## Ασκήσεις Άλγεβρας Ι - Φυλλάδιο Α

**Άσκηση Α1.** Έστω $(G,\cdot)$ μια ομάδα. Αν για κάθε $a \in G$ ισχύει ότι $a^2 = e$ να δείξετε ότι η $G$ είναι αβελιανή.

**Άσκηση Α2.** Να αποδείξετε ότι το ακόλουθο σύνολο πινάκων

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Q}) \mid a,\, b \in \mathbb{Q} \right\}$$

είναι μια αβελιανή υποομάδα της ομάδας $(GL(2,\mathbb{Q}),\, \cdot)$.

**Άσκηση Α3.** Έστω $(G,\cdot)$ μια ομάδα και έστω $H$, $K$ υποομάδες της $(G,\cdot)$. Να δείξετε ότι

(i) η $H \cap K$ είναι υποομάδα της $(G,\cdot)$.

(ii) η $H \cup K$ είναι υποομάδα της $(G,\cdot)$ αν και μόνο αν $H \subseteq K$ ή $K \subseteq H$.

**Άσκηση Α4.** Υπάρχει ομάδα η οποία είναι ένωση τριών γνήσιων υποομάδων της ;

**Άσκηση Α5.** Έστω $(G,\cdot)$ μια ομάδα, $H \leq G$ και $g \in H$. Να αποδείξετε ότι $\langle g \rangle \leq H$.

**Άσκηση Α6.** Να βρεθεί το πλήθος των στοιχείων της κυκλικής υποομάδας $\langle [25]_{30} \rangle$ της ομάδας $(\mathbb{Z}_{30}, +)$ καθώς και το πλήθος των στοιχείων της κυκλικής υποομάδας $\langle [30]_{42} \rangle$ της ομάδας $(\mathbb{Z}_{42}, +)$.

**Άσκηση Α7.** Να βρεθούν όλοι οι γεννήτορες των ομάδων $(\mathbb{Z}_{10}, +)$, $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ και $(\mathbb{Z}_{15}, +)$.

**Άσκηση Α8.** Έστω $(G,\cdot)$ μια αβελιανή ομάδα και $x$, $y \in G$ τέτοια ώστε $x^n = y^n$, όπου $n$ είναι φυσικός αριθμός. Να δείξετε ότι $x = yz$ όπου το στοιχείο $z \in G$ έχει τάξη που διαιρεί το $n$.

**Άσκηση Α9.** Στη συμμετρική ομάδα $(S_9, \circ)$ θεωρούμε τη μετάθεση

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 1 & 9 & 2 & 3 & 8 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Να αναλυθεί η $\sigma$ σε γινόμενο ξένων κύκλων και να βρεθεί η τάξη της. Είναι η $\sigma$ άρτια ή περιττή μετάθεση. Τέλος, να βρεθεί το στοιχείο $\sigma^{100000}(1)$.

**Άσκηση Α10.** Στη συμμετρική ομάδα $(S_8, \circ)$ θεωρούμε τις μεταθέσεις

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

και

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 6 & 8 & 7 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Να γράψετε τις $\sigma$ και $\tau$ ως γινόμενα ξένων κύκλων και να βρείτε τις τάξεις τους.

(ii) Να υπολογιστούν οι μεταθέσεις $\sigma^{2013}$ και $\tau^{2015}$.

(iii) Να εξετάσετε αν υπάρχει μετάθεση $\rho \in S_8$ τέτοια, ώστε $\rho \circ \tau \circ \rho^{-1} = \sigma$. Αν υπάρχει, να βρεθεί.

**Άσκηση Α11.** Αν γνωρίζουμε ότι η μετάθεση

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & i & j & 7 & 8 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

είναι άρτια, να βρεθούν τα $i$, $j$.

**Άσκηση Α12.** Να βρεθεί η κυκλική δομή όλων των δυνάμεων $\tau^n,\ n \in \mathbb{Z}$ της μετάθεσης $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \in S_8$.

**Άσκηση Α13.** Λέμε ότι μια ιδιότητα $P$ διατηρείται υπό ισομορφισμούς ομάδων αν ισχύει ότι: Αν η $G$ έχει την ιδιότητα $P$ και $G \cong H$ τότε και η $H$ έχει την ιδιότητα $P$. Δείξτε ότι οι ακόλουθες ιδιότητες διατηρούνται υπό ισομορφισμούς ομάδων:

(i) $P_1$ : Η ομάδα $G$ είναι αβελιανή.

(ii) $P_2$ : Η ομάδα $G$ είναι κυκλική.

(iii) $P_3$ : Η ομάδα $G$ είναι άπειρη.

(iv) $P_4$ : Η ομάδα $G$ έχει τάξη $m \in \mathbb{N}$.

(v) $P_5$ : Το κέντρο της ομάδας $G$ είναι τετριμμένο.

(vi) $P_6$ : Κάθε στοιχείο της $G$ έχει πεπερασμένη τάξη.

**Άσκηση Α14.** Να εξετάσετε αν $\mathbb{Z}_6 \cong S_3$, $\mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Q}$.

**Άσκηση A15.** Έστω $(G,\cdot)$ μια αβελιανή ομάδα και $H$, $K$ δύο υποομάδες της $(G,\cdot)$. Να δείξετε ότι το σύνολο

$$H \cdot K = \{h\,k \in G \mid h \in H,\, k \in K\}$$

είναι υποομάδα της $(G,\cdot)$.

**Σχόλιο:** Στις προσθετικές ομάδες γράφουμε $H{+}K = \{h + k \in G \mid h \in H,\, k \in K\}$.

**Άσκηση A16.** Έστω $G = \langle a \rangle$ μια άπειρη κυκλική ομάδα. Να δείξετε ότι

(i) $\langle a^n \rangle \cdot \langle a^m \rangle = \langle a^{(n,m)} \rangle$

(ii) $\langle a^n \rangle \cap \langle a^m \rangle = \langle a^{[n,m]} \rangle$

**Σχόλιο:** Από την Άσκηση A16 συμπεραίνουμε ότι για $n,\, m \in \mathbb{N}$, για τις υποομάδες $n\,\mathbb{Z},\ m\,\mathbb{Z}$ της άπειρης κυκλικής ομάδας $(\mathbb{Z},+)$ ισχύουν

$$n\,\mathbb{Z} + m\,\mathbb{Z} = (n,m)\,\mathbb{Z}, \quad n\,\mathbb{Z} \cap m\,\mathbb{Z} = [n,m]\,\mathbb{Z}.$$