ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εξέταση στην Άλγεβρα Ι (Τμήμα Β)
14/06/2024
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες και 30 λεπτά

ΘΕΜΑ 1ο (2.5 μονάδες)

Θεωρούμε τις μεταθέσεις σ, τ της ομάδας $(S_8, \circ)$ με

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 6 & i & 4 & j & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 7 & 6 & 8 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Να βρεθούν τα i και j ώστε η σ να είναι περιττή μετάθεση. (1)

Για τις τιμές των i, j που βρήκατε στο (i) ερώτημα:

(ii) Να εξετάσετε αν υπάρχει μετάθεση $\rho \in S_8$ τέτοια, ώστε $\rho \circ \tau \circ \rho^{-1} = \sigma$. Αν υπάρχει, να βρεθεί. (1)

(iii) Να εξετάσετε αν η μετάθεση $(\sigma \circ \tau^{-1})^{17}$ είναι άρτια ή περιττή. (0.5)

ΘΕΜΑ 2ο (2.5 μονάδες)

(i) Να βρεθούν όλες οι υποομάδες της ομάδας $(\mathbb{Z}_8, +)$. Στη συνέχεια να βρεθεί η ομάδα $(U(\mathbb{Z}_8), \cdot)$ των αντιστρέψιμων στοιχείων του $\mathbb{Z}_8$ και να εξετάσετε με ποια ομάδα είναι ισόμορφη. (0.5+0.5)

(ii) Έστω G μια ομάδα τάξης $|G| = p$, όπου ο p είναι πρώτος αριθμός. Να αποδείξετε ότι η G είναι κυκλική και απλή. (1.5)

ΘΕΜΑ 3ο (1.5 μονάδες)

(i) Έστω $G = \langle a \rangle$ μια κυκλική ομάδα και $H \leq G$. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η ομάδα πηλίκο G/H και ότι είναι κυκλική. (0.5)

(ii) Να αποδείξετε ότι ο μόνος μορφισμός ομάδων $f\colon \mathbb{Z}_7 \to S_5$ είναι ο τετριμμένος. (1)

ΘΕΜΑ 4ο (2.5 μονάδες)

(i) Έστω
$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \mid a,\, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{M}_2(\mathbb{R}).$$
Να αποδείξετε ότι ο S είναι υποδακτύλιος του $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ και στη συνέχεια ότι ο S είναι σώμα. Είναι ο S ιδεώδες του $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$; (0.5 x 3)

(ii) Να δώσετε παράδειγμα δακτυλίου R με διαιρέτες του μηδενός και ιδεώδους I του R ώστε ο δακτύλιος πηλίκο R/I να μην έχει διαιρέτες του μηδενός. (1)

ΘΕΜΑ 5ο (1 μονάδα)

(i) Να αποδείξετε ότι κάθε μη-μηδενικό ιδεώδες του δακτυλίου
$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \in \mathbb{C} \mid a,\, b \in \mathbb{Z}\}$$
των ακεραίων του Gauss περιέχει πάντα έναν θετικό ακέραιο. (0.5)

(ii) Έστω R ένας πεπερασμένος μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα 1_R και υποθέτουμε ότι το πλήθος των στοιχείων του είναι $|R| = p$, όπου ο p είναι πρώτος αριθμός. Να αποδείξετε ότι ο R είναι σώμα. (0.5)

Καλή επιτυχία!