Ασκήσεις Άλγεβρας Ι - Φυλλάδιο Β

Άσκηση Β1. Έστω $(G,\cdot)$ μια κυκλική ομάδα και έστω $H \leq G$. Να δείξετε ότι και η H είναι κυκλική.

Άσκηση Β2. Αν $K \leq H \leq G$ και $K \trianglelefteq G$, τότε να δείξετε ότι $K \trianglelefteq H$.

Άσκηση Β3. Έστω $(G,\cdot)$ μια μη-κυκλική ομάδα τάξης $|G| = p^2$, όπου p είναι πρώτος φυσικός αριθμός. Αν $g \in G$, $g \neq e$, να βρεθεί η τάξη $o(g)$ του στοιχείου g.

Άσκηση Β4. Να βρεθούν όλες οι υποομάδες των ομάδων $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ και $(\mathbb{Z}_8, +)$.

Άσκηση Β5. Έστω $(G,\cdot)$ μια ομάδα τάξης $|G| = p$, όπου p πρώτος φυσικός αριθμός. Να αποδείξετε ότι η G είναι κυκλική και απλή. Μάλιστα, $(G,\cdot) \cong (\mathbb{Z}_p, +)$.

Άσκηση Β6. Να βρεθούν τα αριστερά σύμπλοκα της $H = \langle [6]_{15} \rangle$ στην ομάδα $(\mathbb{Z}_{15}, +)$ καθώς και ο δείκτης $[\mathbb{Z}_{15} : H]$.

Άσκηση Β7. Για μια ομάδα $(G,\cdot)$ τα ακόλουθα ισοδυναμούν:

(i) Η G είναι αβελιανή

(ii) Η ομάδα-πηλίκο $G/Z(G)$ είναι κυκλική.

Άσκηση Β8.

(i) Να εξετάσετε αν υπάρχει μη-τετριμμένος μορφισμός $f\colon \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_5$;

(ii) Να εξετάσετε αν υπάρχει μη-τετριμμένος μορφισμός $f\colon \mathbb{Z}_7 \to S_5$;

(iii) Αποδείξτε την ύπαρξη του ισομορφισμού

$$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\langle (2,2) \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}.$$

Άσκηση Β9. (2ο Θεώρημα Ισομορφισμών Ομάδων) Έστω $(G,\cdot)$ μια ομάδα, $H \leq G$ και $K \trianglelefteq G$. Τότε:

(i) $HK \leq G,\ K \trianglelefteq HK$

(ii) $HK/K \cong H/H \cap K$.

Άσκηση Β10. (3ο Θεώρημα Ισομορφισμών Ομάδων) Έστω H, $K \trianglelefteq G$ με $K \leq H$. Τότε $H/K \trianglelefteq G/K$ και

$$(G/K)/(H/K) \cong G/H.$$