(\pi) = \{ r \in R \mid \pi(r) = 0_{R/I} \}$

$= \{ r \in R \mid r + I = I \}$

$= \{ r \in R \mid r \in I \} = I.$

<u>Εφαρμογή</u>: Έστω R ένας προσεταιριστικός δακτύλιος με μονάδα 1_R. Τότε ο R έχει πάντα ως ιδεώδη τα $\{0_R\}$ και R.

• <u>$R/\{0_R\}$</u>: Όπως και πριν ορίζεται ο επιμορφισμός δακτυλίων

$$\pi_0 : R \longrightarrow R/\{0_R\}, \quad \pi_0(r) = r + \{0_R\}$$

και εφ' όσον $Ker(\pi_0) = \{0_R\}$, η π_0 είναι και μονομορφισμός, δηλαδή 1-1 (γνωστή πρόταση της Θεωρίας, οπότε <u>π_0: ισομορφισμός</u>

Άρα, $R \cong R/\{0_R\}$

• R/R: $R/R = \{ r+R \subseteq R \mid r \in R \}$.

Όμως, $\forall r \in R$: $r+R = R$, άρα $R/R = \{R\}$

τετριμμένος δακτύλιος

1ο ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΣΟΜΟΡΦΙΣΜΩΝ ΔΑΚΤΥΛΙΩΝ

Έστω $f: R \to S$ μορφισμός δακτυλίων.
Τότε υπάρχει ισομορφισμός δακτυλίων

$$R/\ker(f) \cong \operatorname{Im}(f)$$

Απόδειξη: Επειδή $f: R \to S$ μορφισμός δακτυλίων έπεται $\operatorname{Ker}(f) = \{ x \in R \mid f(x) = 0_S \}$ είναι ιδεώδες του R και συνεπώς ορίζεται ο δακτύλιος-πηλίκο $R/\ker(f)$. Επιπλέον, ο $\operatorname{Im}(f) = \{ f(x) \in S \mid x \in R \}$ είναι υποδακτύλιος του S.

Θεωρούμε την απεικόνιση

$\tilde{f} : R/Ker(f) \to Im(f)$ με $\tilde{f}(x+Ker(f)) = f(x)$

και θα αποδείξουμε ότι $\tilde{f}$: ισομορφισμός δακτυλίων.

Ⓐ H $\tilde{f}$ είναι καλά ορισμένη : Έστω

$x+Ker(f) = y+Ker(f) \in R/Ker(f)$ και θα δείξουμε ότι: $\tilde{f}(x+Ker(f)) = \tilde{f}(y+Ker(f))$. Πράγματι:

$x+Ker(f) = y+Ker(f) \Rightarrow x-y \in Ker(f) \Rightarrow f(x-y) = 0_S$

$\xrightarrow[\text{μορφ.}]{f:} f(x)-f(y) = 0_S \Rightarrow f(x) = f(y)$

$\Rightarrow \tilde{f}(x+Ker(f)) = \tilde{f}(y+Ker(f))$.

Ⓑ H $\tilde{f}$ είναι μορφισμός δακτυλίων :

Για κάθε $x+Ker(f), y+Ker(f) \in R/Ker(f)$ έχουμε:

• $\tilde{f}((x+Ker(f))+(y+Ker(f))) = \tilde{f}((x+y)+Ker(f)) =$

$f(x+y) \xrightarrow[\text{μορφ.}]{f:} f(x)+f(y) = \tilde{f}(x+Ker(f))+\tilde{f}(y+Ker(f))$

• $\tilde{f}\big((x+Ker(f))\cdot(y+Ker(f))\big) = \tilde{f}(xy+Ker(f)) =$

$= f(xy) \underset{\mu o \rho \varphi.}{\overset{f:}{=\!=}} f(x)f(y) = \tilde{f}(x+Ker(f))\,\tilde{f}(y+Ker(f))$

• Επειδή $f: R \to S$ μορφισμός έχουμε $1_S = f(1_R)$,

άρα $1_S \in Im(f) \Longrightarrow 1_{Im(f)} = 1_S$.

Έτσι, $\tilde{f}(1_{R/Ker(f)}) = \tilde{f}(1_R + Ker(f)) = f(1_R) = 1_S = 1_{Im(f)}$

(Γ) <u>Η $\tilde{f}$ είναι επιμορφισμός δακτυλίων</u> :

Έστω $s \in Im(f)$. Τότε $s = f(x)$ για κάποιο $x \in R$.

Έτσι, $x+Ker(f) \in R/Ker(f)$ και :

$\tilde{f}(x+Ker(f)) = f(x) = s$

(Δ) <u>Η $\tilde{f}$ είναι 1-1</u> : Έστω $x+Ker(f), y+Ker(f)$

$\in R/Ker(f)$ με $\tilde{f}(x+Ker(f)) = \tilde{f}(y+Ker(f))$

και θα δείξουμε ότι $x+Ker(f) = y+Ker(f)$.

Πράγματι, $\tilde{f}(x+Ker(f)) = \tilde{f}(y+Ker(f)) \Longrightarrow$

$f(x) = f(y) \Longrightarrow f(x)-f(y) = 0_S \xrightarrow[\mu o\rho\varphi.]{f:} f(x-y) = 0_S$

$\Longrightarrow x-y \in Ker(f) \Longrightarrow x+Ker(f) = y+Ker(f)$,

όπως θέλαμε.

Από Ⓐ - Ⓓ η $\tilde{f}$ είναι ισομορφισμός

δακτυλίων και συνεπώς:

$$\boxed{R/_{Ker(f)} \cong Im(f)}$$

■

Παραδείγματα

① Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω ο επιμορφισμός

δακτυλίων $\pi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n$, $\pi(x) = [x]_n$.

$Ker(\pi) = \{x \in \mathbb{Z} \mid \pi(x) = [0]_n\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid [x]_n = [0]_n\}$

$= \{x \in \mathbb{Z} \mid n | x\} = \{nk \in \mathbb{Z} \mid k \in \mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z}$

Από 1º ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΣΟΜΟΡΦΙΣΜΩΝ ΔΑΚΤΥΛΙΩΝ,

$$\mathbb{Z}/_{\ker(\pi)} \cong Im(\varphi) \Longleftrightarrow \boxed{\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_n}$$

② Έστω R, S δύο προσεταιριστικοί δακτύλιοι με μονάδες 1_R και 1_S, αντίστοιχοι. Θεωρούμε το ευθύ γινόμενο $R \times S$ και την απεικόνιση

$$\pi_1 : R \times S \to R, \quad \pi_1(r, s) = r$$

▶ π_1: μορφισμός δακτυλίων: Για κάθε $(r_1, s_1), (r_2, s_2) \in R \times S$ ισχύει:

- $\pi_1((r_1, s_1) + (r_2, s_2)) = \pi_1(r_1 + r_2, s_1 + s_2) = r_1 + r_2 = \pi_1(r_1, s_1) + \pi_1(r_2, s_2)$

- $\pi_1((r_1, s_1)(r_2, s_2)) = \pi_1(r_1 r_2, s_1 s_2)$
$$= r_1 r_2$$
$$= \pi_1(r_1, s_1)\,\pi_1(r_2, s_2)$$

- $\pi_1(1_{R\times S}) = \pi_1(1_R, 1_S) = 1_R$

▶ <u>π_1 : επιμορφισμός</u> : Έστω $r \in R$. Τότε $(r, 0_S) \in R \times S$ και $\pi_1(r, 0_S) = r$. Άρα $Im(\pi_1) = R$

▶ $$Ker(\pi_1) = \{(r,s) \in R \times S \mid \pi_1(r,s) = 0_R\}$$
$$= \{(r,s) \in R \times S \mid r = 0_R\}$$
$$= \{(0_R, s) \in R \times S \mid s \in R\} = \{0_R\} \times S$$

Από 1ο Θεώρημα Ισομορφισμών Δακτυλίων:

$$R \times S / Ker(\pi_1) \cong Im(\pi_1) \Longleftrightarrow \boxed{R \times S / \{0_R\} \times S \cong R}$$

Ανάλογα, δουλεύοντας με την $\pi_2 : R \times S \longrightarrow S$ με $\pi_2(r,s) = s$

βρίσκουμε: $\boxed{R \times S / R \times \{0_S\} \cong S}$

③ Έστω R: σώμα, S: δακτύλιος με μονάδα 1_S και $f: R \to S$ επιμορφισμός δακτυλίων. Τότε f: ισομορφισμός και S: σώμα.

Απόδειξη: Επειδή f: επιμορφισμός έχουμε $Im(f) = S$ και από 1º ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΣΟΜΟΡΦΙΣΜΩΝ ΔΑΚΤΥΛΙΩΝ προκύπτει: $R/_{Ker(f)} \cong S$.

Όμως ο $Ker(f)$ είναι ιδεώδες του R και επειδή R: σώμα, έπεται: $Ker(f) = \{0_R\}$ ή $Ker(f) = R$. Αν όμως $Ker(f) = R$ τότε: $1_R \in R \Rightarrow 1_R \in Ker(f) \Rightarrow f(1_R) = 0_S \Rightarrow 1_S = 0_S$, άτοπο. Επομένως, $Ker(f) = \{0_R\}$ και έτσι ο f είναι και μονομορφισμός, οπότε f: ισομορφισμός δακτυλίων, δηλαδή $R \cong S$

S: σώμα: Θα δείξουμε ότι S: μεταθετικός και $U(S) = S^*$.

(α) S: μεταθετικός: Έστω $y, w \in S$. Αφού f: επιμορφισμός, υπάρχουν $x, z \in R$ τέτοια ώστε $f(x) = y$ και $f(z) = w$, οπότε:

$$yw = f(x)f(z) \underset{\text{μορφ}}{\overset{f:}{=\!=}} f(xz) \underset{R:\text{ μεταθετικός}}{\overset{x, z \in R}{=\!=}} f(zx) \underset{\text{μορφ.}}{\overset{f:}{=\!=}} f(z)f(x) = wy.$$

Άρα, $zw = wy$, $\forall y, w \in S$, δηλαδή S: μεταθετικός

(β) $U(S) = S^*$ [δηλαδή κάθε μη-μηδενικό στοιχείο του S είναι αντιστρέψιμο]

Έστω $s \in S$, $s \neq 0_S$. Εφ' όσον f: επιμορφισμός, $s = f(r)$ για κάποιο $r \in R$. Ισχύει $r \neq 0_R$ διότι αν ήταν $r = 0_R$ τότε: $s = f(0_R) = 0_S$, άτοπο.

• $\left.\begin{array}{l} r \neq 0_R \\ R: \text{σώμα} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, r^{-1} \in R: \ rr^{-1} = 1_R = r^{-1}r$. Τότε:

$$f(rr^{-1}) = f(1_R) = f(r^{-1}r) \underset{\text{μορφ}}{\overset{f:}{\Longrightarrow}} f(r)f(r^{-1}) = 1_S = f(r^{-1})f(r)$$

$\Longrightarrow sf(r^{-1}) = 1_S = f(r^{-1})s$, οπότε s: αντιστρέψιμο με $s^{-1} = f(r^{-1})$. Τελικά, S: σώμα. ∎