Σημειώσεις *Seemous*

Πανεπιστήμιο Πατρών 2020

Ανάλυση

Πρόβλημα : Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, όπου η συνάρτηση $f(x)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει ότι $f(0) = 2, f'(0) = -2$ και $f(1) = 1$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi) \cdot f'(\xi) + f''(\xi) = 0$$

(*I.M.C.* 1998)

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$g(x) = \frac{1}{2} \cdot \big(f(x)\big)^2 + f'(x) \ , \ x \in \mathbb{R}$$

Η $g(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$g'(x) = f(x) \cdot f'(x) + f''(x)$$

Παρατηρούμε ότι:

$$g(0) = \frac{1}{2} \cdot \big(f(0)\big)^2 + f'(0) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 + (-2) = 0$$

Ισχυρισμός: Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (0,1]$ τέτοιο ώστε $g(x_1) = 0$

Αποδεικνύουμε τον ισχυρισμό:

- Έστω $f(x) \neq 0, \forall x \in [0,1]$ Τότε θεωρούμε τη συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο:
$$h(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{f(x)} \ , \ x \in [0,1]$$
Η $h(x)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με
$$h'(x) = \frac{1}{2} + \frac{f'(x)}{\big(f(x)\big)^2} \ , \ x \in [0,1]$$
Παρατηρούμε ότι $h(0) = -\frac{1}{f(0)} = -\frac{1}{2}$ και $h(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{f(1)} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$ Συνεπώς σύμφωνα με το Θεώρημα του *Rolle* για την συνάρτηση $h(x)$ στο $[0,1]$ έχουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε:
$$h'(x_1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{f'(x_1)}{\big(f(x_1)\big)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\big(f(x_1)\big)^2}{2} + f'(x_1) = 0 \Leftrightarrow g(x_1) = 0$$

- Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ μηδενίζεται τουλάχιστον μία φορά στο $(0,1)$, ας είναι z_1 και z_2 δύο ρίζες της συνάρτησης $f(x)$ στο διάστημα $(0,1)$, δηλαδή ισχύει ότι $0 < z_1 \leqslant z_2 < 1$. Η συνάρτηση $f(x)$ είναι θετική στα διαστήματα $[0, z_1)$ και $(z_2, 1]$ αφού $f(0) = 2 > 0$ και $f(1) = 1 > 0$, αντίστοιχα. Αυτά δηλώνουν ότι $f'(z_1) \leqslant 0$ και $f'(z_2) \geqslant 0$. Τότε $g(z_1) = \frac{1}{2} \cdot \big(f(z_1)\big)^2 + f'(z_1) = f'(z_1) \leqslant 0$ και $g(z_2) = \frac{1}{2} \cdot \big(f(z_2)\big)^2 + f'(z_2) = f'(z_2) \geqslant 0$ και άρα από το Θεώρημα *Bolzano* υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (z_1, z_2) \subseteq (0,1)$ τέτοιο ώστε $g(x_1) = 0$

Οπότε σε κάθε περίπτωση έχουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (0,1]$ τέτοιο ώστε $g(x_1) = 0$. Στη συνέχεια από το Θεώρημα του *Rolle* για τη συνάρτηση $g(x)$ στο διάστημα $[0, x_1]$ έχουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, x_1) \subseteq (0,1)$ τέτοιο ώστε:
$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) \cdot f'(\xi) + f''(\xi) = 0$$

Σημείωση:

1) Αν η συνάρτηση
$$f(x) = \frac{2}{x+1} \ , \ x \in [0,1]$$
τότε η σχέση ισχύει ταυτοτικά.

2) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα *Taylor* για την $f(x)$ σε μια περιοχή του μηδενός , δηλαδή στο διάστημα $[0,\delta], 0<\delta<1$, τότε υπάρχει $z_\delta \in (0,\delta)$ ώστε να ισχύει ότι:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}\cdot x+\frac{f''(z_\delta)}{2!}\cdot x^2 \Rightarrow f(x)=\frac{f''(z_\delta)}{2}\cdot x^2-2\cdot x+2 \ , \ x\in[0,\delta]$$

Πρόβλημα : Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι μια δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $f(0)=0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \big(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\big)$ τέτοιο ώστε:

$$f''(\xi)=f(\xi)\cdot\big(1+2\cdot\tan^2(\xi)\big)$$

(*I.M.C.* 2013)

Λύση

Θεωρούμε $g(x)=f(x)\cdot\cos(x)$, $x\in\big(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\big)$ όπου ισχύει ότι $g\big(-\frac{\pi}{2}\big)=g(0)=g\big(\frac{\pi}{2}\big)=0$ και επειδή η συνάρτηση $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $g'(x)=f'(x)\cdot\cos(x)-f(x)\cdot\sin(x)$ (και πόσο μάλλον και συνεχείς σε όλο το $\mathbb{R}$) έχουμε ως αποτέλεσμα του Θεωρήματος του *Rolle* ότι υπάρχουν ένα τουλάχιστον $\xi_1\in\big(-\frac{\pi}{2},0\big)$ και ένα τουλάχιστον $\xi_2\in\big(0,\frac{\pi}{2}\big)$ τέτοια ώστε

$$g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$$

Τώρα θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=\frac{g'(x)}{\cos^2(x)}=\frac{f'(x)\cdot\cos(x)-f(x)\cdot\sin(x)}{\cos^2(x)} \ , \ x\in[\xi_1,\xi_2]$$

έχουμε ότι $h(\xi_1)=h(\xi_2)=0$ και η συνάρτηση $h(x)$ είναι παραγωγίσιμη (ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με παράγωγο:

$$h'(x)=\frac{g''(x)\cdot\cos^2(x)+2\cdot\cos(x)\cdot\sin(x)\cdot g'(x)}{\cos^4(x)}=$$

$$=\frac{\Big(f''(x)\cdot\cos(x)-f'(x)\cdot\sin(x)-f'(x)\cdot\sin(x)-f(x)\cdot\cos(x)\Big)\cdot\cos^2(x)}{\cos^4(x)}+$$

$$+\frac{2\cdot\cos(x)\cdot\sin(x)\cdot\Big(f'(x)\cdot\cos(x)-f(x)\cdot\sin(x)\Big)}{\cos^4(x)}=$$

$$=\frac{f''(x)\cdot\cos^3(x)-f(x)\cdot\Big(\cos^3(x)+2\cdot\cos(x)\cdot\sin^2(x)\Big)}{\cos^4(x)}=$$

$$=\frac{f''(x)\cdot\cos^2(x)-f(x)\cdot\Big(\cos^2(x)+2\cdot\sin^2(x)\Big)}{\cos^3(x)}=\frac{1}{\cos(x)}\cdot\Big(f''(x)-f(x)\cdot\big(1+2\tan^2(x)\big)\Big)$$

τότε σύμφωνα με το Θεώρημα του *Rolle* για τη συνάρτηση $h(x)$ στο διάστημα $[\xi_1,\xi_2]$ έχουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi)=0$ δηλαδή ισοδύναμα έχουμε ότι:

$$\frac{1}{\cos(\xi)}\cdot\Big(f''(\xi)-f(\xi)\cdot\big(1+2\tan^2(\xi)\big)\Big)=0\overset{\cos(\xi)\neq0}{\Longleftrightarrow}f''(\xi)=f(\xi)\cdot\big(1+2\cdot\tan^2(\xi)\big)$$

Οι συναρτήσεις Γάμμα και Βήτα (του *Euler*)

Συνάρτηση Γάμμα:

1) Για κάθε $y\in\mathbb{R}$, το γενικευμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_{0^+}^{+\infty} e^{-x}\cdot x^{y-1}\,dx$$

συγκλίνει , αν και μόνο αν $y>0$. Επιπλέον , για κάθε $a,b\in(0,+\infty)$ με $a<b$ το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{0^+}^{+\infty} e^{-x}\cdot x^{y-1}\,dx$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,b]$. Η συνάρτηση $\Gamma:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$\Gamma(y)=\int_{0^+}^{+\infty} e^{-x}\cdot x^{y-1}\,dx\ ,\ \forall y\in(0,+\infty)$$

καλείται συνάρτηση Γάμμα.
Ισχύουν τα ακόλουθα:

$$i)\Gamma(x) > 0 \ , \ \forall x \in (0,+\infty)$$
$$ii)\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \ , \ \forall x \in (0,+\infty)$$
$$iii)\Gamma(n) = (n-1)! \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

<u>**Πρόταση**</u> : Η συνάρτηση $\mathbb{J} : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $\mathbb{J}(x) = \ln\big(\Gamma(x)\big)$, $\forall x \in (0,+\infty)$ είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

<u>**Θεώρημα**</u> $(Harald\ Bohr, Johannes\ Kollerup)$: Έστω $g : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι ισχύουν τα εξής:
(α) η συνάρτηση g είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$
(β) $g(x+1) - g(x) = \ln x$, $\forall x \in (0,+\infty)$
Τότε , υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $g(x) = \ln\big(\Gamma(x)\big) + c$, $\forall x \in (0,+\infty)$.

Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

(1) $\Gamma(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \displaystyle\int_{0^+}^{+\infty} e^{-u^{\frac{1}{x}}}\ du$, $\forall x \in (0,+\infty)$
(2) $\displaystyle\int_{0^+}^{+\infty} x^{a-1} \cdot e^{-\frac{x}{b}}\ dx = \Gamma(a) \cdot b^a$, $\forall a,b \in (0,+\infty)$
(3) η συνάρτηση Γ είναι της τάξεως C^{∞} στο $(0,+\infty)$
(4) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{(t+1)}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot t}\cdot\left(\frac{t}{e}\right)^t} = 1$ (τύπος του $Stirling$)
(5) $\Gamma\big(\dfrac{1}{2}\big) = \sqrt{\pi}$

Συνάρτηση Βήτα:

Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{0^+}^{1^-} t^{x-1} \cdot (1-t)^{y-1}\ dt$$

συγκλίνει , αν και μόνο αν $x>0$ και $y>0$.
Η συνάρτηση $B:(0,+\infty)\times(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$B(x,y)=\int_{0^+}^{1^-} t^{x-1}\cdot(1-t)^{y-1}\,dt\ ,\ \forall(x,y)\in(0,+\infty)\times(0,+\infty)$$

καλείται συνάρτηση Βήτα.

Ισχύουν τα ακόλουθα:

(1) $B(x,y)>0,\ ,\ \forall x,y\in(0,+\infty)$
(2) $B(x,1)=\dfrac{1}{x}\ ,\ \forall x\in(0,+\infty)$
(3) $B(x,y)=B(y,x)\ ,\ \forall x,y\in(0,+\infty)$
(4) $y\cdot B(x+1,y)=x\cdot B(x,y+1)\ ,\ \forall x,y\in(0,+\infty)$
(5) $B(x+1,y)=\dfrac{x}{x+y}\cdot B(x,y)\ ,\ \forall x,y\in(0,+\infty)$
(6) $B(x,y)=\dfrac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\ ,\ \forall x,y\in(0,+\infty)$

Πρόταση : Έστω $y>0$. Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}B(x,y)=0$

Πρόταση :
(i) Έστω $a,b\in\mathbb{R}$ με $a>0$ και $b>a+1$. Τότε

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a\cdot(a+1)\cdot(a+2)\cdots(a+n-2)\cdot(a+n-1)}{b\cdot(b+1)\cdot(b+2)\cdots(b+n-2)\cdot(b+n-1)}=\frac{a}{b-a-1}$$

(ii) Έστω $a,b\in\mathbb{R}$ με $a>0$ και $b>a+2$. Τότε

$$\sum_{n=1}^{+\infty}n\cdot\frac{a\cdot(a+1)\cdot(a+2)\cdots(a+n-2)\cdot(a+n-1)}{b\cdot(b+1)\cdot(b+2)\cdots(b+n-2)\cdot(b+n-1)}=\frac{a\cdot(b-1)}{(b-a-1)\cdot(b-a-2)}$$

Επιπλέον αποδεικνύεται ότι για κάθε συνεχή συνάρτηση υπάρχει πολύωνυμο το οποίο να προσεγγίζει πολύ ' καλά ' τη συνάρτησή μας , είναι γνωστό ως Θεώρημα του $Weierstrass$. Θα αναφερθούμε και παρακάτω περισσότερο.

<u>**Πρόβλημα**</u> : α) Να υπολογιστεί το όριο:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(2\cdot n+1)!}{(n!)^2}\cdot\int_0^1 \big(x\cdot(1-x)\big)^n\cdot x^k\,dx\right]$$

όπου $k\in\mathbb{N}$.
β) Να υπολογιστεί το όριο:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(2\cdot n+1)!}{(n!)^2}\cdot\int_0^1 \big(x\cdot(1-x)\big)^n\cdot f(x)\,dx\right]$$

όπου $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση.

(*Seemous* 2009)

<u>**Λύση**</u>

α) Γνωρίζουμε για τη συνάρτηση Βήτα ότι:

$$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}\cdot(1-x)^{b-1}\,dx=\frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}=\frac{(a-1)!\cdot(b-1)!}{(a+b-1)!}$$

Οπότε βρίσκουμε ότι:

$$\int_0^1 \big(x\cdot(1-x)\big)^n\cdot x^k\,dx=\int_0^1 x^{n+k}\cdot(1-x)^n\,dx=B(n+k+1,n+1)=$$

$$=\frac{\Gamma(n+k+1)\cdot\Gamma(n+1)}{\Gamma(2\cdot n+k+2)}=\frac{(n+k)!\cdot n!}{(2\cdot n+k+1)!}$$

Οπότε προκύπτει ότι:

$$\frac{(2\cdot n+1)!}{(n!)^2}\cdot\int_0^1 \big(x\cdot(1-x)\big)^n\cdot x^k\,dx=\frac{(2\cdot n+1)!}{(n!)^2}\cdot\frac{(n+k)!\cdot n!}{(2\cdot n+k+1)!}=\frac{(2\cdot n+1)!}{n!}\cdot\frac{(n+k)!}{(2\cdot n+k+1)!}=$$

$$= \frac{(2\cdot n+1)!}{n!}\cdot\frac{(n+k)\cdot(n+k-1)\cdots(n+2)\cdot(n+1)\cdot n!}{(2\cdot n+k+1)\cdot(2\cdot n+k)\cdots(2\cdot n+3)\cdot(2\cdot n+2)\cdot(2\cdot n+1)!} =$$

$$= \frac{\cancel{(2\cdot n+1)!}}{\cancel{n!}}\cdot\frac{(n+k)\cdot(n+k-1)\cdots(n+2)\cdot(n+1)\cdot \cancel{n!}}{(2\cdot n+k+1)\cdot(2\cdot n+k)\cdots(2\cdot n+3)\cdot(2\cdot n+2)\cdot\cancel{(2\cdot n+1)!}} =$$

$$= \frac{n+k}{2\cdot n+k+1}\cdot\frac{n+k-1}{2\cdot n+k}\cdots\frac{n+2}{2\cdot n+3}\cdot\frac{n+1}{2\cdot n+2} =$$

$$= \frac{n\cdot\left(1+\frac{k}{n}\right)}{2\cdot n\left(1+\frac{k+1}{2\cdot n}\right)}\cdot\frac{n\cdot\left(1+\frac{k-1}{n}\right)}{2\cdot n\cdot\left(1+\frac{k}{2\cdot n}\right)}\cdots\frac{n\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)}{2\cdot n\cdot\left(1+\frac{3}{2\cdot n}\right)}\cdot\frac{n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2\cdot n\cdot\left(1+\frac{2}{2\cdot n}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2^k}\cdot\frac{\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{k-1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{k+1}{2\cdot n}\right)\cdot\left(1+\frac{k}{2\cdot n}\right)\cdots\left(1+\frac{3}{2\cdot n}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{2\cdot n}\right)}$$

Συνεπώς όταν το $n \to +\infty$ έχουμε ότι:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(2\cdot n+1)!}{(n!)^2}\cdot\int_0^1 \big(x\cdot(1-x)\big)^n\cdot x^k\;dx\right] = \frac{1}{2^k}\;,\;\forall k\in\mathbb{N}$$

β) Δεδομένου ότι:

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}\cdot(1-x)^{b-1}\;dx = \frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \frac{(a-1)!\cdot(b-1)!}{(a+b-1)!}$$

προκύπτει ότι:

$$\forall n\in\mathbb{N}: \int_0^1 \big(x\cdot(1-x)\big)^n\;dx = \int_0^1 x^n\cdot(1-x)^n\;dx = B(n+1,n+1) =$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)\cdot\Gamma(n+1)}{\Gamma(2\cdot n+2)} = \frac{n!\cdot n!}{(2\cdot n+1)!} = \frac{(n!)^2}{(2\cdot n+1)!}$$

Θεωρούμε για ευκολία

$$L_n\big(f(x)\big) = \frac{(2\cdot n+1)!}{(n!)^2}\cdot\int_0^1 \big(x\cdot(1-x)\big)^n\cdot f(x)\;dx\;,\;\forall n\in\mathbb{N}$$

Έστω επιπλέον

$$g(x) = \big(x \cdot (1-x)\big)^n, x \in [0,1] \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

όπου ισχύει ότι:

$$\int\limits_0^1 g(x)\ dx = \frac{(n!)^2}{(2 \cdot n + 1)!} \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

τότε διαπιστώνουμε ότι:

$$L_n\big(f(x)\big) = \frac{\int\limits_0^1 g(x) \cdot f(x)\ dx}{\int\limits_0^1 g(x)\ dx} \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

και γνωρίζουμε από το ερώτημα α) ότι:

$$\lim_{n \to +\infty} L_n\big(f(x) = x^k\big) = \frac{1}{2^k} \ , \ \forall k \in \mathbb{N}$$

Παρατηρούμε ότι για

$$P(x) = a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \cdots a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

προκύπτει ότι:

$$L_n\big(f(x) = P(x)\big) = \frac{\int\limits_0^1 g(x) \cdot P(x)\ dx}{\int\limits_0^1 g(x)\ dx} =$$

$$= \frac{\int\limits_0^1 g(x) \cdot \big(a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \cdots a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0\big)\ dx}{\int\limits_0^1 g(x)\ dx} =$$

$$= \frac{\int\limits_0^1 g(x)\cdot\big(a_m\cdot x^m\big)\ dx}{\int\limits_0^1 g(x)\ dx} + \frac{\int\limits_0^1 g(x)\cdot\big(a_{m-1}\cdot x^{m-1}\big)\ dx}{\int\limits_0^1 g(x)\ dx} + \cdots + \frac{\int\limits_0^1 g(x)\cdot\big(a_1\cdot x\big)\ dx}{\int\limits_0^1 g(x)\ dx} + \frac{\int\limits_0^1 g(x)\cdot a_0\ dx}{\int\limits_0^1 g(x)\ dx} =$$

$$= a_m\cdot L_n\big(f(x)=x^m\big)+a_{m-1}\cdot L_n\big(f(x)=x^{m-1}\big)+\cdots+a_1\cdot L_n\big(f(x)=x\big)+a_0\cdot L_n\big(f(x)=1\big)$$

Άρα έχουμε ότι:

$$\lim_{n\to+\infty} L_n\big(f(x)=P(x)\big) = a_m\cdot\frac{1}{2^m}+a_{m-1}\cdot\frac{1}{2^{m-1}}+\cdots+a_1\cdot\frac{1}{2}+a_0 = P\Big(\frac{1}{2}\Big)$$

Έπειτα από το κριτήριο του $Weierstrass$ έχουμε ότι για κάθε συνάρτηση $f(x)$ μπορούμε να βρούμε πολυώνυμο $P(x)$ που να την προσεγγίζει , δηλαδή βρίσκουμε ένα πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο να ισχύει ότι:

$$\forall \varepsilon>0 : \big|f(x)-P(x)\big| < \frac{\varepsilon}{3}\ ,\ x\in[0,1]$$

Τότε

$$\forall x\in[0,1] : \Big|L_n\big(f(x)\big)-L_n\big(P(x)\big)\Big| = \frac{1}{\int\limits_0^1 g(x)\ dx}\cdot\Big|\int\limits_0^1 g(x)\cdot\big(f(x)-P(x)\big)\ dx\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\int\limits_0^1 g(x)\cdot\big|f(x)-P(x)\big|\ dx}{\int\limits_0^1 g(x)\ dx} = L_n\big(\big|f(x)-P(x)\big|\big) < \frac{\int\limits_0^1 g(x)\cdot\frac{\varepsilon}{3}\ dx}{\int\limits_0^1 g(x)\ dx} = L_n\Big(f(x)=\frac{\varepsilon}{3}\Big) = \frac{\varepsilon}{3}$$

και επειδή

$$\lim_{n\to+\infty} L_n\big(f(x)=P(x)\big) = P\Big(\frac{1}{2}\Big)$$

δηλαδή για το $\frac{\varepsilon}{3}>0$ υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\forall n\geqslant n_0$ να ισχύει ότι:

$$\Big|L_n\big(f(x)=P(x)\big)-P\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Τότε $\forall n \geqslant n_0$ ισχύει:

$$\left|L_n\big(f(x)\big)-f\big(\frac{1}{2}\big)\right| = \left|L_n\big(f(x)\big)-L_n\big(P(x)\big)+L_n\big(P(x)\big)-P\big(\frac{1}{2}\big)+P\big(\frac{1}{2}\big)-f\big(\frac{1}{2}\big)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|L_n\big(f(x)\big)-L_n\big(P(x)\big)\right|+\left|L_n\big(P(x)\big)-P\big(\frac{1}{2}\big)\right|+\left|P\big(\frac{1}{2}\big)-f\big(\frac{1}{2}\big)\right| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Άρα το όριο ισούται με

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(2\cdot n+1)!}{(n!)^2}\cdot\int_0^1 \big(x\cdot(1-x)\big)^n\cdot f(x)\ dx\right] = f\big(\frac{1}{2}\big)$$

Σχόλιο : Έχουμε ότι:

$$g(x) = \big(x\cdot(1-x)\big)^n, x\in[0,1]\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

τότε

$$\int_0^1 g(x)\ dx = \frac{(n!)^2}{(2\cdot n+1)!}\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

και σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού για τις συναρτήσεις $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ και $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ όπου είναι συνεχείς τότε διαπιστώνουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in[0,1]$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{\displaystyle\int_0^1 g(x)\cdot f(x)\ dx}{\displaystyle\int_0^1 g(x)\ dx} = f(\xi) = L_n\big(f(x)\big)$$

και τελικά προκύπτει ότι αυτό το ξ ισούται με $\frac{1}{2}$.

Πρόβλημα : Θεωρούμε ένα πραγματικό πολυώνυμο 5ου βαθμού. Ας υποθέσουμε ότι έχει τρία σημεία καμπής η γραφική παράσταση του πολυωνύμου. Να υπολογιστεί ο λόγος των εμβαδών των χωρίων που οριοθετούνται από τη γραφική παράσταση και την ευθεία που περνάει και από τα τρία σημεία καμπής.

(*Seemous* 2009)

Λύση

Έστω ότι τα σημεία καμπής είναι τα A, B και C. Ας είναι η ευθεία $l : y = k\cdot x+n$ που περνάει από τα τρία σημεία καμπής. Αν το σημείο B έχει συντεταγμένες (x_0, y_0) , τότε κάνουμε αλλαγή συντεταγμένων ως εξής:

$$x' = x - x_0 \quad , \quad y' = k \cdot x - y + n$$

δηλαδή η ευθεία l γίνεται ο άξονας x , και το σημείο B είναι το κέντρο αυτού του συστήματος συντεταγμένων. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι (μετά τον μετασχηματισμό συντεταγμένων) τα σημεία καμπής έχουν συντεταγμένες $(b, 0), (0, 0)$ και $(a, 0)$ με $b < 0 < a$. Τότε σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε ότι:

$$f''(x) = k \cdot x \cdot (x - a) \cdot (x - b)$$

και άρα

$$f(x) = \frac{k}{20} \cdot x^5 - \frac{k \cdot (a + b)}{12} \cdot x^4 + \frac{k \cdot a \cdot b}{6} \cdot x^3 + c \cdot x + d$$

Από την αλλαγή συντεταγμένων έπεται ότι ισχύει:

$$d = 0 \quad , \quad a + b = 0 \quad , \quad c = \frac{7 \cdot k \cdot a^4}{60}$$

και άρα προκύπτει ότι:

$$f(x) = \frac{k}{20} \cdot x^5 - \frac{k \cdot a^2}{6} \cdot x^3 + \frac{7 \cdot k \cdot a^4}{60} \cdot x = \frac{k}{60} \cdot x \cdot (x^2 - a^2) \cdot (3 \cdot x^2 - 7 \cdot a^2)$$

και παρατηρούμε ότι το πολυώνυμο είναι μια περιττή συνάρτηση , οπότε τα ζητούμενα χωρία είναι:

$$\Omega_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\right\}$$

$$\Omega_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant a \cdot \sqrt{\frac{7}{3}}, f(x) \leqslant y \leqslant 0\right\}$$

Και βρίσκουμε τα εμαβαδά

$$S_1 = S\big(\Omega_1\big) = \int\limits_0^a f(x)\ dx = \frac{k \cdot a^6}{40}$$

$$S_2 = S\big(\Omega_2\big) = -\int\limits_a^{a\cdot\sqrt{\frac{7}{3}}} f(x)\ dx = \frac{4 \cdot k \cdot a^6}{405}$$

και συνεπώς έχουμε ότι:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{81}{32}$$

<u>**Πρόβλημα**</u> : Έστω $f_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση. Έστω η ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με αναδρομικό τύπο

$$f_n(x) = \int\limits_0^x f_{n-1}(t)\ dt\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

α) Να αποδείξετε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

συγκλίνει για κάθε $x \in [0,1]$.
β) Να βρεθεί ένας τύπος για τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\ ,\ \forall x \in [0,1]$$

(*Seemous* 2010)

<u>**Λύση**</u>

<u>$1^{ος}$ τρόπος</u>

Παρατηρούμε ότι ισχύει:

$$f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)\ dt \Rightarrow \big(f_n(x)\big)' = f_{n-1}(x)\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Επειδή η συνάρτηση $f_0(x)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ έχουμε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$\Big|f(x)\Big| \leqslant M\ ,\ \forall x \in [0,1]$$

Τότε για κάθε $x \in [0,1]$

$$\Big|f_1(x)\Big| = \Big|\int_0^x f_0(t)\ dt\Big| \leqslant \int_0^x \Big|f_0(t)\Big|\ dt \leqslant \int_0^x M\ dt = M \cdot x$$

$$\Big|f_2(x)\Big| = \Big|\int_0^x f_1(t)\ dt\Big| \leqslant \int_0^x \Big|f_1(t)\Big|\ dt \leqslant \int_0^x M \cdot t\ dt = M \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$\vdots$$

$$\Big|f_n(x)\Big| \leqslant M \cdot \frac{x^n}{n!}\ ,\ \forall x \in [0,1]\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Έπειτα έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$:

$$\max_{x\in[0,1]} \big(\big|f_n(x)\big|\big) \leqslant \max_{x\in[0,1]} \big(M \cdot \frac{x^n}{n!}\big) = M \cdot \frac{1}{n!}$$

Παρατηρούμε ότι η σειρά:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M}{n!} = M \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = M \cdot (e-1) \in \mathbb{R} \quad \text{συγκλίνει}$$

οπότε συγκλίνει και η σειρά:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \big|f_n(x)\big| \in \mathbb{R}$$

και άρα σύμφωνα με το κριτήριο της απόλυτης σύγκλισης έχουμε ότι η ζητούμενη σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \in \mathbb{R} \quad \text{συγκλίνει}$$

για κάθε $x \in [0,1]$.

2^{ος} τρόπος

Παρατηρούμε ότι $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\big(f_n(x)\big)^{(k)} = f_{n-k}(x) \ , \forall k \in \mathbb{N} \text{ και } k \leqslant n$$

$$f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)\ dt \ , \ x \in [0,1] \text{ και } \forall n \in \mathbb{N}$$

τότε

$$f_n(0) = f_n'(0)\big(= f_{n-1}(0)\big) = f_n^{(2)}(0)\big(= f_{n-2}(0)\big) = \cdots = f_n^{(n-1)}(0)\big(= f_1(0)\big) = 0$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα του *Taylor* έχουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_n \in (0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$f_n(x) = f_n(0) + \frac{f_n'(0)}{1!}\cdot x + \frac{f_n^{(2)}(0)}{2!}\cdot x^2 + \frac{f_n^{(3)}(0)}{3!}\cdot x^3 + \cdots + \frac{f_n^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\cdot x^{n-1} + \frac{f_n^{(n)}(\xi_n)}{n!}\cdot x^n \ , \forall x \in [0,1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_n(x) = \frac{f_n^{(n)}(\xi_n)}{n!}\cdot x^n \ , \forall x \in [0,1] \Rightarrow f_n(x) = \frac{f_0(\xi_n)}{n!}\cdot x^n \ , \forall x \in [0,1]$$

Επειδή η συνάρτηση $f_0(x)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ έχουμε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε:

$$\big|f_n(x)\big| \leqslant M \ , \forall x \in [0,1]$$

Συνεπώς ισχύει ότι:

$$\big|f_n(x)\big| = \big|f_0(\xi_n)\big| \cdot \frac{x^n}{n!} \leqslant \frac{M}{n!} \ , \forall x \in [0,1]$$

και οπότε αφού η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M}{n!} = M \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = M\cdot(e-1) \in \mathbb{R} \quad \text{συγκλίνει}$$

θα συγκλίνει και η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \big|f_n(x)\big| \in \mathbb{R} \quad \text{συγκλίνει}$$

και άρα η ζητούμενη σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \in \mathbb{R} \quad \text{συγκλίνει } \forall x \in [0,1]$$

β) Θεωρούμε $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \ , \ \forall x \in [0,1]$$

Τότε

$$\forall x \in [0,1] : g(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_{n-1}(x) + f_n(x) + \cdots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \cdots + f_{n-1}'(x) + f_n'(x) + \cdots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x) = f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_{n-2}(x) + f_{n-1}(x) + \cdots \Rightarrow$$

$$g'(x) = f_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} f_{n(x)} \Rightarrow g'(x) = f_0(x) + g(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x) \cdot e^{-x} - g(x) \cdot e^{-x} = f_0(x) \cdot e^{-x} \Rightarrow \big(g(x) \cdot e^{-x}\big)' = e^{-x} \cdot f_0(x) \Rightarrow g(x) \cdot e^{-x} = \int_0^x e^{-t} \cdot f_0(t) \ dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x) = e^x \cdot \int_0^x e^{-t} \cdot f_0(t) \ dt \ , \ x \in [0,1] \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = e^x \cdot \int_0^x e^{-t} \cdot f_0(t) \ dt \ , \ x \in [0,1]$$

Πρόβλημα : Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$1) \int_0^4 \frac{\ln x}{\sqrt{4 \cdot x - x^2}} \ dx \quad 2) \int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} \ dx$$

$$3)\int_0^1 x^a\cdot\big(\ln x\big)^n\ dx\ ,\ a\in(0,+\infty),n\in\mathbb{N}\quad 4)\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\ dx$$

$$5)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\big(a\cdot\sin x\big)\ dx\ ,\ a\in(0,+\infty)\quad 6)\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{n\cdot x}-e^x}{x}\ dx$$

$$7)\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-a\cdot x+1}\ dx\ ,\ a\in[0,1]\quad 8)\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{e^x-1}\ dx$$

$$9)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^4+1}\ dx$$

<u>Λύση</u>

$$1)\int_0^4\frac{\ln x}{\sqrt{4\cdot x-x^2}}\ dx=\int_0^4\frac{\ln x}{\sqrt{4-(2-x)^2}}\ dx=$$

$$\xrightarrow[dx=-du\ ,\ x=0:u=2\ ,\ x=4:u=-2]{u=u(x)=2-x\Leftrightarrow x=x(u)=2-u}$$

$$=\int_{-2}^{2}\frac{\ln\left(2-u\right)}{\sqrt{4-u^2}}\ du=$$

$$\xrightarrow[f(-u)=\dfrac{\ln\left(2+u\right)}{\sqrt{4-u^2}}]{f(u)=\dfrac{\ln\left(2-u\right)}{\sqrt{4-u^2}}}$$

$$=\int_{-2}^{2}f(u)\ du=\int_{-2}^{2}\frac{f(u)+f(-u)}{2}\ du+\int_{-2}^{2}\frac{f(u)-f(-u)}{2}\ du=$$

$$= \int\limits_{-2}^{2} \frac{f(u)+f(-u)}{2}\ du + \cancelto{0}{\int\limits_{-2}^{2} \frac{f(u)-f(-u)}{2}\ du} \quad = \int\limits_{-2}^{2} \frac{\ln{(2-u)}+\ln{(2+u)}}{2\cdot\sqrt{4-u^2}}\ du =$$

$$= 2\cdot\int\limits_{0}^{2} \frac{\ln{(2-u)}+\ln{(2+u)}}{2\cdot\sqrt{4-u^2}}\ du = \int\limits_{0}^{2} \frac{\ln{(4-u^2)}}{\sqrt{4-u^2}}\ du$$

$$\xrightarrow[dx=-2\cdot u\ du\ ,\ u=0:x=4\ ,\ u=2:x=0]{x=x(u)=4-u^2 \Leftrightarrow u=u(x)=\sqrt{4-x}}$$

$$= \int\limits_{0}^{4} \frac{\ln x}{2\cdot\sqrt{4-x}\cdot\sqrt{x}}\ dx = \frac{1}{2}\cdot\int\limits_{0}^{4} \frac{\ln x}{\sqrt{4\cdot x-x^2}}\ dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_{0}^{4} \frac{\ln x}{\sqrt{4\cdot x-x^2}}\ dx = 0$$

2) $1^{\text{ος}}$ τρόπος : Γνωρίζουμε ότι:

$$\int\limits_{0}^{1} x^y\ dx = \left[\frac{x^y}{y+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{y+1}$$

και στη συνέχεια βρίσκουμε

$$\int\limits_{0}^{1}\left(\int\limits_{0}^{1} x^y\ dx\right)\ dy = \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{y+1}\ dy = \Big[\ln|y+1|\Big]_{y=0}^{y=1} = \ln 2$$

και εναλλακτικά υπολογίζουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα κάνοντας χρήση του Θεωρήματος *Fubini* και έχουμε ότι:

$$\ln 2 = \int\limits_{0}^{1}\left(\int\limits_{0}^{1} x^y\ dx\right)\ dy = \int\limits_{0}^{1}\left(\int\limits_{0}^{1} x^y\ dy\right)\ dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{1}\left(\int\limits_{0}^{1} e^{y\cdot\ln x}\ dy\right)\ dx = \int\limits_{0}^{1}\left[\frac{x^y}{\ln x}\right]_{y=0}^{y=1}\ dx = \int\limits_{0}^{1} \frac{x-1}{\ln x}\ dx$$

$\underline{2^{ος} \text{ τρόπος}}$: Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(t) = \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln x}\ dx\ ,\ t \in [0, +\infty)$$

όπου ισχύει ότι $f(0) = 0$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε την παράγωγο της συνάρτησης $f(t)$

$$\frac{d}{dt}\big(f(t)\big) = f'(t) = \frac{d}{dt}\left(\int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln x}\ dx\right) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x^t - 1}{\ln x}\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^t \cdot \ln x}{\ln x}\ dx = \int_0^1 x^t\ dx = \left[\frac{x^{t+1}}{t+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{t+1} \Rightarrow$$

$$f'(t) = \frac{1}{t+1} \Rightarrow f(t) = \ln(t+1) + c\ ,\ t \in [0, +\infty) \xRightarrow{t = 0 \Rightarrow 0 = f(0) = \ln 1 + c = c}$$

$$\Rightarrow f(t) = \ln(t+1)\ ,\ t \in [0, +\infty) \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln x}\ dx = \ln(t+1)\ ,\ t \in [0, +\infty)$$

Συνεπώς το ζητούμενο προκύπτει από εφαρμογή του παραπάνου τύπου για $t = 1$, οπότε:

$$\int_0^1 \frac{x - 1}{\ln x}\ dx = \ln 2$$

3) $\underline{1^{ος} \text{ τρόπος}}$: Θα κάνουμε επαγωγή στο $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή έχουμε ότι:
Για $n = 1$ έχουμε ότι:

$$\int_0^1 x^a \cdot \ln x\ dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial a}\big(x^a\big)\ dx = \frac{d}{da}\left(\int_0^1 x^a\ dx\right) = \frac{d}{da}\left(\left[\frac{x^a}{a+1}\right]_{x=0}^{x=1}\right) =$$

$$= \frac{d}{da}\left(\frac{1}{a+1}\right) = -\frac{1}{(a+1)^2} = (-1)^1 \cdot \frac{1!}{(a+1)^{1+1}}$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή ας είναι

$$\int_0^1 x^a \cdot \big(\ln x\big)^n \, dx = (-1)^n \cdot \frac{n!}{(a+1)^{n+1}}$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για το $n+1$, έχουμε τα εξής:

$$\int_0^1 x^a \cdot \big(\ln x\big)^{n+1} \, dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial a}\big(x^a\big) \cdot \big(\ln x\big)^n \, dx = \frac{d}{da}\left(\int_0^1 x^a \cdot \big(\ln x n \, dx \right) =$$

$$= \frac{d}{da}\left((-1)^n \cdot \frac{n!}{(a+1)^{n+1}}\right) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(a+1)^{n+2}}$$

<u>$2^{ος}$ τρόπος</u>:

$$I_n = \int_0^1 x^a \cdot \big(\ln x\big)^n \, dx = \int_0^1 \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{a+1}}{a+1}\right) \cdot \big(\ln x\big)^n \, dx =$$

$$= \left[\frac{x^{a+1} \cdot \big(\ln x\big)^n}{a+1}\right]_{x=0}^{x=1} - \frac{n}{a+1} \cdot \int_0^1 x^a \cdot \big(\ln x\big)^{n-1} \, dx =$$

$$= \cancelto{0}{\left[\frac{x^{a+1} \cdot \big(\ln x\big)^n}{a+1}\right]_{x=0}^{x=1}} - \frac{n}{a+1} \cdot \int_0^1 x^a \cdot \big(\ln x\big)^{n-1} \, dx =$$

$$= -\frac{n}{a+1} \cdot \int_0^1 x^a \cdot \big(\ln x\big)^{n-1} \, dx = -\frac{n}{a+1} \cdot I_{n-1} \Rightarrow$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : I_n = -\frac{n}{a+1} \cdot I_{n-1} = \big(-\frac{n}{a+1}\big) \cdot \big(-\frac{n-1}{a+1}\big) \cdot I_{n-2} = \cdots = (-1)^n \cdot \frac{n!}{(a+1)^{n+1}}$$

4) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(a) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin{(a \cdot x)}}{x}\right)^2 \, dx \ , \ \forall a \in [0, +\infty)$$

με $f(0)=0$ Στη συνέχεια βρίσκουμε την παράγωγο της συνάρτησης $f(a)$:

$$\frac{d}{da}\big(f(a)\big)=f'(a)=\frac{d}{da}\left(\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\sin(a\cdot x)}{x}\right)^2 dx\right)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\sin(a\cdot x)}{x}\right)^2 dx=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}\frac{2\cdot\sin(a\cdot x)\cdot\cos(a\cdot x)\cdot x}{x^2}\ dx=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin(2\cdot a\cdot x)}{x}\ dx \xrightarrow[x=0\,:\,u=0\ ,\ x\to+\infty\,:\,u\to+\infty]{u=u(x)=2\cdot a\cdot x\ ,\ du=2\cdot a\ dx}$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin u}{\frac{u}{2\cdot a}}\frac{1}{2\cdot a}\ du=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\ du=\frac{\pi}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(a)=\frac{\pi}{2}\cdot a+c\ ,\ a\in[0,+\infty)\xRightarrow{a=0\Rightarrow 0=f(0)=c} f(a)=\frac{\pi}{2}\cdot a\ ,\ a\in[0,+\infty)$$

Άρα ισχύει ότι:

$$\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\sin(a\cdot x)}{x}\right)^2 dx=\frac{\pi}{2}\cdot a\ ,\ a\in[0,+\infty)$$

Επομένως το ζητούμενο προκύπτει για $a=1$, και τότε είναι

$$\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx=\frac{\pi}{2}$$

Σημείωση :

α)

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\ dx=\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{x}\cdot\sin x\ dx=\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty}e^{-xt}\ dt\right)\cdot\sin x\ dx=\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}e^{-xt}\cdot\sin x\ dt\ dx=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}e^{-xt}\cdot\sin x\ dx\ dt=\int\limits_0^{+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty}\left(\int\limits_0^{n}e^{-xt}\cdot\sin x\ dx\right)\right)dt=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty}\left(\left[-\frac{e^{-xt}\cdot(t\cdot\sin x+\cos x)}{t^2+1}\right]_{x=0}^{x=n}\right)\right)dt=$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{e^{-nt}\cdot(t\cdot\sin n+\cos n)}{t^2+1} + \frac{e^{-0\cdot t}\cdot(t\cdot\sin 0+\cos 0)}{t^2+1} \right)\right) \, dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\cancelto{0}{\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{e^{-nt}\cdot(t\cdot\sin n+\cos n)}{t^2+1} \right)} + \frac{1}{t^2+1} \right) \, dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+1} \, dt =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^{n} \frac{1}{t^2+1} \, dt \right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\Big[\arctan t \Big]_0^n \right) = \lim_{n\to+\infty} \Big(\arctan n - \arctan 0 \Big) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \Big(\arctan n \Big) = \frac{\pi}{2}$$

β) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} \, dt = \lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^{n} e^{-xt} \, dt \right) = \lim_{n\to+\infty} \left[-\frac{e^{-xt}}{x} \right]_{t=0}^{t=n} = \lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{e^{-nx}}{x} + \frac{e^{-x\cdot 0}}{x} \right) =$
$\displaystyle\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cdot \cancelto{0}{\lim_{n\to+\infty} e^{-nx}} = \frac{1}{x}$

γ) $\displaystyle\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{e^{-xt}\cdot(t\cdot\sin x+\cos x)}{t^2+1} \right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{t}{t^2+1}\cdot e^{-xt}\cdot\sin x - \frac{1}{t^2+1}\cdot e^{-xt}\cdot\cos x \right) =$

$$= -\frac{t}{t^2+1}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\Big(e^{-xt}\cdot\sin x\Big) - \frac{1}{t^2+1}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\Big(e^{-xt}\cdot\cos x\Big) =$$

$$= -\frac{t}{t^2+1}\cdot\Big(-t\cdot e^{-xt}\cdot\sin x + e^{-xt}\cdot\cos x\Big) - \frac{1}{t^2+1}\cdot\Big(-t\cdot e^{-xt}\cdot\cos x - e^{-xt}\cdot\sin x\Big) =$$

$$= -\frac{e^{-xt}}{t^2+1}\cdot\Big(-t^2\cdot\sin x + t\cdot\cos x - t\cdot\cos x - \sin x\Big) =$$

$$= -\frac{e^{-xt}}{t^2+1}\cdot\Big(-(t^2+1)\cdot\sin x + \cancel{t\cos x} - \cancel{t\cos x}\Big) = e^{-xt}\cdot\sin x$$

5) <u>$1^{ος}$ τρόπος</u>:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(a\cdot\sin x\big) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln a \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\sin x\big) \, dx = \frac{\pi}{2}\cdot\ln a + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\sin x\big) \, dx$$

Οπότε έπειτα υπολογίζουμε το εξής ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\sin x\big)\ dx =$$

$$\xrightarrow[dx = -du\ ,\ x = 0 : u = \frac{\pi}{2}\ ,\ x = \frac{\pi}{2} : u = 0]{u = u(x) = \frac{\pi}{2} - x \Leftrightarrow x = x(u) = \frac{\pi}{2} - u}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\cos x\big)\ dx$$

Επομένως , ισχύει ότι:

$$2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\sin x\big)\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\sin x\big)\ dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\cos x\big)\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(2\cdot x)}{2}\right)\ dx =$$

$$\xrightarrow[dx = \frac{1}{2}\ du\ ,\ x = 0 : u = 0\ ,\ x = \frac{\pi}{2} : u = \pi]{u = u(x) = 2\cdot x \Leftrightarrow x = x(u) = \frac{u}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\pi} \ln\left(\frac{\sin x}{2}\right)\ dx = \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\pi} \ln\big(\sin x\big)\ dx - \frac{\pi}{2}\cdot\ln 2 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\sin x\big)\ dx + \frac{1}{2}\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln\big(\sin t\big)\ dt - \frac{\pi}{2}\cdot\ln 2 =$$

$$\xrightarrow[dt = -dx\ ,\ t = \frac{\pi}{2} : x = \frac{\pi}{2}\ ,\ t = \pi : x = 0]{t = t(x) = \pi - x \Leftrightarrow x = x(t) = \pi - t}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\sin x\big)\ dx + \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\sin x\big)\ dx - \frac{\pi}{2}\cdot\ln 2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\sin x\big)\ dx - \frac{\pi}{2}\cdot\ln 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\sin x\big)\ dx = -\frac{\pi}{2}\cdot\ln 2$$

Οπότε το ζητούμενο ολοκλήρωμα ισούται με

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(a\cdot\sin x\big)\ dx = \frac{\pi}{2}\cdot\ln\big(\frac{a}{2}\big)$$

<u>$2^{ος}$ τρόπος:</u>

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\cos x\big)\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\frac{e^{i\cdot x}+e^{-i\cdot x}}{2}\big)\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big[e^{i\cdot x}\cdot\big(1+e^{-2\cdot i\cdot x}\big)\big]\ dx - \frac{\pi}{2}\cdot\ln 2 =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(e^{i\cdot x}\big)\ dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(1+e^{-2\cdot ix}\big)\ dx - \frac{\pi}{2}\cdot\ln 2 =$$

$$= i\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\big(e^{-2\cdot i\cdot x}\big)^n\ dx - \frac{\pi}{2}\cdot\ln 2 =$$

$$= i\cdot\frac{\pi^2}{8} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2\cdot i\cdot n\cdot x}\ dx - \frac{\pi}{2}\cdot\ln 2 =$$

$$= i\cdot\frac{\pi^2}{8} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot i\cdot n\cdot(-1)^{n+1}} + \frac{1}{2\cdot i\cdot n}\right) - \frac{\pi}{2}\cdot\ln 2 =$$

$$= i\cdot\frac{\pi^2}{8} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2\cdot i\cdot n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2\cdot i\cdot n^2} - \frac{\pi}{2}\cdot\ln 2 =$$

$$= i\cdot\frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2\cdot i}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+(-1)^{n-1}}{n^2} - \frac{\pi}{2}\cdot\ln 2 =$$

$$= i\cdot\frac{\pi^2}{8} - \frac{i}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{(2\cdot n-1)^2} - \frac{\pi}{2}\cdot\ln 2 =$$

$$= i\cdot\frac{\pi^2}{8} - i\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2\cdot n-1)^2} - \frac{\pi}{2}\cdot\ln 2 = i\cdot\frac{\pi^2}{8} - i\cdot\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{2}\cdot\ln 2 = -\frac{\pi}{2}\cdot\ln 2$$

$$6)\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{e^{n\cdot x}-e^{x}}{x}\ dx = \int\limits_{-\infty}^{0}\left[\frac{e^{y\cdot x}}{x}\right]_{y=1}^{y=n}\ dx = \int\limits_{-\infty}^{0}\Big(\int\limits_{1}^{n}e^{y\cdot x}\ dy\Big)\ dx =$$

$$= \int\limits_{1}^{n}\Big(\int\limits_{-\infty}^{0}e^{y\cdot x}\ dx\Big)\ dy = \int\limits_{1}^{n}\left[\frac{e^{y\cdot x}}{y}\right]_{x\to-\infty}^{x=0}\ dy = \int\limits_{1}^{n}\frac{1}{y}\ dy = \big[\ln|y|\big]_{y=1}^{y=n} = \ln(n)$$

$$7)\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-a\cdot x+1}\ dx =$$

$$\xrightarrow[dx=-\frac{1}{u^2}\ du\ ,\ x\to 0\ :\ u\to+\infty\ ,\ x\to+\infty\ :\ u\to 0]{x=x(u)=\frac{1}{u}\Leftrightarrow u=u(x)=\frac{1}{x}}$$

$$= \int\limits_{+\infty}^{0}\frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{\frac{1}{u^2}-\frac{a}{u}+1}\cdot\big(-\frac{1}{u^2}\big)\ du = -\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-a\cdot x+1}\ dx \Rightarrow$$

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-a\cdot x+1}\ dx = 0$$

$$8)\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{e^x-1}\ dx = \int\limits_{0}^{+\infty}\frac{e^{-x}\cdot\sin x}{1-e^{-x}}\ dx = \int\limits_{0}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}e^{-k\cdot x}\cdot\sin x\ dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-k\cdot x}\cdot\sin x\ dx = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2+1}$$

<u>**Σημείωση**</u> : Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{e^{-x\cdot k}\cdot(k\cdot\sin x+\cos x)}{k^2+1}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{k}{k^2+1}\cdot e^{-x\cdot k}\cdot\sin x-\frac{1}{k^2+1}\cdot e^{-x\cdot k}\cdot\cos x\right)=$$

$$=-\frac{k}{k^2+1}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-x\cdot k}\cdot\sin x\right)-\frac{1}{k^2+1}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-x\cdot k}\cdot\cos x\right)=$$

$$=-\frac{k}{k^2+1}\cdot\left(-k\cdot e^{-x\cdot k}\cdot\sin x+e^{-x\cdot k}\cdot\cos x\right)-\frac{1}{k^2+1}\cdot\left(-k\cdot e^{-x\cdot k}\cdot\cos x-e^{-x\cdot k}\cdot\sin x\right)=$$

$$=-\frac{e^{-x\cdot k}}{k^2+1}\cdot\left(-k^2\cdot\sin x+k\cdot\cos x-k\cdot\cos x-\sin x\right)=$$

$$=-\frac{e^{-x\cdot k}}{k^2+1}\cdot\left(-(k^2+1)\cdot\sin x+\cancel{k\cos x}-\cancel{k\cos x}\right)=e^{-x\cdot k}\cdot\sin x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int\limits_0^{+\infty}e^{-k\cdot x}\cdot\sin x\;dx=\left[-\frac{e^{-x\cdot k}\cdot(k\cdot\sin x+\cos x)}{k^2+1}\right]_{x=0}^{x\to+\infty}=\frac{1}{k^2+1}$$

9) Έστω ότι $w_k=e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}},k=0,1,2,3$

, όπου είναι $w_0=e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $w_1=e^{i\frac{3\pi}{4}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $w_2=e^{i\frac{5\pi}{4}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $w_3=e^{i\frac{7\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Θεώρημα *Weierstrass* : Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπαρχει πολυώνυμο $P(x)$ τέτοιο ώστε $\big|f(x) - P(x)\big| < \varepsilon$, $x \in [a,b]$.
Επιπλέον σχολιάζουμε ότι αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ τότε υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $P_n(x)$ η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα , δηλαδή $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(x) = f(x)$, $x \in [a,b]$.

Πρόβλημα : Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε:

$$\int\limits_a^b x^n \cdot f(x)\ dx = 0 \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

τότε $f(x) = 0$, $\forall x \in [a,b]$.

Λύση

Επειδή η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ έχουμε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώτσε $\big|f(x)\big| < M$, $\forall x \in [a,b]$. Από το Θεώρημα του *Weierstrass* για την συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο $P(x)$ τέτοιο ώστε:

$$\big|f(x) - P(x)\big| < \frac{\varepsilon}{M \cdot (b-a)} \ , \ x \in [a,b]$$

Θα δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει ότι:

$$\int\limits_a^b \big(f(x)\big)^2\ dx < \varepsilon$$

Πράγματι , παρατηρούμε ότι:

$$\forall x \in [a,b] : \Big|\big(f(x)\big)^2 - f(x)\cdot P(x)\Big| = \big|f(x)\big|\cdot\big|f(x) - P(x)\big| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M \cdot (b-a)} = \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Ακόμη έχουμε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ θα είναι της μορφής:

$$P(x) = a_m \cdot x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \cdots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 \ , \ \forall x \in [a,b]$$

και δεδομένου ότι ισχύει:

$$\int\limits_a^b x^n \cdot f(x)\ dx = 0 \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

προκύπτει ότι:

$$\int_a^b P(x) \cdot f(x)\, dx = 0$$

Οπότε τώρα έχουμε ότι:

$$0 \leqslant \int_a^b \big(f(x)\big)^2\, dx = \left| \int_a^b \big(f(x)\big)^2\, dx \right| =$$

$$= \left| \int_a^b \Big[\big(f(x)\big)^2 - P(x) \cdot f(x) \Big]\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b \left| \big(f(x)\big)^2 - P(x) \cdot f(x) \right| dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\, dx = \varepsilon \ , \ \forall \varepsilon > 0$$

Επομένως ισοδύναμα βρίσκουμε ότι:

$$\int_a^b \big(f(x)\big)^2\, dx = 0$$

Ισχυρισμός : $f(x) = 0 \ , \ \forall x \in [a, b]$

ΛΗΜΜΑ : Έστω $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ με

- $g(x) \geqslant 0 \ , \ \forall x \in [a, b]$
- $g(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$
- $\displaystyle\int_a^b g(x)\, dx = 0$

Τότε $g(x) = 0 \ , \ \forall x \in [a, b]$.

Απόδειξη του Λήμματος

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(t) = \int_a^t g(x)\ dx\ ,\ t \in [a,b]$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη (αφού η συνάρτηση $g(x)$ είναι συνεχής στο $[a,b]$) με παράγωγο:

$$\frac{d}{dt}\big(F(t)\big) = F'(t) = g(t) \geqslant 0\ ,\ \forall t \in [a,b]$$

Οπότε η συνάρτηση $F(t)$ είναι αύξουσα στο $[a,b]$.

$$t \in [a,b] : a \leqslant t \leqslant b \Rightarrow F(a) \leqslant F(t) \leqslant F(b) \xRightarrow{F(a)=F(b)=0} F(t) = 0\ ,\ \forall t \in [a,b]$$

με $F'(t) = 0\ ,\ \forall t \in [a,b]$. Άρα προκύπτει ότι $g(t) = 0\ ,\ \forall t \in [a,b]$.

Συνεπώς δεδομένου του παραπάνου Λήμματος που αποδείξαμε προκύπτει το ζητούμενο , δηλαδή ισχύει $f(x) = 0\ ,\ \forall x \in [a,b]$.

Πρόβλημα : Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και έστω ότι ισχύει:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)\ ,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδειχθεί ότι υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) = c \cdot x\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Λύση

Επειδή η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ είναι και ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε:

$$\int_0^x f(t+y)\ dt = \int_0^x \big(f(t) + f(y)\big)\ dt = \int_0^x f(t)\ dt + \int_0^x f(y)\ dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot f(y) = \int_0^x f(t+y)\ dt - \int_0^x f(t)\ dt =$$

$$= \int_{y}^{x+y} f(t)\ dt - \int_{0}^{x} f(t)\ dt =$$

$$= \int_{0}^{x+y} f(t)\ dt - \int_{0}^{x} f(t)\ dt - \int_{0}^{y} f(t)\ dt\ ,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Αφού τα x, y είναι αυθαίρετα αυτή η παραπάνω σχέση ισχύει αν βάλουμε όπου x το y και όπου y το x , τότε διαπιστώνουμε ότι:

$$x \cdot f(y) = y \cdot f(x)\ ,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Και συνεπώς για $y = 1$ προκύπτει το ζητούμενο δηλαδή είναι

$$f(x) = f(1) \cdot x\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Chebyshev Integral Inequality

Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις που είναι και οι δύο αύξουσες ή και οι δύο φθίνουσες στο $[a, b]$. Τότε ισχύει ότι:

$$\int_{a}^{b} f(x)\ dx\ \cdot\ \int_{a}^{b} g(x)\ dx \leqslant (b-a) \cdot \int_{a}^{b} f(x) \cdot g(x)\ dx$$

Απόδειξη

Ανεξαρτήτως αν είναι και οι δύο αύξουσες ή αν είναι και οι δύο φθίνουσες , γενικά θα ισχύει ότι:

$$\forall x, y \in [a, b] : \big(f(x) - f(y)\big) \cdot \big(g(x) - g(y)\big) \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{a}^{b} \Big(\big(f(x) - f(y)\big) \cdot \big(g(x) - g(y)\big) \Big)\ dy \geqslant 0\ ,\ \forall x \in [a, b] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{a}^{b} \Big(\int_{a}^{b} \Big(\big(f(x) - f(y)\big) \cdot \big(g(x) - g(y)\big) \Big)\ dy \Big)\ dx \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b \Big(f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(y) - g(x)\cdot f(y) + f(y)\cdot g(y) \Big)\, dy \right) dx \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (b-a)\cdot \int\limits_a^b f(x)\cdot g(x) dx - \int\limits_a^b f(x) dx \cdot \int\limits_a^b g(y) dy - \int\limits_a^b g(x) dx \cdot \int\limits_a^b f(y) dy + (b-a)\cdot \int\limits_a^b f(y)\cdot g(y) dy \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (b-a)\cdot \int\limits_a^b f(x)\cdot g(x)\ dx \geqslant \int\limits_a^b f(x)\ dx \ \cdot \ \int\limits_a^b g(x)\ dx$$

Η ισότητα ισχύει όταν

$$\forall x, y \in [a,b] : \big(f(x) - f(y)\big)\cdot\big(g(x) - g(y)\big) = 0$$

δηλαδή όταν μία τουλάχιστον από τις συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι σταθερή συνάρτηση.

Πρόβλημα : Να βρεθούν όλες οι πραγματικές λύσεις της εξίσωσης:

$$6^x + 1 = 8^x - 27^{x-1}$$

Λύση

$$6^x + 1 = 8^x - 27^{x-1} \Leftrightarrow \big(2^x\big)^3 + \big(-3^{x-1}\big)^3 + \big(-1\big)^3 = 6^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \big(2^x\big)^3 + \big(-3^{x-1}\big)^3 + \big(-1\big)^3 = 3\cdot\big(2^x\big)\cdot\big(-3^{x-1}\big)\cdot\big(-1\big) \Leftrightarrow$$

$$\xLongleftrightarrow[a^3+b^3+c^3-3\cdot a\cdot b\cdot c = \frac{1}{2}\cdot\big(a+b+c\big)\cdot\big[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\big]]{\text{ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ } EYLER}$$

$$\Leftrightarrow \big(2^x\big) + \big(-3^{x-1}\big) + \big(-1\big) = 0 \text{ ή } \big(2^x\big) = \big(-3^{x-1}\big) = \big(-1\big) \Leftrightarrow$$

ΑΔΥΝΑΤΗ

$$\Leftrightarrow \big(2^x\big) + \big(-3^{x-1}\big) + \big(-1\big) = 0 \text{ ή } \big(2^x\big) = \big(-3^{x-1}\big) = \big(-1\big) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^x - 3^{x-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cdot 2^{x-1} - 3^{x-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow 3^{x-1} - 2^{x-1} = 2^{x-1} - 1^{x-1}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t) = t^{x-1}$, $\forall t \in (0, +\infty)$.

- Η συνάρτηση $f(t)$ είναι συνεχής στα διαστήματα $[1,2]$ και $[2,3]$.
- Η συνάρτηση $f(t)$ είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(1,2)$ και $(2,3)$ με παράγωγο $\frac{d}{dt}\big(f(t)\big) = f'(t) = (x-1)\cdot t^{x-2}$

Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (1,2)$ και $\xi_2 \in (2,3)$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = f(2)-f(1) = 2^{x-1} - 1^{x-1}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(3)-f(2)}{3-2} = f(3)-f(2) = 3^{x-1} - 2^{x-1}$$

και συνεπώς έχουμε ότι:

$$3^{x-1} - 2^{x-1} = 2^{x-1} - 1^{x-1} \Leftrightarrow f'(\xi_2) = f'(\xi_1) \Leftrightarrow (x-1)\cdot\xi_2^{x-2} = (x-1)\cdot\xi_1^{x-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\cdot\xi_1^{x-2}\cdot\left[\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^{x-2} - 1\right] = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \text{ ή } x_2 = 2$$

Πρόβλημα : Δίνεται ακέραιος $n \geqslant 1$ και μη φθίνουσα συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι:

$$\int_0^1 f(x)\,dx \leqslant (n+1)\int_0^1 x^n \cdot f(x)\,dx$$

Να βρεθούν όλες οι μη φθίνουσες συνεχείς συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει η ισότητα.

Λύση

Θεωρούμε συνάρτησ $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = x^n$, $x \in [0,1]$ η οποία είναι αύξουσα στο $[0,1]$. Όμοιες υποθέσεις έχουμε και για τη συνάρτηση $f(x)$, δηλαδή γνωρίζουμε ότι είναι αύξουσα στο $[0,1]$. Συνεπώς για τις συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ έχουμε την ανισότητα του *Chebyshev Integral Inequality* ως εξής:

$$\int_0^1 f(x)\,dx \;\cdot\; \int_0^1 g(x)\,dx \leqslant (1-0)\cdot\int_0^1 f(x)\cdot g(x)\,dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\ dx\ \cdot\ \int_0^1 x^n\ dx \leqslant \int_0^1 x^n \cdot f(x)\ dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\ dx\ \cdot \frac{1}{n+1} \leqslant \int_0^1 x^n \cdot f(x)\ dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\ dx \leqslant (n+1) \int_0^1 x^n \cdot f(x)\ dx$$

Το ίσον στη παραπάνω ανισότητα ισχύει μόνο όταν

$\forall x, y \in [0,1] : \big(f(x) - f(y)\big) \cdot \big(x^n - y^n\big) = 0 \Leftrightarrow f(x)$ είναι σταθερή συνάρτηση στο $[0,1]$

Πρόβλημα : Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathbb{R}^n$ δείξτε:

$$\Big[||\overrightarrow{a}|| \cdot < \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} > \Big]^2 + \Big[||\overrightarrow{b}|| \cdot < \overrightarrow{a}, \overrightarrow{c} > \Big]^2 \leqslant ||\overrightarrow{a}|| \cdot ||\overrightarrow{b}|| \cdot \Big[||\overrightarrow{a}|| \cdot ||\overrightarrow{b}|| + | < \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} > | \Big] \cdot ||\overrightarrow{c}||^2$$

όπου $< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} >$ είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο.

Λύση

Η ζητούμενη ανισότητα μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα αν υποθέσουμε ότι:

$$\overrightarrow{a} = \big(a_1, a_2, \cdots, a_n\big) \in \mathbb{R}^n$$

$$\overrightarrow{b} = \big(b_1, b_2, \cdots, b_n\big) \in \mathbb{R}^n$$

$$\overrightarrow{c} = \big(c_1, c_2, \cdots, c_n\big) \in \mathbb{R}^n$$

οπότε την ξαναγράφουμε ως

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n b_k \cdot c_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n a_k \cdot c_k\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left|\sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k\right|\right] \cdot \left(\sum_{k=1}^n c_k^2\right)$$

Παρατηρούμε αρχικά ότι εάν ένα τουλαχιστον από τα διανύσματα $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα τότε η ανισότητα ισχύει ως ισότητα , αφού θα είναι $0 = 0$.

Συνεπώς υποθέτουμε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα. Επιπλέον παρατηρούμε ότι αρκεί να αποδείξουμε τη ζητούμενη ανισότητα για διανύσματα μέτρου 1 , διότι για κάθε άλλο διάνυσμα που δεν είναι μοναδιαίο μπορούμε να αντικαταστήσουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{a}$ με το διάνυσμα $\frac{\overrightarrow{a}}{||\overrightarrow{a}||}$ το οποίο είναι μοναδιαίο διάνυσμα και ομοίως και για τα υπόλοιπα. Οπότε είμαστε στην περίπτωση που $||\overrightarrow{a}|| = ||\overrightarrow{b}|| = ||\overrightarrow{c}|| = 1$ και άρα η αποδεικτέα ανίσωση γίνεται:

$$< \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} >^2 + < \overrightarrow{a}, \overrightarrow{c} >^2 \leqslant 1 + \big| < \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} > \big|$$

Επίσης μπορούμε να υποθέσουμε ότι το διάνυσμα $\overrightarrow{c}$ είναι στο επίπεδο που παράγουν τα διανύσματα $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$, γιατί αλλιώς θα ήταν $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$ με το $\overrightarrow{x}$ στο εν λόγω επίπεδο και το $\overrightarrow{y}$ κάθετο σε αυτό το επίπεδο , οπότε:

$$< \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} >=< \overrightarrow{b}, \overrightarrow{x}+\overrightarrow{y} >=< \overrightarrow{b}, \overrightarrow{x} > + < \overrightarrow{b}, \overrightarrow{y} >=< \overrightarrow{b}, \overrightarrow{x} > + \cancelto{0}{< \overrightarrow{b}, \overrightarrow{y} >} =< \overrightarrow{b}, \overrightarrow{x} >$$

όμοια έχουμε $< \overrightarrow{a}, \overrightarrow{c} >=< \overrightarrow{a}, \overrightarrow{x} >$, όπου στο δεξιό μέλος υπάρχει πλεονέκτημα αφού λόγω της καθετότητας

$$||\overrightarrow{x}||^2 \leqslant ||\overrightarrow{x}||^2 + ||\overrightarrow{y}||^2 = ||\overrightarrow{c}||^2$$

Αν ϑ και φ είναι οι γωνίες που σχηματίζει το διάνυσμα $\overrightarrow{c}$ με τα διανύμστα $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$, αντίστοιχα. Τότε η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\overrightarrow{a}$ και $\overrightarrow{b}$ θα είναι $\vartheta \pm \varphi$ (εξαρτάται από το διάνυσμα $\overrightarrow{c}$, δηλαδή αν είναι ανάμεσά τους ή όχι). Άρα έχουμε ότι η αποδεικτέα ανίσωση γράφεται:

$$\cos^2(\vartheta) + \cos^2(\varphi) \leqslant 1 + \big|\cos(\vartheta \pm \varphi)\big|$$

το οποίο ισχύει αφού:

$$\cos^2(\vartheta)+\cos^2(\varphi) = \frac{\cos(2\cdot\vartheta)+1}{2}+\frac{\cos(2\cdot\varphi)+1}{2} = 1+\frac{\cos(2\cdot\vartheta)+\cos(2\cdot\varphi)}{2} =$$

$$= 1+\cos(\vartheta+\varphi)\cdot\cos(\vartheta-\varphi) \leqslant 1+\big|\cos(\vartheta+\varphi)\cdot\cos(\vartheta-\varphi)\big| \leqslant 1+\big|\cos(\vartheta\pm\varphi)\big|$$

Δηλαδή αυτο που επιχειρήσαμε σε αυτό το πρόβλημα είναι να γράψουμε το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο με τον εξής τρόπο:

$$< \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} >= ||\overrightarrow{a}|| \cdot ||\overrightarrow{b}|| \cdot \cos(\vartheta_1)$$

$$< \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} >= ||\overrightarrow{b}|| \cdot ||\overrightarrow{c}|| \cdot \cos(\vartheta_2)$$
$$< \overrightarrow{a}, \overrightarrow{c} >= ||\overrightarrow{a}|| \cdot ||\overrightarrow{c}|| \cdot \cos(\vartheta_3)$$

όπου τα διανύσματα $\overrightarrow{a}$ και $\overrightarrow{b}$ δημιουργούν ένα επίπεδο και επιπλέον μπορούμε να γράψουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{c}$ ως το άθροισμα ενός διανύσματος που να βρίσκεται πάνω σε αυτό το επίπεδο , έστω $\overrightarrow{x}$ και ως ένα διάνυσμα που να είναι κάθετο σε αυτό το επίπεδο , έστω $\overrightarrow{y}$, δηλαδή έχουμε $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$. Οπότε η σχέση μεταξύ των γωνιών που σχηματίζονται θα είναι $\vartheta_1 = \vartheta_2 + \pm\vartheta_3$. Και στη συνέχεια η ζητούμενη ανισότητα γράφεται ισοδύναμα ως

$$\left[||\overrightarrow{a}|| \cdot ||\overrightarrow{b}|| \cdot ||\overrightarrow{c}||\right]^2 \cdot \left(\cos^2(\vartheta_2) + \cos^2(\vartheta_3) - \big(1 + \big|\cos(\vartheta_1)\big|\big) \right) \leqslant 0$$

και είναι προφανές ότι αν ένα τουλάχιστον από αυτά τα διανύσματα είναι το μηδενικό τότε η ανισότητα ισχύει ως ισότητα και συνεπώς αυτό που απομένει να δείξουμε είναι

$$\cos^2(k) + \cos^2(l) \leqslant 1 + \big|\cos(k \pm l)\big| \ , \ \forall k, l \in \mathbb{R}$$

το οποίο το αποδείξαμε προηγούμενως.

Ομοιόμορφη Σύγκλιση

Ορισμός:Έστω $f_n(x)$ ακολουθία συναρτήσεων στο A , λέμε ότι η $f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f(x)$ στο A αν και μόνο αν

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ ώστε } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad , \quad \forall n \geqslant n_0 \quad , \quad \forall x \in A$$

Παράδειγμα : Έστω $f_n(x) = x^n$ στο $A = \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Τότε η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = x^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f(x) = 0$ στο $A = \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Παράδειγμα : Έστω $f_n(x) = x^n$ στο $A = [0, 1]$. Τότε η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = x^n$ έχει σημειακή σύγκλιση στην $f(x) = 0$ στο $A = \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Ισχύουν τα εξής :

1)Αν $f_n(x) \xrightarrow{n \to +\infty} f(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο A και αν οι $f_n(x)$ είναι όλες φραγμένες , τότε και η $f(x)$ είναι φραγμένη.

Παράδειγμα : Έστω η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \frac{n}{n \cdot x + 1}$ στο $A = (0, 1]$, είναι $|f_n(x)| \leqslant n$, $\forall x \in A = (0, 1]$ με $f_n(x) \xrightarrow{n \to +\infty} f(x) = \frac{1}{x}$ η οποία $f(x)$ δεν είναι φραγμένη στο $A = (0, 1]$. Άρα δεν έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση για την ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \frac{n}{n \cdot x + 1}$ στο $A = (0, 1]$.

2)Αν $f_n(x) \xrightarrow{n \to +\infty} f(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο A και αν οι $f_n(x)$ είναι όλες συνεχείς , τότε και η $f(x)$ είναι συνεχής.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right) = \lim_{n \to +\infty} f_n(a)$$

Παράδειγμα : Έστω η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = x^n$ στο $A = [0, 1]$, όπου είναι συνεχείς οι $f_n(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $f_n(x) \xrightarrow{n \to +\infty} f(x) = \begin{cases} 0, 0 \leqslant x < 1 \\ 1, x = 1 \end{cases}$

3)Αν $f_n(x) \xrightarrow{n\to+\infty} f(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,b]$ και αν οι $f_n(x)$ είναι όλες ολοκληρώσιμες , τότε και η $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη.

$$\int_a^b f(x)\;dx = \int_a^b \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) dx = \lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\;dx\right)$$

4)Έστω $f_n(x)$ παραγωγίσιμες στο $[a,b]$ και $f_n'(x) \xrightarrow{n\to+\infty} f(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,b]$. Έστω επίσης ότι για κάποιο $x_0 \in [a,b]$ έχουμε ότι η ακολουθία $f_n(x_0)$ συγκλίνει σε κάποιο αριθμό. Τότε υπάρχει συνάρτηση $f(x)$ στο $[a,b]$ παραγωγίσιμη με $f_n(x) \xrightarrow{n\to+\infty} f(x)$ να συγκλίνει ομοιόμορφα και $f_n'(x) = g(x)$ στο (a,b).

Δυναμοσειρές

<u>Γεγονός</u> : Έστω $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot (x-c)^n$ δυναμοσειρά με διάστημα σύγκλισης Δ ($\Delta = \big(c-R, c+R\big)$). Τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του Δ ($[a,b] \subseteq \Delta$).

5)Κριτήριο $Weierstrass$:
Αν για τη σειρά $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ υπάρχει ακολουθία σταθερών M_n με

$$\big|f_n(x)\big| \leqslant M_n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \forall x \in A$$

και $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} M_n$ συγκλίνει τότε και η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο A.

<u>**Παράδειγμα**</u> : Η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(3^n \cdot x)}{2^n}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$, λόγω

$$\left|\frac{\cos(3^n \cdot x)}{2^n}\right| \leqslant \frac{1}{2^n} \ , \forall n \in \mathbb{N}$$

με

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2 \in \mathbb{R}$$

, σε κάποια $f(x)$ στο $\mathbb{R}$.
Σχολιάζουμε ότι αυτή η συνάρτηση η $f(x)$ δεν είναι πουθενά παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, είναι το διάσημο παράδειγμα του $Weierstrass$.

6)Αν R είναι η ακτίνα σύγκλισης της σειράς

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot (x-c)^n$$

, τότε R είναι η ακτίνα σύγκλισης της σειράς

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot a_n \cdot (x-c)^{n-1}$$

7)Αν

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot (x-c)^n$$

στο Δ , τότε για κάθε $x \in \Delta$ και για κάθε $a \in \Delta$ με $a < x$ έχουμε ότι:

$$\int_a^x f(t)\ dt = \int_a^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot (t-c)^n \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^x a_n \cdot (t-c)^n\ dt \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a_n}{n+1} \cdot \left((x-c)^{n+1} - (a-c)^{n+1} \right) \right)$$

.

<u>Σημείωση</u> : Όμοια για παραγώγους δυναμοσειρών (με προσοχή στα άκρα του Δ όπου μπορεί η δυναμοσειρά της f' να αποκλίνει).

<u>**Παράδειγμα**</u> : Έστω

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}\ ,\ x \in [-1,1]$$

τότε είναι

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n} \ , \ x \in [-1,1)$$

8)Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης:
Έστω

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant f_3(x) \leqslant \cdots \leqslant f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant \cdots \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \forall x \in A \subseteq \mathbb{R}$$

Έστω $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ συγκλίνει κατά σημείο για κάθε $x \in A$.
Αν

$$\int\limits_A f_n(x)\ dx \in \mathbb{R}$$

και

$$\int\limits_A f(x)\ dx \in \mathbb{R} \quad ,$$

τότε έχουμε ότι:

$$\int\limits_A f(x)\ dx = \int\limits_A \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{n\to+\infty} \left(\int\limits_A f_n(x)\ dx \right).$$

9)Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης:
Έστω $f_n(x)$ ακολουθία συναρτήσεων στο A με $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ να συγκλίνει κατά σημείο στο $A \subseteq \mathbb{R}$.
Έστω ότι υπάρχει συνάρτηση $g(x)$ στο A με

$$|f_n(x)| \leqslant g(x) \quad , \quad \forall x \in A$$

Αν

$$\int\limits_A f_n(x)\ dx \in \mathbb{R}$$

και

$$\int\limits_A f(x)\ dx \in \mathbb{R} \quad ,$$

και
$$\int_A g(x)\ dx \in \mathbb{R}$$
τότε ισχύει ότι:
$$\int_A f(x)\ dx = \int_A \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) dx = \lim_{n\to+\infty}\left(\int_A f_n(x)\ dx\right).$$

10) *Beppo – Levi* για σειρές:
Έστω $f_n(x)$ ακολουθία συναρτήσεων στο A με $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f(x)$ συγκλίνει κατά σημείο στο A.
Αν
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_A |f_n(x)|\ dx \in \mathbb{R}$$
και
$$\int_A \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\ dx \in \mathbb{R}$$
τότε έχουμε ότι:
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_A f_n(x)\ dx = \int_A \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\ dx = \int_A f(x)\ dx.$$

Πρόβλημα : Έστω $f(x) = 2\cdot x\cdot(1-x)$, $x \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε $f_n = f\circ f\circ\cdots\circ f$
α) Να βρεθεί το
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\ dx$$
β) Να υπολογίσετε
$$\int_0^1 f_n(x)\ dx\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

(*I.M.C.* 1998)

Λύση

α) Σταθεροποιούμε ένα $x_0 \in (0,1)$. Αν ορίσουμε την αναδρομική ακολουθία $x_n = f_n(x_0)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, τότε είναι εύκολο να δούμε ότι για κάθε $x_1 \in (0, \frac{1}{2}]$ έχουμε ότι $x_1 \leqslant f(x_1) \leqslant \frac{1}{2}$ και άρα $x_n \leqslant f(x_n) \leqslant \frac{1}{2}$. Οπότε έχουμε ότι η ακολουθία $\left(x_n\right)_{n=1}^{+\infty}$ είναι άνω φραγμένη και αύξουσα αφού $x_{n+1} = 2 \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, και ας είναι $l = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ και θα ικανοποιεί την σχέση $l = 2 \cdot l \cdot (1-l) \Leftrightarrow l = \frac{1}{2}$. Συνεπώς από το Θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε ότι:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\ dx = \frac{1}{2}$$

β) Θα αποδείξουμε με επαγωγή στο $n \in \mathbb{N}$ την σχέση

$$f_n(x) = \frac{1}{2} - 2^{2^n - 1} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^{2^n} \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$

Για $n = 1$ προκύπτει:

$$f_1(x) = f(x) = \frac{1}{2} - 2^{2^1-1} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^{2^1} = \frac{1}{2} - 2 \cdot \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} - 2 \cdot x^2 + 2 \cdot x - \frac{1}{2} = 2 \cdot x \cdot (1-x)$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο $n = k \in \mathbb{N}$, δηλαδή έστω ότι ισχύει ότι:

$$f_k(x) = \frac{1}{2} - 2^{2^k - 1} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^{2^k}$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για το $n = k+1$. Πράγματι ,

$$f_{k+1}(x) = f_k\big(f(x)\big) = \frac{1}{2} - 2^{2^k-1} \cdot \left(\left(\frac{1}{2} - 2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right) - \frac{1}{2}\right)^{2^k} =$$

$$= \frac{1}{2} - 2^{2^k-1} \cdot \left(-2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right)^{2^k} = \frac{1}{2} - 2^{2^{k+1}-1} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^{2^{k+1}}$$

Επομένως αποδείχθηκε. Τώρα έχουμε ότι:

$$\int_0^1 f_n(x)\ dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - 2^{2^n-1} \cdot \big(x-\frac{1}{2}\big)^{2^n}\right)\ dx =$$

$$= \frac{1}{2} - \left[\frac{2^{2^n-1}}{2^n+1} \cdot \left(x-\frac{1}{2}\right)^{2^n+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot(2^n+1)}\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Πρόβλημα : Θεωρούμε την ακολουθία $\big(x_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ που ορίζεται ως $x_1 = 2$ και

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 1 + \sqrt{x_n^2 + 2\cdot x_n + 5}}{2}\ ,\ n \in \mathbb{N}$$

Να δειχθεί ότι η ακολουθία

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^2 - 1}$$

είναι συγκλίνουσα και να βρεθεί το όριό της.

Λύση

Ο αριθμός x_{n+1} είναι η ρίζα της εξίσωσης:

$$x^2 - (x_n+1)\cdot x - 1 = 0$$

Έχουμε ότι:

$$x_{n+1}^2 - (x_n+1)\cdot x_{n+1} - 1 = 0 \Leftrightarrow x_{n+1}^2 - = (x_n+1)\cdot x_{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{x_n^2-1} = \frac{1}{x_{n+1}\cdot(x_n+1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{x_n+1} = \frac{x_{n+1}}{x_{n+1}^2-1}} \Leftrightarrow \frac{1}{x_{n+1}+1} = \frac{x_{n+1}-1}{x_{n+1}\cdot(x_n+1)}\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Οπότε είναι

$$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{x_{n+1}^2-1} = \frac{1 - x_{n+1} + x_{n+1}}{x_{n+1}^2-1} = \frac{x_{n+1}}{x_{n+1}^2-1} - \frac{1}{x_{n+1}+1} = \frac{1}{x_n+1} - \frac{1}{x_{n+1}+1} = z_n - z_{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{x_{n+1}^2-1} = z_n - z_{n+1} \ , \forall n \in \mathbb{N}}$$

όπου

$$z_n = \frac{1}{x_n+1} \ , \forall n \in \mathbb{N}$$

<u>**Ισχυρισμός**</u> : $\forall n \in \mathbb{N} : x_n > 1$
Η απόδειξη του ισχυρισμού θα γίνει επαγωγή στο $n \in \mathbb{N}$. Πράγματι ,
για $n = 1$ είναι $x_1 = 2 > 1$, το οποίο ισχύει.
Έστω ότι ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή ας είναι $x_n > 1$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για το $n+1$, είναι

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 1\sqrt{x_n^2 + 2 \cdot x_n + 5}}{2} > \frac{2+\sqrt{8}}{2} > 1$$

Τώρα έχουμε ότι

$$z_n = \frac{1}{x_n+1} = \frac{x_{n+1}}{x_{n+1}^2-1} = \frac{x_{n+1}}{x_{n+1}-1} \cdot z_{n+1} = \cancelto{>1}{\frac{x_{n+1}}{x_{n+1}-1}} \cdot z_{n+1} > z_{n+1} \ , \forall n \in \mathbb{N}$$

Δηλαδή η ακολουθία $\left(z_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα.
Επιπλέον ισχύει ότι:

$$0 < z_n = \frac{1}{x_n+1} < \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \ , \forall n \in \mathbb{N}$$

Δηλαδή η ακολουθία $\left(z_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι κάτω φραγμένη.
Οπότε υπάρχει το όριο της ακολουθίας $\left(z_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ και ας υποθέσουμε ότι είναι

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = z = \inf\{z_k : k \in \mathbb{N}\} \geqslant 0$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_{n+1}^2-1} = \lim_{n\to+\infty} \left(z_n - z_{n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty} z_n - \lim_{n\to+\infty} z_{n+1} = z - z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\xLeftrightarrow{x_{n+1}^2-1> \ , \forall n\in\mathbb{N}} \lim_{n\to+\infty} \left(x_{n+1}^2-1\right) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(x_{n+1}^2\right) = +\infty \Leftrightarrow$$

$$\xLeftrightarrow{x_n > 1 > 0 \ , \forall n \in \mathbb{N}} \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = +\infty$$

Άρα έχουμε

$$z = \lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n+1} = 0$$

Επομένως η ζητούμενη ακολουθία γράφεται:

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^2-1} = \frac{1}{x_1^2-1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{x_k^2-1} = \frac{1}{x_1^2-1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_{k+1}^2-1} =$$

$$= \frac{1}{x_1^2-1} + \sum_{k=1}^{n} \big(z_k - z_{k+1}\big) = \frac{1}{2^2-1} + \big(z_1-z_2\big) + \big(z_2-z_3\big) + \cdots + \big(z_n - z_{n+1}\big) =$$

$$= \frac{1}{3} + \big(z_1 - \cancel{z_2}\big) + \big(\cancel{z_2} - \cancel{z_3}\big) + \big(\cancel{z_3} - \cancel{z_4}\big) + \cdots + \big(\cancel{z_n} - z_{n+1}\big) =$$

$$= \frac{1}{3} + z_1 - z_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{x_1+1} - z_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2+1} - z_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - z_{n+1} = \frac{2}{3} - z_{n+1} \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Οπότε η ακολουθία $\big(y_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα ως διαφορά συγκλινουσών ακολουθιών με όριο ίσο με

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3} - z_{n+1}\right) = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}$$

Πρόβλημα : α) Να δειχθεί ότι:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(n \cdot \int_0^n \frac{\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{x\cdot(x^2+1)}\ dx \right) = \frac{\pi}{2}$$

β) Να υπολογιστεί το όριο:

$$\lim_{n\to+\infty} \left[n \cdot \left(n \cdot \int_0^n \frac{\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{x\cdot(x^2+1)}\ dx - \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

Λύση

α) Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με τύπο:

$$f_n(x) = n \cdot \frac{arctan(\frac{x}{n})}{x \cdot (1+x^2)} = \frac{\frac{arctan(\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}}}{1+x^2} \quad , \quad 0 < x \leqslant n$$

και επιπλέον ας είναι

$$f_n(x) = 0 \quad , \quad x \in (-\infty, 0] \cup (n, +\infty)$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{arctan(\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}} \cdot \frac{1}{1+x^2} \right) = \frac{1}{1+x^2} = f(x)$$

Αφού γνωρίζουμε ότι:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{arctan(\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}} = \lim_{\frac{x}{n}\to 0} \frac{arctan(\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}} = \lim_{y\to 0} \frac{arctan(y)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{1+y^2} = 1$$

Οπότε έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση άρα

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty} \Big(arctan(n) \Big) - arctan(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\ dx = \int_0^{+\infty} f(x)\ dx = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \right) dx =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n(x)\ dx \right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^{n} f_n(x)\ dx \right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^{n} n \cdot \frac{arctan(\frac{x}{n})}{x \cdot (1+x^2)}\ dx \right) = \lim_{n\to+\infty} \left(n \cdot \int_0^{n} \frac{arctan(\frac{x}{n})}{x \cdot (1+x^2)}\ dx \right)$$

β) Έχουμε ότι ισχύει:

$$\lim_{n\to+\infty} \left[n \cdot \left(n \cdot \int_0^{n} \frac{arctan(\frac{x}{n})}{x \cdot (1+x^2)}\ dx - \frac{\pi}{2} \right) \right] =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[n\cdot\int\limits_0^n\left(\frac{arctan(\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}}-1\right)\cdot\frac{1}{1+x^2}\ dx - arctan(\frac{1}{n})\right] =$$

$$= -1+\lim_{n\to+\infty}\left[n^2\cdot\left(\int\limits_0^1\left(\frac{arctan(x)}{x}-1\right)\cdot\frac{1}{1+n^2\cdot x^2}\ dx\right)\right] =$$

$$= -1+\lim_{n\to+\infty}\left[\int\limits_0^1\left(\frac{arctan(x)}{x}-1\right)\cdot\frac{1}{\frac{1}{n^2}+x^2}\ dx\right] =$$

$$= -1+\int\limits_0^1\left(\frac{arctan(x)}{x}-1\right)\cdot\frac{1}{x^2}\ dx = -1+\int\limits_0^1\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\cdot x^{(2\cdot k+1)-1}}{2\cdot k+1}-1\right)\cdot\frac{1}{x^2}\ dx =$$

$$= -1+\int\limits_0^1\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k\cdot x^{2\cdot k}}{2\cdot k+1}\right)\cdot\frac{1}{x^2}\ dx = -1+\int\limits_0^1\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k\cdot x^{2\cdot k-2}}{2\cdot k+1}\ dx =$$

$$= -1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2\cdot k+1}\cdot\left(\int\limits_0^1 x^{2\cdot k-2}\ dx\right) = -1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2\cdot k+1}\cdot\left[\frac{x^{2\cdot k-1}}{2\cdot k-1}\right]_{x=0}^{x=1} =$$

$$= -1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2\cdot k+1}\cdot\frac{1}{2\cdot k-1} = -1+\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\cdot\left(\frac{1}{2\cdot k-1}-\frac{1}{2\cdot k+1}\right) =$$

$$= -1+\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2\cdot k-1}-\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2\cdot k+1} = -1+\frac{1}{2}\cdot\Big(-\arctan(1)-\big(\arctan(1)-1\big)\Big) =$$

$$= -1-\arctan(1)+\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi+2}{4}$$

Αιτιολογούμε ότι:

$$\arctan(n)+\arctan(\frac{1}{n}) = \frac{\pi}{2}\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

Διότι αν θέσουμε

$$g(x) = \arctan(x)+\arctan(\frac{1}{x})\ ,\ x\in\mathbb{R}/\{k\cdot\pi : k\in\mathbb{Z}\}$$

Όπου η παράγωγος τη συνάρτησης $g(x)$ ισούται με

$$g'(x) = \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{\frac{1}{x^2}+1} \cdot \left(- \frac{1}{x^2} \right) = 0 \ , \ x \in \mathbb{R}/\left\{ k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Συνεπώς $g(x) = c$, $x \in \mathbb{R}/\left\{ k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$ και επειδή $g(1) = \frac{\pi}{2}$ έχουμε ότι:

$$g(x) = \arctan{(x)} + \arctan{(\frac{1}{x})} = \frac{\pi}{2} \ , \ x \in \mathbb{R}/\left\{ k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Επιπλέον το ανάπτυγμα $Taylor$ της συνάρτησης $h(x) = \arctan{(x)}$, $x \in \mathbb{R}$ στη περιοχή του μηδενός είναι

$$\arctan{(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2 \cdot k+1}}{2 \cdot k + 1} \ , \ x \in \mathbb{R}$$

Κάτι διαφορετικό όσο αφορά το πρώτο ερώτημα του προβλήματος είναι:

$$n \cdot \int_0^n \frac{\arctan{\left(\frac{x}{n}\right)}}{x \cdot (x^2+1)} \ dx = n \cdot \int_0^n \frac{1}{x \cdot (x^2+1)} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2 \cdot k+1}}{(2 \cdot k+1) \cdot n^{2 \cdot k+1}} \ dx =$$

$$= \int_0^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2 \cdot k}}{(x^2+1) \cdot (2 \cdot k+1) \cdot n^{2 \cdot k}} \ dx = \int_0^n \left(\frac{1}{x^2+1} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2 \cdot k}}{(x^2+1) \cdot (2 \cdot k+1) \cdot n^{2 \cdot k}} \right) dx =$$

$$= \int_0^n \frac{1}{1+x^2} \ dx + \int_0^n \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2 \cdot k}}{(x^2+1) \cdot (2 \cdot k+1) \cdot n^{2 \cdot k}} \ dx =$$

$$= \arctan{(n)} + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^n \frac{(-1)^k \cdot x^{2 \cdot k}}{(x^2+1) \cdot (2 \cdot k+1) \cdot n^{2 \cdot k}} \ dx \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\int_0^n \frac{(-1)^k \cdot x^{2 \cdot k}}{(x^2+1) \cdot (2 \cdot k+1) \cdot n^{2 \cdot k}} \ dx \leqslant \left| \int_0^n \frac{(-1)^k \cdot x^{2 \cdot k}}{(x^2+1) \cdot (2 \cdot k+1) \cdot n^{2 \cdot k}} \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^n \left| \frac{(-1)^k \cdot x^{2\cdot k}}{(x^2+1)\cdot(2\cdot k+1)\cdot n^{2\cdot k}} \right| \, dx \leqslant \int\limits_0^n \frac{x^{2\cdot k-2}}{(2\cdot k+1)\cdot n^{2\cdot k}} \, dx =$$

$$= \left[\frac{x^{2\cdot k-1}}{(2\cdot k-1)\cdot(2\cdot k+1)\cdot n^{2\cdot k}} \right]_{x=0}^{x=n} = \frac{1}{n\cdot(2\cdot k-1)\cdot(2\cdot k+1)} = \frac{1}{n\cdot(4\cdot k^2-1)} \ , \forall n \in \mathbb{N}$$

Επομένως έχουμε ότι:

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} \int\limits_0^n \frac{(-1)^k \cdot x^{2\cdot k}}{(x^2+1)\cdot(2\cdot k+1)\cdot n^{2\cdot k}} \, dx \right| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n\cdot(4\cdot k^2-1)} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2\cdot k-1)\cdot(2\cdot k+1)} =$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\cdot k-1}-\frac{1}{2\cdot k+1}\right) = \frac{1}{2\cdot n}\cdot\lim_{k\to+\infty}\left(\sum_{m=1}^{k}\left(\frac{1}{2\cdot m-1}-\frac{1}{2\cdot m+1}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\cdot n}\cdot\lim_{k\to+\infty}\left(\sum_{m=1}^{k}\left(a_m-a_{m+1}\right)\right) = \frac{1}{2\cdot n}\cdot\lim_{k\to+\infty}\Big(\left(a_1-a_2\right)+\left(a_2-a_3\right)+\left(a_3-a_4\right)+\cdots+\left(a_k-a_{k+1}\right)\Big) =$$

$$= \frac{1}{2\cdot n}\cdot\lim_{k\to+\infty}\left(a_1-a_{k+1}\right) = \frac{1}{2\cdot n}\cdot\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{2\cdot 1-1}-\frac{1}{2\cdot k+1}\right) = \frac{1}{2\cdot n} \ , \forall n \in \mathbb{N}$$

όπου θέσαμε για ευκολία

$$a_m = \frac{1}{2\cdot m-1} \ , \forall m \in \mathbb{N}$$

Επομένως από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\int\limits_0^n \frac{(-1)^k \cdot x^{2\cdot k}}{(x^2+1)\cdot(2\cdot k+1)\cdot n^{2\cdot k}} \, dx\right) = 0$$

Τελικά το όριο ισούται με

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n\cdot\int\limits_0^n \frac{\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{x\cdot(x^2+1)} \, dx\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\arctan(n)+\sum_{k=1}^{+\infty}\int\limits_0^n \frac{(-1)^k \cdot x^{2\cdot k}}{(x^2+1)\cdot(2\cdot k+1)\cdot n^{2\cdot k}} \, dx\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\Big(\arctan(n)\Big) = \frac{\pi}{2}$$

Πρόβλημα : Να υπολογιστεί το όριο:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[n^{k+1}\cdot\int\limits_0^1\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\cdot x^k\ dx\right]\quad,\quad \forall k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$$

Λύση

Αρχικά έχουμε ότι:

$$n^{k+1}\cdot\int\limits_0^1\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\cdot x^k\ dx=$$

$$\xrightarrow[x^k=\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^k\ ,\ dx=-\frac{2}{(1+y)^2}dy]{\text{θέτουμε } y=\frac{1-x}{1+x}\Leftrightarrow x=\frac{1-y}{1+y}}$$

$$=n^{k+1}\cdot\int\limits_1^0 y^n\cdot\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^k\cdot\frac{-2}{(1+y)^2}\ dy=2\cdot n^{k+1}\cdot\int\limits_0^1\frac{(1-y)^k}{(1+y)^{k+2}}\cdot y^n\ dy=2\cdot n^{k+1}\cdot\int\limits_0^1 y^n\cdot f(y)\ dy$$

όπου θέσαμε

$$f(y)=\frac{(1-y)^k}{(1+y)^{k+2}}\ ,\ y\in[0,1]$$

Παρατηρούμε για τη συνάρτηση $f(y)$ στο $[0,1]$ ότι ισχύει:

- Γράφουμε $f(y)=(1-y)^k\cdot g(y)$, όπου $g(y)=\dfrac{1}{(1+y)^{k+2}}$ και άρα
  $f'(y)=-k\cdot(1-y)^{k-1}\cdot g(y)+(1-y)^k)\cdot g'(y)=$
  $=(1-y)^{k-1}\cdot\Big(-k\cdot g(y)+(1-y)\cdot g'(y)\Big)$
  και οπότε βρίσκουμε
  $f''(y)=-(k-1)\cdot(1-y)^{k-2}\cdot\Big(-k\cdot g(y)+(1-y)\cdot g'(y)\Big)+$
  $+(1-y)^{k-1}\cdot\Big(-k\cdot g(y)+(1-y)\cdot g'(y)\Big)'$

και συνεχίζοντας με το ίδιο σκεπτικό διαπιστώνουμε ότι:
$f(1) = f'(1) = f''(1) = \cdots = f^{(k-1)}(1) = 0$

- $f^{(k+1)}(y)$ συνεχής στο $[0,1]$

Οπότε με ολοκλήρωση κατά παράγοντες k - φορές έχουμε:

$$\int_0^1 y^n \cdot f(y)\ dy = \int_0^1 \left(\frac{y^{n+1}}{n+1}\right)' \cdot f(y)\ dy = \left[\frac{y^{n+1}}{n+1} \cdot f(y)\right]_{y=0}^{y=1} - \frac{1}{n+1} \cdot \int_0^1 y^{n+1} \cdot f'(y) dy =$$

$$= -\frac{1}{n+1} \cdot \int_0^1 y^{n+1} \cdot f'(y)\ dy = -\frac{1}{n+1} \cdot \int_0^1 \left(\frac{y^{n+2}}{n+2}\right)' \cdot f'(y)\ dy = \frac{(-1)^2}{(n+1)\cdot(n+2)} \cdot \int_0^1 y^{n+2} \cdot f''(y)\ dy =$$

$$= \cdots = \frac{(-1)^k}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot \ldots \cdot(n+k)} \cdot \int_0^1 y^{n+k} \cdot f^{(k)}(y)\ dy =$$

$$= \frac{(-1)^k}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot \ldots \cdot(n+k)} \cdot \int_0^1 \left(\frac{y^{n+k+1}}{n+k+1}\right)' \cdot f^{(k)}(y)\ dy =$$

$$= \frac{(-1)^k}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot \ldots \cdot(n+k)} \cdot \left[\frac{y^{n+k+1}}{n+k+1} \cdot f^{(k)}(y)\right]_{y=0}^{y=1} -$$

$$- \frac{(-1)^k}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot \ldots \cdot(n+k)\cdot(n+k+1)} \cdot \int_0^1 y^{n+k+1} \cdot f^{(k+1)}(y)\ dy =$$

$$= \frac{(-1)^k \cdot f^{(k)}(1)}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot \ldots \cdot(n+k)\cdot(n+k+1)} +$$

$$+ \frac{(-1)^{k+1}}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot \ldots \cdot(n+k)\cdot(n+k+1)} \cdot \int_0^1 y^{n+k+1} \cdot f^{(k+1)}(y)\ dy$$

Επομένως το ζητούμενο όριο ισούται με

$$\lim_{n\to+\infty} \left[n^{k+1} \cdot \int_0^1 \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n \cdot x^k\ dx\right] = \lim_{n\to+\infty} \left(2 \cdot n^{k+1} \cdot \int_0^1 y^n \cdot f(y)\ dy\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2\cdot n^{k+1}\cdot(-1)^k\cdot f^{(k)}(1)}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k)\cdot(n+k+1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{2\cdot n^{k+1}\cdot(-1)^{k+1}}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k)\cdot(n+k+1)}\cdot\int\limits_0^1 y^{n+k+1}\cdot f^{(k+1)}(y)\ dy\right)=$$

$$= 2\cdot(-1)^k\cdot f^{(k)}(1)+0 = 2\cdot(-1)^k\cdot f^{(k)}(1)$$

Γνωρίζουμε τα παρακάτω όρια:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2\cdot n^{k+1}\cdot(-1)^k\cdot f^{(k)}(1)}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k)\cdot(n+k+1)}\right)=2\cdot(-1)^k\cdot f^{(k)}(1)$$

και επειδή η συνάρτηση $f^{(k+1)}(y)$ στο $[0,1]$ είναι συνεχής , έχουμε ότι είναι και φραγμένη στο $[0,1]$ και άρα υπάρχει $M>0$ τέτοιο ώστε $\left|f^{(k+1)}(y)\right|\leqslant M$, $\forall y\in[0,1]$, τότε ισχύει:

$$0\leqslant\left|\int\limits_0^1 y^{n+k+1}\cdot f^{(k+1)}(y)\ dy\right|\leqslant M\cdot\int\limits_0^1 y^{n+k+1}\ dy=\frac{M}{n+k+1}$$

και αφού

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{M}{n+k+1}=0$$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\int\limits_0^1 y^{n+k+1}\cdot f^{(k+1)}(y)\ dy\right|=0\Leftrightarrow\lim_{n\to+\infty}\int\limits_0^1 y^{n+k+1}\cdot f^{(k+1)}(y)\ dy=0$$

Άρα έχουμε ότι:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2\cdot n^{k+1}\cdot(-1)^{k+1}}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k)\cdot(n+k+1)}\cdot\int\limits_0^1 y^{n+k+1}\cdot f^{(k+1)}(y)\ dy\right)=2\cdot(-1)^{k+1}\cdot 0=0$$

Ανισότητες

Ανισότητα $Young$: Έστω $a, b \in [0, +\infty)$ και $p, q \in (1, +\infty)$ με $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ τότε

$$a \cdot b \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

με το ίσον να ισχύει μόνο όταν $a^p = b^q$.

Απόδειξη

Επειδή η συνάρτηση $f(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$ είναι κοίλη , έχουμε εξόρισμού ότι ισχύει:

$f\big(k \cdot x + (1-k) \cdot y\big) \geqslant k \cdot f(x) + (1-k) \cdot f(y)$, $\forall x, y \in (0, +)$, $\forall k \in [0,1] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln\big(k \cdot x + (1-k) \cdot y\big) \geqslant k \cdot \ln x + (1-k) \cdot \ln y$, $\forall x, y \in (0, +)$, $\forall k \in [0,1]$
Οπότε εφαρμόζουμε για $x = a^p$, $y = b^q$, $k = \frac{1}{p} \Rightarrow 1 - k = \frac{1}{q}$ και προκύπτει

$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geqslant \frac{1}{p} \cdot \ln a^p + \frac{1}{q} \cdot \ln b^q \Leftrightarrow \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geqslant \ln\big(a \cdot b\big) \Leftrightarrow a \cdot b \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

με το ίσον να ισχύει στην περίπτωση μόνο που ισχύει ότι $a^p = b^q$.

Ανισότητα $Holder$: Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $\big(x_1, x_2, \cdots, x_n\big), \big(y_1, y_2, \cdots, y_n\big) \in \mathbb{R}^n$ και επιπλέον έστω $p, q \in (1, +\infty)$ με $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ τότε

$$\sum_{k=1}^{n} \big|x_k \cdot y_k\big| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \big|x_k\big|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \big|y_k\big|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Απόδειξη

Θεωρούμε τους αριθμούς:

$$a = \left(\sum_{k=1}^{n} \big|x_k\big|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$b = \left(\sum_{k=1}^{n} \big|y_k\big|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Συνεπώς από την ανισότητα $Young$ έχουμε ότι:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k|}{a} \cdot \frac{|y_k|}{b} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{|x_k|^p}{a} + \frac{|y_k|^q}{b} \right) = \frac{1}{a^p} \cdot \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p + \frac{1}{b^q} \cdot \sum_{k=1}^{n} |y_k|^q = 1$$

<u>Ανισότητα $Minkowski$</u> : Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $(x_1, x_2, \cdots, x_n), (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ και επιπλέον έστω $p \in (1, +\infty)$ τότε

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

<u>**Απόδειξη**</u>

$$\forall k \in \{1, 2, \cdots, n\} : |x_k + y_k|^p = |x_k + y_k| \cdot |x_k + y_k|^{p-1} \leqslant$$
$$\leqslant |x_k| \cdot |x_k + y_k|^{p-1} + |y_k| \cdot |x_k + y_k|^{p-1}$$

Εφαρμόζουμε την ανισότητα $Holder$ ως εξής:

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{\left(\frac{p}{p-1}\right) \cdot (p-1)} \right)^{1-\frac{1}{p}} +$$
$$+ \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{\left(\frac{p}{p-1}\right) \cdot (p-1)} \right)^{1-\frac{1}{p}} =$$
$$= \left[\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \right)^{1-\frac{1}{p}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

<u>Ανισότητα Αριθμητικού - Γεωμετρικού - Αρμονικού Μέσου</u> : Έστω $n \in \mathbb{N}$ και θεωρούμε τους αριθμούς $x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$, τότε ισχύει ότι:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

με το ίσον να ισχύει στη περίπτωση που ισχύει ότι $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Πρόβλημα : Να υπολογιστεί το όριο:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot e^{-2\cdot x}\,dx\right)$$

Λύση

Θα κάνουμε εφαρμογή του Θεωρήματος Μονότονης Σύγκλισης. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων:

$$f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \ , \ \forall x \in [0,+\infty) \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Από την ανισότητα Αριθμητικού Γεωμετρικού Μέσου έχουμε ότι:

$$\frac{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)+\left(1+\frac{x}{n}\right)+\cdots+\left(1+\frac{x}{n}\right)}{n+1} \geqslant \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} \Leftrightarrow$$

π

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1} \geqslant \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \Leftrightarrow f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x) \ , \ \forall x \in [0,+\infty) \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

και ισχύει ότι:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \ , \ \forall x \in [0,+\infty)$$

Οπότε το ζητούμενο όριο ισούται με

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot e^{-2\cdot x}\,dx\right) = \int_0^{+\infty} e^x \cdot e^{-2\cdot x}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1$$

Minkowski Inequality : Έστω I_1 , I_2 να είναι δύο ανοιχτά σύνολα του $\mathbb{R}$

και έστω η συνεχής συνάρτηση $F : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Τότε για κάθε $p \in [1, +\infty)$ έχουμε ότι:

$$\int\limits_{I_2} \left(\int\limits_{I_1} \Big(F(x,y) \Big)^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} dy \geqslant \left(\int\limits_{I_1} \left(\int\limits_{I_2} F(x,y) \, dy \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Αν $p \in (1, +\infty)$ τότε η ισότητα στην ανισότητα ισχύει όταν υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $g : I_1 \to \mathbb{R}_+$ και $h : I_2 \to \mathbb{R}_+$ τέτοιες ώστε να είναι $F(x,y) = g(x) \cdot h(y)$.

<u>Συνέπεια</u> : Αν $f, g \in C\big(I, \mathbb{C}\big)$, όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό σύνολο και για κάθε $p \in [1, +\infty)$ ισχύει ότι:

$$\left(\int\limits_I \big| f(x) + g(x) \big|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int\limits_I \big| f(x) \big|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_I \big| g(x) \big|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

<u>*Holder Inequality*</u> : Έστω $p, q \in (1, +\infty)$ με $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f, g \in C\big(I, \mathbb{C}\big)$, τέτοιες ώστε:

$$\int\limits_I \big| f(x) \big|^p \, dx \in \mathbb{R}$$

και

$$\int\limits_I \big| g(x) \big|^q \, dx \in \mathbb{R}$$

Τότε

$$\int\limits_I \big| f(x) \cdot g(x) \big| \, dx \in \mathbb{R}$$

και

$$\left| \int\limits_I f(x) \cdot g(x) \, dx \right| \leqslant \int\limits_I \big| f(x) \big| \cdot \big| g(x) \big| \, dx \leqslant \left(\int\limits_I \big| f(x) \big|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_I \big| g(x) \big|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

Η ισότητα στην δεύτερη ανισότητα ισχύει αν και μόνο αν υπάρχει πραγματικός αριθμός $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε να ισχύει:

$$\big| g(x) \big| = \lambda \cdot \big| f(x) \big|^{p-1} \text{ , } p \in (1, +\infty)$$

$$\left|g(x)\right| \leqslant \lambda \text{ , όταν } f = 0$$

$$\text{και αν } p = 1 \text{ τότε η ισότητα ισχύει για } |g| = \lambda \text{ , όταν } f \neq 0$$

<u>*Hardy's Inequality*</u> : Έστω $0 \leqslant c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$ και $p \in (1, +\infty)$ τότε ισχύει η ανισότητα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{n} \right)^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} c_n^p$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $c_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$

<u>*Integral Version*</u> : Έστω $f \in C\big((0, +\infty), [0, +\infty)\big)$ και $o \in (1, +\infty)$. Τότε ισχύει η ανισότητα

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \int_0^x f(y)\ dy \right)^p dx \leqslant \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \cdot \int_0^{+\infty} \big(f(x)\big)^p\ dx$$

<u>Απόδειξη</u>

$$\left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \int_0^x f(y)\ dy \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$\xrightarrow[dy = x \cdot dt \ ,\ y = 0 : t = 0 \ ,\ y = x : t = 1]{y = y(t) = t \cdot x \Leftrightarrow t = t(y) = \frac{y}{x}}$$

$$= \left(\int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 f(t \cdot x)\ dt \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \int_0^1 \left(\int_0^{+\infty} \big(f(t \cdot x)\big)^p\ dx \right)^{\frac{1}{p}} dt =$$

$$\xrightarrow[dx = \frac{1}{t} \cdot ds \ ,\ x = 0 : s = 0 \ ,\ x \to +\infty : s \to +\infty]{s = s(x) = t \cdot x \Leftrightarrow x = x(s) = \frac{s}{t}}$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{+\infty} \left(f(s)\right)^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \frac{1}{t^{\frac{1}{p}}} \, dt = \frac{p}{p-1} \cdot \left(\int_0^{+\infty} \left(f(s)\right)^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}}$$

Poincare Inequality : Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με την f' να είναι συνεχής και $f(0) = 0$, τότε ισχύει η ανισότητα:

$$\sup_{x \in [0,1]} \left\{ \left| f(x) \right| \right\} \leqslant \left(\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Απόδειξη

Επειδή $f(0) = 0$ έχουμε ότι:

$$\left| f(x) \right| = \left| \int_0^x f'(t) \, dt \right| \leqslant \left(\int_0^x \left(f'(t)\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^x 1^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_0^x \left(f'(t)\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ , } \forall x \in [0,1]$$

Επομένως ισχύει:

$$\sup_{x \in [0,1]} \left\{ \left| f(x) \right| \right\} \leqslant \left(\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Πρόβλημα : Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$\int_0^1 f(x) \, dx = k = \int_0^1 x \cdot f(x) \, dx$$

Να αποδειχθεί ότι:

$$\int_0^1 f(x)^2 \, dx \geqslant 4 \cdot k^2$$

Λύση

1^{ος} τρόπος

Έχουμε ότι:

$$\int_0^1 f(x)^2\,dx = \int_0^1 \big(3\cdot x-1\big)^2\,dx \cdot \int_0^1 f(x)^2\,dx \geqslant \left(\int_0^1 \big(3\cdot x-1\big)\cdot f(x)\,dx\right)^2 =$$

$$= \left(3\cdot\int_0^1 x\cdot f(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 = \big(3\cdot k-k\big)^2 = 4\cdot k^2$$

Με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $f(x)=2\cdot k\cdot\big(3\cdot x-1\big)$.

2^{ος} τρόπος

Σημειώνουμε ότι:

$$\int_0^1 \big(f(x)-6\cdot k\cdot x\big)^2\,dx = \int_0^1 f(x)^2\,dx - 12\cdot k\cdot\int_0^1 x\cdot f(x)\,dx + 36\cdot k^2\cdot\int_0^1 x^2\,dx =$$

$$= \int_0^1 f(x)^2\,dx - 12\cdot k^2 + 12\cdot k^2 = \int_0^1 f(x)^2\,dx$$

Επιπλέον από την ανισότητα $Cauchy-Schwartz$ έχουμε ότι:

$$\int_0^1 f(x)^2\,dx = \int_0^1 \big(f(x)-6\cdot k\cdot x\big)^2\,dx \geqslant \left(\int_0^1 \big(f(x)-6\cdot k\cdot x\big)\,dx\right)^2 = \big(k-3\cdot k\big)^2 = 4\cdot k^2$$

Πρόβλημα : Έστω $n \geqslant 1$ ένας ακέραιος και ας είναι $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, τέτοια ώστε

$$\int_0^1 x^k\cdot f(x)\,dx = 1, \forall k\in\{0,1,2,...,n-1\}$$

Να δείχθει ότι
$$\int_0^1 \big(f(x)\big)^2 \, dx \geqslant n^2$$

<u>Λύση</u>

<u>$1^{\text{ος}}$ τρόπος</u>

Ορίζουμε για τον ακέραιο $n \geqslant 1$, τον $n \times n$ πίνακα του *Hilbert* ως εξής $H_n = \big[a_{ij}\big]$, όπου
$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1} \ , \forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}$$
δηλαδή θα είναι της μορφής
$$H_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} \\ . & . & \cdots & . & . \\ . & . & \cdots & . & . \\ . & . & \cdots & . & . \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{2 \cdot n-3} & \frac{1}{2 \cdot n-2} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2 \cdot n-2} & \frac{1}{2 \cdot n-1} \end{bmatrix}$$
Είναι γνωστό ότι ο πίνακας H_n είναι αντιστρέψιμος και εάν $H_n^{-1} = \big[b_{ij}\big]$, τότε ισχύει ότι
$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} b_{ij} = n^2$$
Τότε μπορούμε να βρούμε πραγματικούς αριθμούς $p_0, p_1, p_2, ..., p_{n-2}, p_{n-1}$ τέτοιους ώστε:
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{p_{i-1}}{i+j-1} = 1 \ , \ 1 \leqslant j \leqslant n$$

Οπότε το πολυώνυμο

$$p(x)=\sum_{k=0}^{n-1} p_k \cdot x^k$$

ικανοποιεί τις συνθήκες

$$\int_0^1 x^k \cdot p(x)\ dx = 1\ ,\ \forall k \in \{0,1,2,...,n-1\}$$

Συνεπώς, ο αριθμός

$$\sum_{k=0}^{n-1} p_k$$

είναι το άθροισμα όλων των στοιχείων του πίνακα H_n^{-1} και άρα είναι

$$\sum_{k=0}^{n-1} p_k = n^2$$

Τώρα ας είναι $f(x)$ μια πραγματική συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο $[0,1]$ τέτοια ώστε

$$\int_0^1 x^k \cdot f(x)\ dx = 1\ ,\ \forall k \in \{0,1,2,...,n-2,n-1\}$$

Τότε για το παραπάνω πολυώνυμο $p(x)$ που κατασκευάσαμε έχουμε ότι:

$$\forall x \in [0,1] : \big(f(x)\big)^2 - 2f(x)\cdot p(x) + \big(p(x)\big)^2 = \big(f(x)-p(x)\big)^2 \geqslant 0$$

ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση έχουμε ότι:

$$\int_0^1 \big(f(x)\big)^2\ dx \geqslant 2\cdot \int_0^1 f(x)\cdot p(x)\ dx - \int_0^1 \big(p(x)\big)^2\ dx =$$

$$= 2\cdot \sum_{k=0}^{n-1} p_k \cdot \int_0^1 x^k \cdot f(x)\ dx - \sum_{k=1}^{n-1} p_k \cdot \int_0^1 x^k \cdot p(x)\ dx = 2\cdot \sum_{k=0}^{n-1} p_k - \sum_{k=0}^{n-1} p_k = \sum_{k=0}^{n-1} p_k = n^2$$

$\underline{2^{ος} \text{ τρόπος}}$

Υπάρχει πολυώνυμο $p(x) = p_0 + p_1 \cdot x + p_2 \cdot x^2 + \cdots + p^{n-1} \cdot x^{n-1}$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\int_0^1 x^k \cdot p(x)\ dx = 1\ ,\ \forall k \in \{0, 1, 2, ..., n-2, n-1\}$$

Άρα έχουμε ότι:

$$\int_0^1 x^k \cdot \big(f(x) - p(x)\big)\ dx = 0\ ,\ \forall k \in \{0, 1, 2, ..., n-2, n-1\}$$

και συνεπώς

$$\int_0^1 p(x) \cdot \big(f(x) - p(x)\big)\ dx = 0$$

Οπότε έχουμε ότι

$$0 \leqslant \int_0^1 \big(f(x) - p(x)\big)^2\ dx = \int_0^1 f(x) \cdot \big(f(x) - p(x)\big)\ dx =$$

$$= \int_0^1 \big(f(x)\big)^2\ dx - \sum_{k=0}^{n-1} p_{k+1} \cdot \int_0^1 x^k \cdot f(x)\ dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \big(f(x)\big)^2\ dx \geqslant p(1) = p_0 + p_1 + \cdots + p_{n-1}$$

Μένει να δείξουμε ότι:

$$p_0 + p_1 + \cdots + p_{n-1} = n^2$$

Riemann Sum : Έστω η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ η οποία είναι ολοκληρώσιμη , τότε

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)}{n} = \int_0^1 f(x)\ dx$$

Πρόβλημα : Να υπολογιστεί το όριο:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1^n + 2^n + \cdots + n^n}{n^n}$$

Λύση

Θεωρούμε την ακολουθία

$$a_n = \frac{1^n + 2^n + \cdots + n^n}{n^n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} = \sum_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^n \ , \forall n \in \mathbb{N}$$

Έστω $k \in \mathbb{N}$ σταθερός αριθμός. Για $n > k$, έχουμε

$$a_n \geqslant \left(\frac{n}{n}\right)^n + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{n-k}{n}\right)^n$$

Άρα

$$\liminf_{n\to+\infty} (a_n) \geqslant \liminf_{n\to+\infty} \left(\left(\frac{n}{n}\right)^n + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{n-k}{n}\right)^n\right) = 1+e^{-1}+e^{-2}+\cdots+e^{-k} \ , \forall k \in \mathbb{N}$$

Οπότε

$$\lim_{k\to+\infty} \left(\liminf_{n\to+\infty} (a_n)\right) \geqslant \lim_{k\to+\infty} \left(1+e^{-1}+e^{-2}+\cdots+e^{k}\right) = \frac{e}{e-1} \Leftrightarrow \liminf_{n\to+\infty} (a_n) \geqslant \frac{e}{e-1}$$

Τώρα για $n \geqslant k$ έχουμε ότι:

$$1 + \left(-\frac{k}{n}\right) \leqslant e^{-\frac{k}{n}} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \leqslant e^{-k}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{1+n\cdot\left(1-\frac{k}{n}\right)}{n+1}\geqslant\sqrt[n+1]{\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n}}\Rightarrow\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n}\leqslant\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n+1},\ \forall n\geqslant k$$

Συνεπώς επειδή η ακολουθία $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη έχουμε ότι συγκλίνει. Τότε

$$\forall n\in\mathbb{N}: a_n=\sum_{i=0}^{n-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)^{n}\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}e^{-i}\leqslant\sum_{i=0}^{+\infty}e^{-i}=\frac{e}{e-1}$$

Άρα

$$\limsup_{n\to+\infty}\left(a_n\right)\leqslant\frac{e}{e-1}$$

Επομένως ισχύει ότι:

$$\frac{e}{e-1}\leqslant\liminf_{n\to+\infty}\left(a_n\right)\leqslant\limsup_{n\to+\infty}\left(a_n\right)\leqslant\frac{e}{e-1}$$

Οπότε

$$\liminf_{n\to+\infty}\left(a_n\right)=\limsup_{n\to+\infty}\left(a_n\right)=\frac{e}{e-1}$$

Δηλαδή

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\frac{e}{e-1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1^n+2^n+\cdots+n^n}{n^n}$$

Πρόβλημα : Έστω η συνάρτηση $f:(0,1]\to(0,+\infty)$ η οποία έχει τις εξής ιδιότητες:

1. η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο $(0,1]$,
2. $f'(1)>0$ και
3. η συνάρτηση $g(x)=\ln\big(f(x)\big),\forall x\in(0,1]$ έχει φθίνουσα παράγωγο.

Ορίζουμε την ακολουθία $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ με τύπο $x_n=\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)\right]^n$. Να αποδειχθεί ότι:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \begin{cases} 0, f(1) < 1 \\ \text{ή} \\ \frac{1}{1-e^{-f'(1)}}, f(1) = 1 \\ \text{ή} \\ +\infty, f(1) > 1 \end{cases}$$

<u>Λύση</u>

- Όταν $\underline{f(1) < 1}$ και επειδή η $g(x)$ έχει φθίνουσα παράγωγο, δηλαδή είναι κοίλη, έπεται πως η γραφική παράσταση της $g(x)$ είναι ' κάτω ' από την εφαπτομένη της $g(x)$ στο σημείο $x = 1$. Άρα έχουμε ότι:
$g(x) \leqslant g'(1)(x-1) + g(1) \Leftrightarrow \ln\big(f(x)\big) \leqslant \dfrac{f'(1)}{f(1)}(x-1) + \ln\big(f(1)\big) \Leftrightarrow$
$\xLeftrightarrow{f(1)<1, x-1\leqslant 0} \ln\big(f(x)\big) \leqslant \dfrac{f'(1)}{f(1)}(x-1) + \ln\big(f(1)\big) \leqslant f'(1)(x-1) + \ln\big(f(1)\big) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \ln\big(f(x)\big) \leqslant f'(1)(x-1) + \ln\big(f(1)\big) \Leftrightarrow \boxed{f(x) \leqslant f(1)e^{xf'(1)-f'(1)}, \forall x \in (0,1]}$
και συνεπώς είναι $f\left(\dfrac{k}{n}\right) \leqslant f(1)e^{\frac{k}{n}f'(1)-f'(1)}, \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$
$\Rightarrow \left[f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right]^n \leqslant \big(f(1)\big)^n e^{f'(1)(k-n)}, \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}, \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow x_n = \left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right]^n + \left[f\left(\dfrac{2}{n}\right)\right]^n + \cdots + \left[f\left(\dfrac{n}{n}\right)\right]^n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right]^n \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(1)^n e^{f'(1)(k-n)}$,
για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα $0 < x_n \leqslant \big(f(1)\big)^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{-f'(1)k}, \forall n \in \mathbb{N}$ και επειδή είναι
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\big(f(1)\big)^n \sum_{k=0}^{n-1} e^{-f'(1)k} = \lim_{n\to+\infty}\big(f(1)\big)^n \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-f'(1)k} = 0 \cdot \dfrac{1}{1-e^{-f'(1)}} = 0$
διαπιστώνουμε ότι $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

- Όταν $\underline{f(1) = 1}$, συμφωνα με την προηγούμενη περίπτωση έχουμε ότι:
$x_n \leqslant \big(f(1)\big)^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{-f'(1)k} \Rightarrow x_n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} e^{-f'(1)k}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$
$\Rightarrow \limsup x_n \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-f'(1)k} = \dfrac{1}{1-e^{-f'(1)}}$. Έστω $k \in \mathbb{N}$ σταθερός αριθ-

μός. Για $n > k$, έχουμε

$$x_n \geqslant \left[f\Big(\frac{n}{n}\Big)\right]^n + \left[f\Big(\frac{n-1}{n}\Big)\right]^n + \cdots + \left[f\Big(\frac{n-k}{n}\Big)\right]^n = \sum_{i=0}^{k} \left[f\Big(1-\frac{i}{n}\Big)\right]^n \Rightarrow$$

$$f'(1) = \frac{f'(1)}{f(1)} = g'(1) = \lim_{n\to+\infty} \frac{g\Big(1-\frac{i}{n}\Big) - g(1)}{\Big(1-\frac{i}{n}\Big) - 1} = -\frac{1}{i} \lim_{n\to+\infty} n \cdot g\Big(1-\frac{i}{n}\Big) =$$

$$= -\frac{1}{i} \lim_{n\to+\infty} n \cdot \ln\left[f\Big(1-\frac{i}{n}\Big)\right] = -\frac{1}{i} \lim_{n\to+\infty} \ln\left[f\Big(1-\frac{i}{n}\Big)\right]^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \ln\left[f\Big(1-\frac{i}{n}\Big)\right]^n = e^{\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left[\left[f(1-\frac{i}{n})\right]^n\right]} = e^{-if'(1)}, \forall i \in \{0,1,2,\ldots,k\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \liminf x_n \geqslant \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{k} \left[f\Big(1-\frac{i}{n}\Big)\right]^n = \sum_{i=0}^{k} \lim_{n\to+\infty} \left[f\Big(1-\frac{i}{n}\Big)\right]^n = \sum_{i=0}^{k} e^{-if'(1)}, \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \liminf x_n \geqslant \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-if'(1)} = \frac{1}{1-e^{-f'(1)}} \text{ και επομένως ισχύει } \lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{1-e^{-f'(1)}}.$$

- Όταν $\underline{f(1) > 1}$, ισχύει ότι $x_n \geqslant \left[f\big(1-\frac{1}{n}\big)\right]^n, \forall n \in \mathbb{N}$. Υπάρχει αρκετά μικρό $\epsilon > 0$ ώστε $f(1) - \epsilon = a > 1$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$, να έχουμε $f\big(1-\frac{1}{n}\big) \geqslant f(1) - \epsilon = a > 1 \Rightarrow \left[f\big(1-\frac{1}{n}\big)\right]^n \geqslant a^n \Rightarrow x_n \geqslant a^n$. Οπότε $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

The Stolz − Cesaro Theorem

Πρόταση 1 : Έστω $\left(b_n\right)_{n=1}^{+\infty}$ ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty \quad ,$$

τότε για κάθε ακολουθία $\left(a_n\right)_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}$, τότε ισχύουν οι ανισότητες

$$\lim_{n\to+\infty} \sup \left\{ \frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{n-2}+b_{n-1}+b_n} \right\} \leqslant \lim_{n\to+\infty} \sup \left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} \qquad (1)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \inf \left\{ \frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{n-2}+b_{n-1}+b_n} \right\} \geqslant \lim_{n\to+\infty} \inf \left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} \qquad (2)$$

Και επιπλέον αν υπάρχει το όριο της ακολουθίας $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=1}^{+\infty}$, τότε

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{n-2}+b_{n-1}+b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

Απόδειξη :

Αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα (1) , διότι η ανισότητα (2) προκύπτει εφαρμόζοντας την ανισότητα (1) αλλά αντί για a_n βάζουμε $-a_n$.
Υποθέτουμε ότι:

$$l = \lim_{n\to+\infty} \sup \left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists k \in \mathbb{N} : \left| \sup \left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} - l \right| < \varepsilon, \forall n \geqslant k \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{\text{τότε } \forall p > l \text{ επιλέγουμε } \varepsilon = p - l > 0} \forall n \geqslant k : \frac{a_n}{b_n} < p$$

Θεωρούμε τις ακολουθίες

$$A_n = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

και ας είναι

$$B_n = b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{n-2}+b_{n-1}+b_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

όπου έχουμε ότι:

$$\lim_{n\to+\infty} B_n = +\infty$$

Τότε παρατηρούμε ότι:

$$\forall n \geqslant k : A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_{k-1} + a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n <$$

$$< \big(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{k-3}+a_{k-2}+a_{k-1}\big)+p\cdot\big(b_k+b_{k+1}+b_{k+2}+\cdots+b_{n-2}+b_{n-1}+b_n\big) =$$

$$= A_{k-1} + p \cdot \big(B_n - B_{k-1}\big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A_n}{B_n} < \frac{A_{k-1}}{B_n} + p \cdot \big(1 - \frac{B_{k-1}}{B_n}\big), \forall n \geqslant k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sup\left\{\frac{A_n}{B_n}\right\} \leqslant \lim_{n\to+\infty} \sup\left\{\frac{A_{k-1}}{B_n} + p \cdot \big(1 - \frac{B_{k-1}}{B_n}\big)\right\} = p$$

Αφού ισχύει ότι:

$$\lim_{n\to+\infty} \sup\left\{\frac{A_{k-1}}{B_n}\right\} = 0 = \lim_{n\to+\infty} \left\{\frac{B_{k-1}}{B_n}\right\}$$

Άρα διαπιστώνουμε ότι:

$$\lim_{n\to+\infty} \sup\left\{\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \cdots b_{n-2} + b_{n-1} + b_n}\right\} \leqslant p \quad , \quad \forall p > l$$

Όταν τώρα το p πάει πολύ κοντά στο l έχουμε ως αποτέλεσμα ότι (δηλαδή όταν $p \to l$):

$$\lim_{n\to+\infty} \sup\left\{\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \cdots b_{n-2} + b_{n-1} + b_n}\right\} \leqslant l = \lim_{n\to+\infty} \sup\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$$

Η ανισότητα (2) αποδεικνύεται εύκολα ως εξής αντικαθιστόντας στην ανισότητα (1) όπου a_n την $-a_n$, δηλαδή:

$$\lim_{n\to+\infty} \inf\left\{\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-2} + b_{n-1} + b_n}\right\} =$$

$$= -\lim_{n\to+\infty} \sup\left\{ - \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-2} + b_{n-1} + b_n}\right\} =$$

$$= -\lim_{n\to+\infty} \sup\left\{\frac{(-a_1) + (-a_2) + (-a_3) + \cdots + (-a_{n-2}) + (-a_{n-1}) + (-a_n)}{b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-2} + b_{n-1} + b_n}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant -\lim_{n\to+\infty}\sup\left\{\frac{(-a_n)}{b_n}\right\} =$$

$$= -\lim_{n\to+\infty}\sup\left\{-\frac{a_n}{b_n}\right\} = \lim_{n\to+\infty}\inf\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$$

Δεδομένου ότι γνωρίζουμε

$$\sup\big\{-a_n\big\} = -\inf\big\{a_n\big\} \text{ και } \inf\big\{-a_n\big\} = -\sup\big\{a_n\big\}$$

<u>**Παρατήρηση**</u>:

(1) Εάν η $\big(y_n\big)_{n=1}^{+\infty}$ είναι μια γνήσια αύξουσα ακολουθία με

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty \qquad ,$$

τότε για κάθε ακολουθία $\big(x_n\big)_{n=1}^{+\infty}$ έχουμε τις ακόλουθες ανισότητες:

$$\lim_{n\to+\infty}\sup\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} \leqslant \lim_{n\to+\infty}\sup\left\{\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\right\} \qquad (1)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\inf\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} \geqslant \lim_{n\to+\infty}\inf\left\{\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\right\} \qquad (2)$$

Και επιπλέον αν υπάρχει το όριο της ακολουθίας $\left(\dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\right)_{n=1}^{+\infty}$, τότε

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$$

"Additive" Cesaros's Theorem

<u>**Πρόταση 2**</u> :Για κάθε ακολουθία $\big(a_n\big)_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}$, ισχύουν οι ανισότητες

$$\lim_{n\to+\infty}\sup\left\{\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n}{n}\right\} \leqslant \lim_{n\to+\infty}\sup\{a_n\} \qquad (1)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\inf\left\{\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n}{n}\right\}\geqslant\lim_{n\to+\infty}\inf\{a_n\} \qquad (2)$$

Και επιπλέον αν υπάρχει το όριο της ακολουθίας $\left(a_n\right)_{n=1}^{+\infty}$, τότε

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n}{n}=\lim_{n\to+\infty}a_n$$

Απόδειξη :

Κάνουμε εφαρμογή της Πρότασης 1 ως εξής , εφαρμόζουμε για $b_n = 1$

Παρατήρηση:

(1) Για κάθε ακολουθία $\left(x_n\right)_{n=1}^{+\infty}$ έχουμε τις ακόλουθες ανισότητες:

$$\lim_{n\to+\infty}\sup\left\{\frac{x_n}{n}\right\}\leqslant\lim_{n\to+\infty}\sup\left\{x_n-x_{n-1}\right\} \qquad (1)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\inf\left\{\frac{x_n}{n}\right\}\geqslant\lim_{n\to+\infty}\inf\left\{x_n-x_{n-1}\right\} \qquad (2)$$

Και επιπλέον αν υπάρχει το όριο της ακολουθίας $\left(x_n-x_{n-1}\right)_{n=1}^{+\infty}$, τότε

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{n}=\lim_{n\to+\infty}\left(x_n-x_{n-1}\right)$$

$''Multiplicative''\ Cesaros's\ Theorem$

Πρόταση 3 :Για κάθε ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών $\left(a_n\right)_{n=1}^{+\infty}$, ισχύουν οι ανισότητες

$$\lim_{n\to+\infty}\sup\left\{\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_{n-2}\cdot a_{n-1}\cdot a_n}\right\}\leqslant\lim_{n\to+\infty}\sup\{a_n\} \qquad (1)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \inf\left\{ \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n} \right\} \geqslant \lim_{n\to+\infty} \inf\{a_n\} \qquad (2)$$

Και επιπλέον αν υπάρχει το όριο της ακολουθίας $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$, τότε

$$\lim_{n\to+\infty} \left\{ \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n} \right\} = \lim_{n\to+\infty} a_n$$

<u>**Απόδειξη**</u> :

Γράφουμε

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n} = e^{\frac{b_1+b_2+b_3+\dots+b_{n-2}+b_{n-1}+b_n}{n}} \quad ,$$

όπου $b_n = \ln a_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Κάνουμε εφαρμογή της Πρότασης 2 ως εξής , εφαρμόζουμε για $b_n = \ln a_n, \forall n \in \mathbb{N}$.
Οπότε έχουμε ότι:

$$\lim_{n\to+\infty} \sup\left\{ \frac{b_1+b_2+b_3+\dots+b_{n-1}+b_{n-2}+b_n}{n} \right\} \leqslant \lim_{n\to+\infty} \sup\{b_n\}$$

και επιπλέον

$$\lim_{n\to+\infty} \inf\left\{ \frac{b_1+b_2+b_3+\dots+b_{n-1}+b_{n-2}+b_n}{n} \right\} \geqslant \lim_{n\to+\infty} \inf\{b_n\}$$

Άρα έχουμε ότι:

$$\lim_{n\to+\infty} \sup\left\{ \ln\left(\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n} \right) \right\} \leqslant \lim_{n\to+\infty} \sup\{\ln a_n\}$$

και με όμοιο τρόπο έχουμε ότι:

$$\lim_{n\to+\infty} \inf\left\{ \ln\left(\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n} \right) \right\} \geqslant \lim_{n\to+\infty} \inf\{\ln a_n\}$$

Έπειτα προκύπτει το ζητούμενο

$$\lim_{n\to+\infty} \sup\left\{ \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n} \right\} \leqslant \lim_{n\to+\infty} \sup\{a_n\}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \inf\left\{\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\dots\cdot a_{n-2}\cdot a_{n-1}\cdot a_n}\right\} \geqslant \lim_{n\to+\infty} \inf\{a_n\}$$

<u>Παρατήρηση</u>:

(1) Για κάθε ακολουθία $\left(x_n\right)_{n=1}^{+\infty}$ θετικών πραγματικών αριθμών έχουμε τις ακόλουθες ανισότητες:

$$\lim_{n\to+\infty} \sup\left\{\sqrt[n]{x_n}\right\} \leqslant \lim_{n\to+\infty} \sup\left\{\frac{x_n}{x_{n-1}}\right\} \qquad (1)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \inf\left\{\sqrt[n]{x_n}\right\} \geqslant \lim_{n\to+\infty} \inf\left\{\frac{x_n}{x_{n-1}}\right\} \qquad (2)$$

Και επιπλέον αν υπάρχει το όριο της ακολουθίας $\left(\dfrac{x_n}{x_{n-1}}\right)_{n=1}^{+\infty}$, τότε

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{x_n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x_n}{x_{n-1}}\right)$$

<u>Παράδειγμα</u> : Το όριο

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\ln(2)\cdot\ln(3)\cdots\ln(n)} = +\infty$$

<u>Πρόβλημα</u> : Έστω $k>1$ ένας πραγματικός αριθμός. Να υπολογιστούν:

$$(a)\ L = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \left(\frac{k}{\sqrt[n]{x}+k-1}\right)^n dx$$

$$(b) \lim_{n\to+\infty}\left[n\cdot\left(L-\int_0^1\left(\frac{k}{\sqrt[n]{x}+k-1}\right)^n dx\right)\right]$$

Λύση

1$^{\text{ος}}$ τρόπος : Θεωρούμε

$$\forall n \in \mathbb{N} : I_n = \int\limits_0^1 \left(\frac{k}{\sqrt[n]{x} + k - 1} \right)^n dx$$

$$\xRightarrow[dx = n \cdot y^{n-1}\ dy\ ,x=0:y=0\ ,x=1:y=1]{\text{Θέτουμε } y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow x = y^n}$$

$$\Rightarrow I_n = \int\limits_0^1 \left(\frac{k}{y+k-1} \right)^n \cdot n \cdot y^{n-1}\ dy = n \cdot k^n \cdot \int\limits_0^1 \left(\frac{y}{y+k-1} \right)^{n-1} \cdot \frac{1}{y+k-1}\ dy$$

$$\xRightarrow[dy = \frac{k-1}{(1-t)^2}\ dt\ ,y=0:t=0\ ,y=1:t=\frac{1}{k}]{\text{Θέτουμε } t = \frac{y}{y+k-1} \Leftrightarrow y = \frac{t}{1-t} \cdot (k-1)}$$

$$\Rightarrow I_n = n \cdot k^n \cdot \int\limits_0^{\frac{1}{k}} t^{n-1} \cdot \frac{t}{\frac{t}{1-t} \cdot (k-1)} \cdot \frac{k-1}{(1-t)^2}\ dt = n \cdot k^n \cdot \int\limits_0^{\frac{1}{k}} \frac{t^{n-1}}{1-t}\ dt = k^n \cdot \int\limits_0^{\frac{1}{k}} \frac{\frac{d}{dt}\left(t^n\right)}{1-t}\ dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_n = k^n \cdot \left(\left[\frac{t^n}{1-t} \right]_{t=0}^{t=\frac{1}{k}} - k^n \cdot \int\limits_0^{\frac{1}{k}} \frac{t^n}{(1-t)^2}\ dt \right) = \frac{1}{1-\frac{1}{k}} - k^n \cdot \int\limits_0^{\frac{1}{k}} \frac{t^n}{(1-t)^2}\ dt =$$

$$= \frac{k}{k-1} - k^n \cdot \int\limits_0^{\frac{1}{k}} \frac{t^n}{(1-t)^2}\ dt \Rightarrow I_n = \frac{k}{k-1} - k^n \cdot \int\limits_0^{\frac{1}{k}} \frac{t^n}{(1-t)^2}\ dt$$

Έπειτα παρατηρούμε ότι:

$$0 < k^n \cdot \int\limits_0^{\frac{1}{k}} \frac{t^n}{(1-t)^2}\ dt < k^n \cdot \int\limits_0^{\frac{1}{k}} \frac{t^n}{(1-\frac{1}{k})^2}\ dt = k^n \cdot \frac{k^2}{(k-1)^2} \cdot \int\limits_0^{\frac{1}{k}} t^n\ dt =$$

$$= \frac{k^{n+2}}{(k-1)^2} \cdot \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_{t=0}^{t=\frac{1}{k}} = \frac{k}{(n+1)\cdot(k-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < k^n \cdot \int\limits_0^{\frac{1}{k}} \frac{t^n}{(1-t)^2}\ dt < \frac{k}{(n+1)\cdot(k-1)^2}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(k^n \cdot \int\limits_0^{\frac{1}{k}} \frac{t^n}{(1-t)^2}\ dt\right) = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{k}{k-1}$$

<u>$2^{ος}$ τρόπος</u> : Το πρόβλημα το αντιμετώπίζουμε στην εξής γενική περίπτωση, επιθυμούμε (καλούμαστε) να υπολογίσουμε το όριο (εντοπίζοντας αν γίνεται τις λιγότερες υποθέσεις που πρέπει να ικανοποιεί η συνάρτηση f)

$$L = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 \left(f(\sqrt[n]{x})\right)^n\ dx$$

για κάποια προφανώς συνεχή συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ όπου ένα αναμενόμενο δεδομένο είναι ότι $f(1)=1$, καθώς υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής για να έχει νόημα το ορισμένο ολοκλήρωμα και όσο για την υπόθεση $f(1)=1$ είναι αναμενόμενη όπως αναφέρουμε επειδή εφόσον η συνάρτηση f είναι συνεχής ισχύει η αρχή της μεταφοράς, δηλαδή $\forall x\in(0,1)$: $\sqrt[n]{x} \xrightarrow{n\to+\infty} 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(\sqrt[n]{x}) \xrightarrow{n\to+\infty} f(1)$. Συνεπώς, όλες αυτές οι δυσκολίες μπορούν να αντιμετωπιστούν με την πρόσθετη συνθήκη ότι $f(1)=1$, διότι όπως γνωρίζουμε $1^{+\infty}$ είναι απροσδιοτιστία, παρεπιπτόντως νομίζοντας ότι η συνθήκη $f(1)=1$ δυσκολεύει το πρόβλημα μετά από κάποια σκέψη παρατηρούμε τελικά ότι μπορούμε να επωφελειθούμε μέσω αυτής, καθώς ξεπερνώντας τις δυσκολίες που έχουν δοθεί σαν υπόθεση θα καταλήξουμε σε ένα εντυπωσιακό αποτέλεσμα.
Συνοψίζοντας, μέχρι ώρας έχουμε για υπόθεση ότι : δίδεται μια συνεχής συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(1)=1$ και ζητείται για αρχή να υπολογιστεί το όριο

$$L = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 \left(f(\sqrt[n]{x})\right)^n\ dx.$$

Προχωρόντας στην επίλυση του όριου θέτουμε για ευκολία την ακολουθία ολοκληρωμάτων $I_n = \int\limits_0^1 \big(f(\sqrt[n]{x})\big)^n \, dx$,$\forall n \geqslant 2$. Στη συνέχεια κάνοντας την προφανή αλλαγή μεταβλητής στην ακολουθία ολοκληρωμάτων προκύπτει ότι:

$$I_n = \int\limits_0^1 \big(f(\sqrt[n]{x})\big)^n \, dx = \xrightarrow[x=0:t=0, x=1:t=1]{t=\sqrt[n]{x} \Leftrightarrow x=t^n, dx=nt^{n-1}dt} = \int\limits_0^1 n\big(f(t)\big)^n t^{n-1} \, dt =$$

$$= n\int\limits_0^1 f(t)\big(tf(t)\big)^{n-1} \, dt = \xrightarrow[\text{και όχι μόνο } \ldots, \text{ έστω η συνάρτη } g(t)=tf(t), t\in[0,1]]{\text{Θέτουμε, με την πεποίθηση ότι θα διευκολυνθούμε}} =$$

$$= n\int\limits_0^1 f(t)\big(g(t)\big)^{n-1} \, dt.$$

Θα θέλαμε να θέσουμε στο τελευταίο ολοκλήρωμα $y = g(t)$, αλλά δεν γνωρίζουμε αν η συνάρτηση $g(t), t \in [0,1]$ αντιστρέφεται στο κλειστό διάστημα $[0,1]$. Οπότε αυτό που θα θέλαμε να ικανοποιείται είναι το εξής:

Επιθυμία: $g'(t) \neq 0, \forall t \in (0,1)$.

Δηλαδή η επιπλέον υπόθεση που κάνουμε είναι ότι η συνάρτηση $g(t) = tf(t)$ αντιστρέφεται στο κλειστό διάστημα $[0,1]$ και επιπλέον υπάρχει και η πάραγωγος της συνάρτησης $g(t) = tf(t)$ στο ανοιχτό διάστημα $(0,1)$. Ισοδύναμα, θέλουμε να υπάρχει η συνάρτηση παράγωγος $g'(t) = f(t) + tf'(t) \neq 0, \forall t \in (0,1)$ ή να υπάρχει η παράγωγος της συνάρτησης f στο ανοιχτό διάστημα $(0,1)$ ικανοποιώντας την συνθήκη $f(t) + tf'(t) \neq 0, \forall t \in (0,1)$, παρατήρηση η συνάρτηση f δεν θελουμε να είναι της μορφής $\dfrac{c}{t}$ και επειδή είναι $f(1) = 1$, τότε ζητάμε $f(t) \neq \dfrac{1}{t}, \forall t \in (0,1]$.

Τώρα με την επιπλέον υπόθεση ότι $g'(t) \neq 0, \forall t \in (0,1)$, πρόκυπτει ότι ορίζεται η ατντίστροφη της συνάρτησης $g(t)$ στο κλειστό διάστημα $[0,1]$. Ας είναι $h \equiv g^{-1} : g\big([0,1]\big) \to [0,1]$ με $\big(g \circ h\big)(y) = y, \forall y \in g\big([0,1]\big)$ απ΄ όπου έχουμε ότι $h'(y) = \dfrac{1}{g'\big(h(y)\big)}$, σημειώνουμε ότι επειδή η συνάρτηση g είναι συνεχής και

$1-1$ στο κλειστό διάστημα $[0,1]$, συνεπάγεται ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως μονότονη και παρατηρούμε ότι $0=0f(0)=g(0)<1=f(1)=1f(1)=g(1)$ και άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο κλειστό διάστημα $[0,1]$. Άρα η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη και είναι γνησίως αύξουσα στο κλειστό διάστημα $[0,1]$ και συνεπώς $g\big([0,1]\big)=\big[g(0),g(1)\big]=[0,1]$. Με αυτές τις υποθέσεις μπορούμε να θέσουμε στο τελευταίο ολοκλήρωμα $y=g(t)$, τότε:

$$I_n = n\int_0^1 f(t)\big(g(t)\big)^{n-1}\,dt = \xrightarrow[t=0:\,y=g(0)=0,\,t=1:\,y=g(1)=1]{y=g(t)\Leftrightarrow t=h(y),\,dt=h'(y)dy} =$$

$$= n\int_0^1 f\big(h(y)\big)\big(g(h(y))\big)^{n-1}h'(y)\,dy = n\int_0^1 f\big(h(y)\big)y^{n-1}h'(y)\,dy = n\int_0^1 y^{n-1}f\big(h(y)\big)h'(y)\,dy =$$

$$\xrightarrow{\text{Θέτουμε τη συνάρτηση } F(y)=f\big(h(y)\big)h'(y),\,y\in[0,1]} = n\int_0^1 y^{n-1}F(y)\,dy =$$

$$= \xrightarrow[x=0:\,y=0,\,x=1:\,y=1]{x=y^n\Leftrightarrow y=\sqrt[n]{x},\,dx=ny^{n-1}dy} = \int_0^1 F(\sqrt[n]{x})\,dx$$

Τέλος, όλοι γνωρίζουμε ότι:

$$I_n = \int_0^1 F(\sqrt[n]{x})\,dx \xrightarrow{n\to+\infty} F(1) \Leftrightarrow L = \lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 F(\sqrt[n]{x})\,dx = F(1),$$

όπου $F(1)=f\big(h(1)\big)h'(1)=\dfrac{f\big(g^{-1}(1)\big)}{g'\big(h(1)\big)}=\dfrac{f(1)}{f\big(h(1)\big)+h(1)f'\big(h(1)\big)}=\dfrac{1}{f(1)+f'(1)}=\dfrac{1}{1+f'(1)}$. Επομένως, το ζητούμενο όριο ισούται με

$$L = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \big(f(\sqrt[n]{x})\big)^n\,dx = \frac{1}{1+f'(1)}$$

Τελικά το πρόβλημα που προκύπτει είναι το εξής:

Πρόβλημα: Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(1)=1$

και $f(t)+tf'(t)\neq 0, \forall t\in(0,1)$. Τότε να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_0^1 \left(f(\sqrt[n]{x})\right)^n\,dx=\dfrac{1}{1+f'(1)}$.

Στη συνέχεια, τίθεται το ερώτημα, να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{n\to+\infty}\left[n\Big(L-\int\limits_0^1 \left(f(\sqrt[n]{x})\right)^n\,dx\Big)\right]$$

με τις παραπάνω συνθήκες για την συνάρτηση f.

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε ότι:

$$\frac{\left(L-I_{n+1}\right)-\left(L-I_n\right)}{\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}}=\frac{I_n-I_{n+1}}{\dfrac{n-n-1}{n(n+1)}}=-n(n+1)\left(I_n-I_{n+1}\right)$$

$$n\left(L-I_n\right)=n\left(F(1)-\int\limits_0^1 F\left(\sqrt[n]{x}\right)\,dx\right)=n\int\limits_0^1\Big(F(1)-F\left(\sqrt[n]{x}\right)\Big)\,dx=$$

$$=\int\limits_0^1\frac{F(1)-F\left(\sqrt[n]{x}\right)}{\dfrac{1}{n}}\,dx=\int\limits_0^1\frac{F\left(\sqrt[n]{x}\right)-F(1)}{\sqrt[n]{x}-1}\frac{1-\sqrt[n]{x}}{\frac{1}{n}}\,dx$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{F\left(\sqrt[n]{x}\right)-F(1)}{\sqrt[n]{x}-1}=\lim_{u\to1}\frac{F(u)-F(1)}{u-1}=F'(1)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\sqrt[n]{x}}{\frac{1}{n}}=-\lim_{n\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=-\lim_{u\to0}\frac{x^u-1}{u}=-\ln x$$

Άλγεβρα

Πρόβλημα : Έστω $SL_2(\mathbb{Z}) = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z}) : det(A) = 1\}$
α) Να βρεθούν πίνακες $A, B, C \in SL_2(\mathbb{Z})$ έτσι ώστε $A^2 + B^2 = C^2$.
β) Δείξτε ότι δεν υπάρχουν πίνακες $A, B, C \in SL_2(\mathbb{Z})$ έτσι ώστε $A^4+B^4 = C^4$.

Λύση

α) Από το Θεώρημα $Cayley - Hamilton$ έχουμε τα εξής για τους πίνακες $A, B, C \in SL_2(\mathbb{Z})$:

$$A^2 - (tr(A)) \cdot A + \mathbb{I}_2 = \mathbb{O}_2$$
$$B^2 - (tr(B)) \cdot B + \mathbb{I}_2 = \mathbb{O}_2$$
$$C^2 - (tr(C)) \cdot C + \mathbb{I}_2 = \mathbb{O}_2$$
$$\xRightarrow{A^2 + B^2 = C^2}$$
$$A^2 + B^2 - (tr(A)) \cdot A - (tr(B)) \cdot B + 2 \cdot \mathbb{I}_2 = C^2 - (tr(C)) \cdot C + \mathbb{I}_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cancel{A^2 + B^2} - (tr(A)) \cdot A - (tr(B)) \cdot B + \cancel{2} \cdot \mathbb{I}_2 = \cancel{C^2} - (tr(C)) \cdot C + \cancel{\mathbb{I}_2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (tr(A)) \cdot A + (tr(B)) \cdot B - (tr(C)) \cdot C = \mathbb{I}_2$$

και έπεται ότι , παίρνοντας ίχνη στην παραπάνω σχέση

$$(tr(A))^2 + (tr(B))^2 - (tr(C))^2 = 2$$

και για ευκολία επιλέγουμε $tr(A) = 1$, $tr(B) = 1$, $tr(C) = 0$ τότε θα πρέπει να ισχύει ότι

$$A + B = \mathbb{I}_2 \text{ και } C^2 = -\mathbb{I}_2$$

Οπότε βρίσκουμε

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

β) Γνωρίζουμε ότι:

$$A^2 = (tr(A)) \cdot A - \mathbb{I}_2$$
$$B^2 = (tr(B)) \cdot B - \mathbb{I}_2$$
$$C^2 = (tr(C)) \cdot C - \mathbb{I}_2$$

$$\xRightarrow{a=tr(A)\ ,\ b=tr(B)\ ,\ c=tr(C)}$$

$$A^4 = \Big(a \cdot A - \mathbb{I}_2\Big)^2 = a^2 \cdot A^2 - 2 \cdot a \cdot A + \mathbb{I}_2$$

$$B^4 = \Big(b \cdot B - \mathbb{I}_2\Big)^2 = b^2 \cdot B^2 - 2 \cdot b \cdot B + \mathbb{I}_2$$

$$C^4 = \Big(c \cdot C - \mathbb{I}_2\Big)^2 = c^2 \cdot C^2 - 2 \cdot c \cdot C + \mathbb{I}_2$$

$$\Rightarrow$$

$$A^4 = (a^3 - 2 \cdot a) \cdot A + (1 - a^2) \cdot \mathbb{I}_2$$
$$B^4 = (b^3 - 2 \cdot b) \cdot B + (1 - b^2) \cdot \mathbb{I}_2$$
$$C^4 = (c^3 - 2 \cdot c) \cdot C + (1 - c^2) \cdot \mathbb{I}_2$$

$$\xRightarrow{A^4 + B^4 = C^4}$$

$$(a^3 - 2 \cdot a) \cdot A + (b^3 - 2 \cdot b) \cdot B + (2 - a^2 - b^2) \cdot \mathbb{I}_2 = (c^3 - 2 \cdot c) \cdot C + (1 - c^2) \cdot \mathbb{I}_2$$

Και έπειτα παίρνουμε ίχνη στην παραπάνω σχέση και έχουμε ότι

$$a^4 - 2 \cdot a^2 + b^4 - 2 \cdot b^2 + 4 - 2 \cdot \big(a^2 + b^2\big) = c^4 - 2 \cdot c^2 + 2 - 2 \cdot c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^4 + b^4 - c^4 = 4 \cdot \big(a^2 + b^2 - c^2\big) - 2$$

Οπότε έχουμε ότι

$$a^4 + b^4 - c^4 \equiv 2\big(mod4\big) \Rightarrow a : \text{περιττός}\ ,\ b : \text{περιττός}\ ,\ c : \text{άρτιος}$$

από αυτό προκύπτει ότι:

$$a^4 + b^4 - c^4 \equiv 2\big(mod8\big)$$

δηλαδή είναι

$$4 \cdot \big(a^2 + b^2 - c^2\big) - 2 \equiv 2\big(mod8\big) \Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 \equiv 1\big(mod2\big)$$

το οποίο είναι αδύνατο , διότι ισχύει:

$$a^2 + b^2 - c^2 \equiv 0\big(mod2\big)$$

Συνεπώς δεν υπάρχουν τέτοιοι πίνακες.

Ερώτημα : Το Τελευταίο Θεώρημα του $Fermat$ έχει αποδειχθεί στο δακτύλιο των ακεραίων , τι συμβαίνει όμως στο δακτύλιο των πινάκων ;
Γνωρίζουμε την εξής ταυτότητα:

$$\left(x^2-y^2\right)^2+\left(2\cdot x\cdot y\right)^2=\left(x^2+y^2\right)^2 \ , \ \forall x,y\in\mathbb{Z}$$

τότε βρίσκουμε ότι

$$\begin{bmatrix}0 & x^2-y^2\\ 1 & 0\end{bmatrix}^4+\begin{bmatrix}0 & 2\cdot x\cdot y\\ 1 & 0\end{bmatrix}^4=\begin{bmatrix}0 & x^2+y^2\\ 1 & 0\end{bmatrix}^4$$

Πρόβλημα : Έστω $A\in M_{n\times n}\big(\mathbb{R}\big)$ με $A^n\neq\mathbb{O}_n$ και $a_{ij}\cdot a_{ji}\leqslant 0$ για κάθε $i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$. Δείξτε ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο μη πραγματικές ιδιοτιμές του πίνακα A.

Λύση

Αρχικά παρατηρούμε ότι για $i=j$: $a_{ii}^2\leqslant 0\Rightarrow a_{ii}=0$, $\forall i\in\{1,2,\cdots,n\}$. Συνεπώς $n\geqslant 2$.

- Έστω ότι το $\lambda\in\mathbb{C}/\mathbb{R}$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A. Τότε υπάρχει ιδιοδιάνυσμα $\overrightarrow{u}\in\mathbb{C}^n/\{\mathbb{O}_n\}$ τέτοιο ώστε

$$A\cdot\overrightarrow{u}=\lambda\cdot\overrightarrow{u}\Rightarrow\overline{A\cdot\overrightarrow{u}}=\overline{\lambda\cdot\overrightarrow{u}}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\overline{A}\cdot\overline{\overrightarrow{u}}=\overline{\lambda}\cdot\overline{\overrightarrow{u}}\Rightarrow A\cdot\overrightarrow{\overline{u}}=\overline{\lambda}\cdot\overrightarrow{\overline{u}} \ , \ \overline{\overrightarrow{u}}=\overrightarrow{\overline{u}}\in\mathbb{C}^n/\{\mathbb{O}_n\}$$

  και $\overline{\lambda}\in\mathbb{C}/\mathbb{R}$, δηλαδή ισχύει το ζητούμενο.

- Έστω ότι ο πίνακας A έχει μόνο πραγματικές ιδιοτιμές , ας είναι οι $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ με $tr(A)=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$.

$$A=\begin{bmatrix}0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ a_{31} & a_{32} & 0 & \cdots & a_{3n}\\ . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & .\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

Άρα

$$tr(A^2) = \sum_{j=2}^{n} a_{1j}\cdot a_{j1} + \sum_{j=1, j\neq 2}^{n} a_{2j}\cdot a_{j2} + \cdots + \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}\cdot a_{jn} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot a_{ji} \leqslant 0$$

Ακόμη έχουμε ότι

$$x_{A^2}(t) = det\big(A^2 - t\cdot \mathbb{I}_n\big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{A^2}(t^2) = det\big(A^2 - t^2\cdot \mathbb{I}_n\big) = det\Big[\big(A - t\cdot \mathbb{I}_n\big)\cdot\big(A + t\cdot \mathbb{I}_n\big)\Big] =$$

$$= x_A(t)\cdot x_A(-t) = \Big[(-1)^n\cdot(t-\lambda_1)\cdot(t-\lambda_2)\cdots(t-\lambda_n)\Big]\cdot\Big[(-1)^n\cdot(-t-\lambda_1)\cdot(-t-\lambda_2)\cdots(-t-\lambda_n)\Big] =$$

$$= (-1)^n\cdot(t^2-\lambda_1^2)\cdot(t^2-\lambda_2^2)\cdots(t^2-\lambda_n^2)$$

Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα A^2 είναι $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \cdots, \lambda_n^2$ και οπότε

$$tr(A^2) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 \leqslant 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \ , \ \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

και τότε θα είναι $x_A(t) = (-1)^n\cdot t^n$ το οποίο μας δίνει ως αποτέλεσμα ότι $A^n = \mathbb{O}_n$ το οποίο είναι άτοπο.

Ιδιότητες:

1) $rank\big(A+B\big) \leqslant rank\big(A\big) + rank\big(B\big)$
2) $rank\big(A\cdot B\big) \leqslant \min\big\{rank\big(A\big), rank\big(B\big)\big\}$
3) $tr\Big(\big(A\cdot B - B\cdot A\big)\cdot\big(A\cdot B + B\cdot A\big)\Big) = 0$
4) $tr\big(A\cdot B\big) = tr\big(B\cdot A\big)$
5) $tr\big(k\cdot A + l\cdot B\big) = k\cdot tr\big(A\big) + l\cdot tr\big(B\big)$
6) $tr\big(S^{-1}\cdot A\cdot S\big) = tr\big(A\big)$
7) $\big(A^T\big)^{-1} = \big(A^{-1}\big)^T$, $\big(A^k\big)^{-1} = \big(A^{-1}\big)^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$
8) Έστω $A \in M_{m\times n}\big(\mathbb{C}\big)$ και $B \in M_{n\times p}\big(\mathbb{C}\big)$, τότε ισχύει ότι:
$rank\big(A\cdot B\big) \geqslant rank(A) + rank(B) - n$. (Ανισότητα *Sylvester*)
9) Έστω $A \in M_{m\times k}\big(\mathbb{C}\big)$, $B \in M_{k\times p}\big(\mathbb{C}\big)$ και $C \in M_{p\times n}\big(\mathbb{C}\big)$, τότε ισχύει ότι:
$rank\big(A\cdot B\big) + rank\big(B\cdot C\big) \leqslant rank(B) + rank\big(A\cdot B\cdot C\big)$. (Ανισότητα *Frobenius*)
10) Έστω $A \in M_{m\times k}\big(\mathbb{C}\big)$, $B \in M_{k\times p}\big(\mathbb{C}\big)$ και $C \in M_{p\times n}\big(\mathbb{C}\big)$,

τότε ισχύει ότι: $rank(B) \geqslant rank\big(A \cdot B \cdot C\big)$.

Πρόβλημα : Έστω n ένας θετικός ακέραιος, $k \in \mathbb{C}$ και $A \in M_n\big(\mathbb{C}\big)$ τέτοιο ώστε $tr(A) \neq 0$ και $rank(A) + rank\big(tr(A) \cdot \mathbb{I}_n - k \cdot A\big) = n$. Να βρεθεί το $rank(A)$.

Λύση

Αρχικά γνωρίζουμε ότι για κάθε πίνακα $C \in M_n\big(\mathbb{C}\big)$ ισχύει ότι $rank(C) = rank\big(\tau \cdot C\big), \forall \tau \in \mathbb{C}$, οπότε προκύτει ότι $rank\big(tr(A) \cdot \mathbb{I}_n - k \cdot A\big) = rank\Big(\dfrac{tr(A)}{k} \cdot \mathbb{I}_n - A\Big)$. Τότε έχουμε ότι

$$n = rank(A) + rank\big(tr(A) \cdot \mathbb{I}_n - k \cdot A\big) = rank(A) + rank\Big(\frac{tr(A)}{k} \cdot \mathbb{I}_n - A\Big) =$$

$$= dim\big[Im(A)\big] + dim\Big[\frac{tr(A)}{k} \cdot \mathbb{I}_n - A\Big] = dim\Bigg[Im\Bigg(A + \Big(\frac{tr(A)}{k} \cdot \mathbb{I}_n - A\Big)\Bigg)\Bigg] +$$

$$+ dim\Bigg[Im(A) \cap Im\Bigg(\frac{tr(A)}{k} \cdot \mathbb{I}_n - A\Bigg)\Bigg] \geqslant dim\Bigg[Im\Bigg(A + \Big(\frac{tr(A)}{k} \cdot \mathbb{I}_n - A\Big)\Bigg)\Bigg] =$$

$$= dim\Bigg[Im\Big(\frac{tr(A)}{k} \cdot \mathbb{I}_n\Big)\Bigg] = rank\Big(\frac{tr(A)}{k} \cdot \mathbb{I}_n\Big) = n$$

συνεπώς η παραπάνω ανισότητα ισχύει σαν ισότητα, και άρα προκύπτει ότι

$$dim\Bigg[Im(A) \cap Im\Bigg(\frac{tr(A)}{k} \cdot \mathbb{I}_n - A\Bigg)\Bigg] = 0 \Rightarrow Im(A) \cap Im\Bigg(\frac{tr(A)}{k} \cdot \mathbb{I}_n - A\Bigg) = \big\{\vec{0}\big\}$$

και παρατηρούμε ότι

$$A \cdot \Bigg(\frac{tr(A)}{k} \cdot \mathbb{I}_n - A\Bigg) = \frac{tr(A)}{k} \cdot A - A^2 = \Bigg(\frac{tr(A)}{k} \cdot \mathbb{I}_n - A\Bigg) \cdot A$$

και αν επιλέξουμε $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ προκύπτει ότι

$$Im(A) \ni A \cdot \Bigg[\Bigg(\frac{tr(A)}{k} \cdot \mathbb{I}_n - A\Bigg) \cdot \vec{x}\Bigg] = \Bigg(\frac{tr(A)}{k} \cdot \mathbb{I}_n - A\Bigg) \cdot \big(A \cdot \vec{x}\big) \in Im\Bigg(\frac{tr(A)}{k} \cdot \mathbb{I}_n - A\Bigg)$$

δηλαδή ισχύει ότι

$$A \cdot \left(\frac{tr(A)}{k} \cdot \mathbb{I}_n - A\right) \cdot \vec{x} \in Im(A) \cap Im\left(\frac{tr(A)}{k} \cdot \mathbb{I}_n - A\right) = \{\vec{0}\}$$

και έχουμε ότι $A \cdot B \cdot \vec{x} = \vec{0}, \forall \vec{x} \in \mathbb{C}^n$ τότε προκύπτει η εξής σχέση $A \cdot \left(\frac{tr(A)}{k} \cdot \mathbb{I}_n - A\right) = \mathbb{O}_n$ και έπειτα το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A έστω να είναι το $m_A(t)$ διαιρεί το πολυώνυμο $t \cdot \left(\frac{tr(A)}{k} \cdot \mathbb{I}_n - t\right)$, δηλαδή $m_A(t) \big| t \cdot \left(\frac{tr(A)}{k} \cdot \mathbb{I}_n - t\right)$. Οπότε ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος επειδή έχει διακεκριμμένες ρίζες και άρα θα έχει την εξής μορφή, υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_n(\mathbb{C})$ τέτοιος ώστε

$$A = P \cdot \begin{bmatrix} \frac{tr(A)}{k} \cdot \mathbb{I}_r & \mathbb{O}_{n-r} \\ \mathbb{O}_{n-r} & \mathbb{O}_r \end{bmatrix} \cdot P^{-1}$$

Παρατηρούμε ότι η τάξη του πίνακα A, $rank(A)$, ισούται με την τάξη του πίνακα

$$\begin{bmatrix} \frac{tr(A)}{k} \cdot \mathbb{I}_r & \mathbb{O}_{n-r} \\ \mathbb{O}_{n-r} & \mathbb{O}_r \end{bmatrix}$$

, r, επιπλέον έχουμε ότι

$$tr(A) = tr\left(\begin{bmatrix} \frac{tr(A)}{k} \cdot \mathbb{I}_r & \mathbb{O}_{n-r} \\ \mathbb{O}_{n-r} & \mathbb{O}_r \end{bmatrix}\right) = tr\left(\frac{tr(A)}{k} \cdot r\right) = \frac{tr(A)}{k} \cdot r = \frac{tr(A)}{k} \cdot rank(A) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow tr(A) = \frac{tr(A)}{k} \cdot rank(A) \xLeftrightarrow{tr(A) \neq 0} rank(A) = k$$

Σχόλια

1) **Ιδέα** : Η προφανή ανισότητα $rank(C) + rank(D) \geqslant rank(C + D), \forall C, D \in M_n(\mathbb{C})$ παρατηρούμε ότι ισχύει ως ισότητα, όπου η ισότητα ισχύει όταν $dim\Big[Im(C) \cap Im(D)\Big] = 0$ και άρα είναι $Im(C) \cap Im(D) = \{\vec{0}\}$ και αν ισχύει ότι $C \cdot D = D \cdot C$ τότε $C \cdot D = \mathbb{O}_n$.
2) Το πρόβλημα κατασκευάστηκε με την εξής λογική : Πρώτον, δίνουμε σαν δεδομένο δύο πίνακες οι οποίοι μετατίθονται μεταξύ τους, χωρίς να παρουσιάζουμε την μεταθετικότητα αυτόν των δύο πινάκων, και Δεύτερον είναι η ισότητα σε

μια ανισότητα. Παρατηρήστε ότι αυτά τα δύο είναι ότι πρέπει για την επίλυση του προβλήματος.

3) $A \cdot \left(\dfrac{tr(A)}{k} \cdot \mathbb{I}_n - A\right) = \mathbb{O}_n \Leftrightarrow \dfrac{tr(A)}{k} \cdot A - A^2 = \mathbb{O}_n \xLeftrightarrow{B = \frac{k}{tr(A)} \cdot A} B - B^2 = \mathbb{O}_n \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow B^2 = B \Leftrightarrow B^m = B, \forall m \in \mathbb{N} \Leftrightarrow k^{m-1} \cdot A^m = \big(tr(A)\big)^{m-1} \cdot A, \forall m \in \mathbb{N}.$
4) Ο πίνακας $A \in M_n\big(\mathbb{C}\big)$ που δίνεται είναι διαγωνοποιήσιμος με ιδιοτιμή $\dfrac{tr(A)}{k}$ και πιθανόν την 0.
5) $Im(A) = Ker\Big(tr(A) \cdot \mathbb{I}_n - k \cdot A\Big)$, $Im\Big(tr(A) \cdot \mathbb{I}_n - k \cdot A\Big) = Ker(A)$ και $\mathbb{C}^n = Ker(A) \oplus Ker\Big(tr(A) \cdot \mathbb{I}_n - k \cdot A\Big)$.

Πρόβλημα : Δείξτε ότι δεν υπάρχουν πίνακες A και B έτσι ώστε να ισχύει ότι $A \cdot B - B \cdot A = \mathbb{I}_n$ με A και B τετραγωνικοί.

Λύση

Έστω ότι υπάρχουν τετραγωνικοί πίνακες A και B ώστε να ισχύει ότι $A \cdot B - B \cdot A = \mathbb{I}_n$. Τότε έχουμε $tr\big(A \cdot B - B \cdot A\big) = tr\big(\mathbb{I}_n\big) \Leftrightarrow tr\big(A \cdot B\big) + tr\big(-B \cdot A\big) = n \Leftrightarrow tr\big(A \cdot B\big) - tr\big(B \cdot A\big) = n \Leftrightarrow tr\big(A \cdot B\big) - tr\big(A \cdot B\big) = n \Leftrightarrow 0 = n$ το οποίο είναι άτοπο , αφού $n \geqslant 1$ και $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς ισχύει το ζητούμενο.

Πρόβλημα : Θεωρούμε τους αντιστρέψιμους πίνακες A και B οι οποίοι είναι τύπου $n \times n$ και ικανοποιούν τις σχέσεις $A \cdot B \cdot A = B$ και $B \cdot A \cdot B = A$. Δείξτε ότι $A^4 = \mathbb{I}_n$.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν οι A^{-1} και B^{-1} , δηλαδή έχουμε $det(A) \neq 0$ και $det(B) \neq 0$. Παρατηρούμε ότι : $A \cdot B = \big(B \cdot A \cdot B\big) \cdot \big(A \cdot B \cdot A\big) = B \cdot A \cdot \big(B \cdot A \cdot B\big) \cdot A = B \cdot A^3 \Rightarrow A \cdot B \cdot A = B \cdot A^4 \Rightarrow B = B \cdot A^4 \Rightarrow B^{-1} \cdot B = B^{-1} \cdot B \cdot A^4 \Rightarrow \mathbb{I}_n = A^4$.

Πρόβλημα : Ένας τετραγωνικός πίνακας C καλείται μηδενοδύναμος αν υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $C^m = \mathbb{O}_n$. Έστω A και B τετραγωνικοί μιγαδικοί πίνακες. Δείξτε ότι , αν $A \cdot B + B \cdot A = \mathbb{O}_n$ και B όχι μηδενοδύναμος , τότε η εξίσωση $A \cdot X + X \cdot A = B$ δεν έχει λύση.

Λύση

Ισχυρισμός : $A \cdot B^m = (-1)^m \cdot B^m \cdot A \ , \forall m \in \mathbb{N}$
Η απόδειξη του ισχυρισμού θα γίνει με επαγωγή στο $m \in \mathbb{N}$.
Για $m = 1 : A \cdot B = -B \cdot A$, το οποίο ισχύει.
Έστω ότι ισχύει για κάποιο $m \in \mathbb{N}$, δηλαδή ας είναι $A \cdot B^m = (-1)^m \cdot B^m$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για το $m+1$. Πράγματι , $A \cdot B^{m+1} = A \cdot B^m \cdot B = (-1)^m \cdot B^m \cdot A \cdot B = (-1)^m \cdot B^m \cdot \big(- B \cdot A\big) = (-1)^{m+1} \cdot B^{m+1} \cdot A$.
Στη συνέχεια έσω ότι η εξίσωση πινάκων $A \cdot X + X \cdot A = B$ έχει λύση , τότε $\forall k \in \mathbb{N} : B^k = B^{K-1} \cdot B = B^{k-1} \cdot \big(A \cdot X + X \cdot A\big) = B^{k-1} \cdot A \cdot X + B^{k-1} \cdot X \cdot A = (-1)^{k-1} \cdot A \cdot B^{k-1} \cdot X + B^{k-1} \cdot X \cdot A \xrightarrow{D = B^{k-1} \cdot X} = (-1)^{k-1} \cdot A \cdot D + D \cdot A \Rightarrow B^k = A \cdot D + D \cdot A$, n : περιττός ή $B^k = D \cdot A - A \cdot D$, n : άρτιος $\Rightarrow tr\big(B^k\big) = 2 \cdot tr\big(AD\big)$, n : περιττός ή $tr\big(B^k\big) = 0$, n : άρτιος το οποίο είναι άτοπο , διότι βρίσκουμε ότι όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα B είναι μηδέν , δηλαδή θα υπάρχει $t \in \mathbb{N}$ ώστε να έχουμε $B^t = \mathbb{O}_n$, δηλαδή ο πίνακας B είναι μηδενοδύναμος το οποίο είναι αδύνατο. Επομένως ισχύει το ζητούμενο.

Ελάχιστο Πολυώνυμο

Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in M_{n\times n}\big(\mathbb{F}\big)$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $x_A(t)$, τότε υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο $m(t)$, το οποίο έχει όλες τις ρίζες του πολυωνύμου $x_A(t)$, τέτοιο ώστε:
(1) $m(t) \neq 0$, $m(A) = \mathbb{O}_n$ και το $m(t)$ έχει μεγιστοβάθμιο συντελεστή ένα δηλαδή είναι μονικό πολυώνυμο.
(2) αν $\varphi(t)$ πολυώνυμο ώστε $\varphi(A) = \mathbb{O}_n$ τότε $m(t)\big|\varphi(t)$

Σχόλιο : Αν $x_A(t) = (x - \lambda_1)^{a_1} \cdot (x - \lambda_2)^{a_2} \cdots (x - \lambda_n)^{a_n}$ με $m(t) = (x - \lambda_1)^{b_1} \cdot (x - \lambda_2)^{b_2} \cdots (x - \lambda_n)^{b_n}$, όπου $\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\} : 1 \leqslant b_i \leqslant a_i$ και επιπλέον είναι $m(t)\big|x_A(t)$ και $deg\big(m(t)\big) \leqslant deg\big(x_A(t)\big)$.

Φασματικό Θεώρημα : Έστω $A \in M_{n\times n}\big(\mathbb{F}\big)$ όπου $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ και ας είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ πιθανον με κάποια επανάληψη. Τότε για οποιοδήποτε πολυώνυμο $f(x)$ έχουμε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα $f(A)$ είναι $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$.

Πρόβλημα : Εάν $A \in M_{n\times n}\big(\mathbb{R}\big)$ με $A^3 + A = \mathbb{O}_n$, τότε $tr(A) = 0$.

Λύση

Έστω $m(t)$ να είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A. Τότε έχουμε ότι επειδή $\varphi(t) = t^3 + t$ με $\varphi(A) = \mathbb{O}_n$ ισχύει ότι $m(t)\big|\varphi(t) \Rightarrow m(t)\big|t^3 + t$. Το $m(t) \in \mathbb{R}[t]$ οπότε:

- $m(t) = t$, τότε όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι μηδέν , άρα $tr(A) = 0$.
- $m(t) = t^2 + 1$, τότε όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι i και $-i$ στην ίδια αλγεβρική πολλαπλότητα , άρα $tr(A) = 0$, $tr(A) = i + i + \cdots + i + (-i) + (-i) + \cdots + (-i) = \frac{n}{2}\cdot i + \frac{n}{2}\cdot(-i) = 0$.
- $m(t) = t^3 + t$, τότε ο πίνακας A έχει ιδιοτιμές το μηδέν , το i και το $-i$ εμφανίζονται στην ίδια αλγεβρική πολλάπλότητα , επομένως $tr(A) = 0$, $tr(A) = i + i + \cdots + i + (-i) + (-i) + \cdots + (-i) + 0 + 0 + \cdots + 0 = a\cdot i + a\cdot(-i) + b\cdot 0 = 0, 2\cdot a + b = n$.

<u>Ανισότητα $Hadamard$</u> : Έστω $A \in M_{n\times n}\big(\mathbb{R}\big)$ τότε ισχύει η ανισότητα:

$$\big|det(A)\big| \leqslant \big|\big|\overrightarrow{a_1}\big|\big| \cdot \big|\big|\overrightarrow{a_2}\big|\big| \cdots \big|\big|\overrightarrow{a_n}\big|\big|$$

όπου τα $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \cdots, \overrightarrow{a_n}$ είναι τα διανύσματα στήλες του πίνακα A.

Απόδειξη :

Εκτελούμε την μέθοδο $Gram\!-\!Shmidt$ στα διανύσματα $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \cdots, \overrightarrow{a_n}$ και προκύπτουν τα εξής ορθομοναδιαία διανύσματα $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \cdots, \overrightarrow{b_n}$, όπου $span\big\{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \cdots, \overrightarrow{a_k}\big\} = span\big\{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \cdots, \overrightarrow{b_k}\big\}$, $\forall k \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Θεωρούμε τον πίνακα B όπου έχει για στήλες τα διανύσματα $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \cdots, \overrightarrow{b_n}$, οποίος είναι ορθογώνιος πίνακας. Επειδή τα διανύσματα $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \cdots, \overrightarrow{b_n}$ είναι ορθομοναδιαία έπεται ότι:

$$\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n : \overrightarrow{x} = \sum_{k=1}^{n} < \overrightarrow{x}, \overrightarrow{b}_k > \cdot \overrightarrow{b}_k$$

με μέτρο

$$\big|\big|\overrightarrow{x}\big|\big|^2 = \sum_{k=1}^{n} \big| < \overrightarrow{x}, \overrightarrow{b}_k > \big|^2$$

και επιπλέον για το διάνυσμα $\overrightarrow{a}_m$ έχουμε ότι

$$\overrightarrow{a}_m = \sum_{k=1}^{m} < \overrightarrow{a}_m, \overrightarrow{b}_k > \cdot \overrightarrow{b}_k$$

Στη συνέχεια θέτουμε C έναν άνω τριγωνικό πίνακα τύπου $n \times n$ όπου τα στοιχεία είναι τα εξής: $c_{ij} =< \overrightarrow{v}_j, \overrightarrow{u}_i >$, $1 \leqslant i \leqslant j$ και $c_{ij} = 0$, $j < i \leqslant n$, τότε ελέγχουμε ότι $A = B \cdot C$. Τότε προκύπτει ότι:

$$\big(det(A)\big)^2 = det(A) \cdot det(A) = det(A^T) \cdot \det(A) = det\big(A^T \cdot A\big) = det\big(\big(B \cdot C\big)^T \cdot \big(B \cdot C\big)\big) =$$

$$= det\big(C^T \cdot B^T \cdot B \cdot C\big) = det(C^T) \cdot det(B^T) \cdot det(B) \cdot det(C) = det(C^T) \cdot det(C) =$$

$$= det(C) \cdot det(C) = \big(det(C)\big)^2 = \prod_{k=1}^{n} \big| < \overrightarrow{a}_k, \overrightarrow{b}_k > \big|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{m=1}^{k} \big| < \overrightarrow{a}_m, \overrightarrow{b}_n > \big| \right) = \prod_{k=1}^{n} \big|\big|\overrightarrow{a}_k\big|\big|^2 \Leftrightarrow \big|det(A)\big| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \big|\big|\overrightarrow{a}_k\big|\big|$$

και επειδή ισχύει ότι:

$$\big| < \overrightarrow{a}_k, \overrightarrow{b}_k > \big|^2 = \sum_{m=1}^{k} \big| < \overrightarrow{a}_m, \overrightarrow{b}_k > \big|^2 , \forall k \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $\overrightarrow{a}_k =< \overrightarrow{a}_k, \overrightarrow{b}_k > \cdot \overrightarrow{b}_k$, $\forall k \in \{1, 2, \cdots, n\}$, δηλαδή αν και μόνο αν τα διανύσματα $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \cdots, \overrightarrow{a_n}$ είναι ορθογώνια , δηλαδή αν και μόνο αν ο πίνακας A είναι ορθογώνιος.

Πρόβλημα : Έστω $A \in M_{n \times n}\big(\mathbb{C}\big)$ και $a \in \mathbb{C}$ με $a \neq 0$ έτσι ώστε $A - A^* = 2 \cdot a \cdot \mathbb{I}_n$.
α) Να αποδειχθεί ότι $\big|det(A)\big| \geqslant \big|a\big|^n$.
β) Αν $\big|det(A)\big| = \big|a\big|^n$ να δειχθεί ότι $A = a \cdot \mathbb{I}_n$.

Λύση

α) Έχουμε ότι $A - A^* = 2 \cdot a \cdot \mathbb{I}_n \Rightarrow A^* - A = 2 \cdot \overline{a} \cdot \mathbb{I}_n$ οπότε προκύπτει ότι $\big(A - A^*\big) + \big(A^* - A\big) = 2 \cdot \big(a + \overline{a}\big) \cdot \mathbb{I}_n \Leftrightarrow a + \overline{a} = 0 \Rightarrow Real(a) = 0$ οπότε είναι της μορφής $a = i \cdot a_0$, $\forall a_0 \in \mathbb{R}$. Γράφουμε

$$A = \frac{A + A^*}{2} - \frac{A - A^*}{2} = B + a \cdot \mathbb{I}_n$$

όπου

$$B = \frac{A + A^*}{2} = B^*$$

, άρα ο πίνακας B είναι διαγωνοποιήσιμος και έστω ότι είναι

$$B = P \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot P^{-1}$$

με $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Επομένως έχουμε ότι

$$A = B + a \cdot \mathbb{I}_n = P \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot P^{-1} + P \cdot \begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix} \cdot P^{-1} =$$

$$= P \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 + a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 + a & \cdots & 0 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n + a \end{bmatrix} \cdot P^{-1}$$

Άρα $\left|det(A)\right| = \left|(\lambda_1+a)\cdot(\lambda_2+a)\cdots(\lambda_n+a)\right| = \sqrt{\lambda_1^2 + a_0^2}\cdot\sqrt{\lambda_2^2 + a_0^2}\cdots\sqrt{\lambda_n^2 + a_0^2} \geqslant \sqrt{a_0^2}\cdot\sqrt{a_0^2}\cdots\sqrt{a_0^2} = \left|a_0^n\right| = \left|a_0\right|^n = \left|a\right|^n$, με το ίσον να ισχύει στην περίπτωση που $\lambda_1 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, δηλαδή αν και μόνο αν $B = \mathbb{O}_n$, δηλαδή αν και μόνο αν $A = a \cdot \mathbb{I}_n$.
β) Από το προηγούμενο ερώτημα.

Πρόβλημα : Συμβολίζουμε $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ το σύνολο όλων των 2×2 πινάκων με πραγματικές τιμές των στοιχείων , Να αποδειχθεί ότι:
α) Για κάθε $A \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ υπάρχουν πίνακες $B, C \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ ώστε $A = B^2 + C^2$.

β) Δεν υπάρχουν $B, C \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ που μετατίθενται ώστε

$$B^2 + C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

με $B \cdot C = C \cdot B$.

Λύση

α) Έστω $x_A(t) = t^2 - \big(tr(A)\big) \cdot t + \big(det(A)\big)$ να είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A. Τότε

$$A^2 - \big(tr(A)\big) \cdot A + \big(det(A)\big) \cdot \mathbb{I}_n = \mathbb{O}_n \Leftrightarrow A = A^2 - \big(tr(A) - 1\big) \cdot A + \big(det(A)\big) \cdot \mathbb{I}_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A = \left(A - \frac{tr(A) - 1}{2} \cdot \mathbb{I}_2\right)^2 + \left(det(A) - \frac{\big(tr(A) - 1\big)}{4}\right) \cdot \mathbb{I}_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A = \left(A - \frac{tr(A) - 1}{2} \cdot \mathbb{I}_2\right)^2 + \begin{bmatrix} 0 & det(A) - \dfrac{\big(tr(A) - 1\big)^2}{4} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2$$

Οπότε

$$B = A - \frac{tr(A) - 1}{2} \cdot \mathbb{I}_2$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & det(A) - \dfrac{\big(tr(A) - 1\big)^2}{4} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

β) Αφού $B \cdot C = C \cdot B \Rightarrow B^2 + C^2 = \big(B + i \cdot C\big) \cdot \big(B - i \cdot C\big) \Rightarrow det\big(B^2 + C^2\big) = det\big(B + i \cdot C\big) \cdot det\big(B - i \cdot C\big) = det\big(B + i \cdot C\big) \cdot \overline{det\big(B + i \cdot C\big)} = \big|det\big(B + i \cdot C\big)\big|^2 \geqslant 0$ όμως έχουμε ότι

$$det\big(B^2 + C^2\big) = det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = -1 < 0$$

Συνεπώς δεν υπάρχουν τέτοιοι πίνακες B, C.

Πρόβλημα : Να δείξετε ότι τα στοιχεία των πινάκων A και B δεν είναι όλα στο $\mathbb{Z}$, αν ισχύει ότι:

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = A^2 + B^2$$

<u>Λύση</u>

Από το Θεώρημα $Cayley-Hamilton$ έχουμε ότι $A^2-t_A\cdot A+d_A\cdot\mathbb{I}_2=\mathbb{O}_2$
και $B^2-t_B\cdot B+d_B\cdot\mathbb{I}_2=\mathbb{O}_2$ οπότε έχουμε ότι

$$t_A\cdot A+t_B\cdot B=A^2+B^2+\big(d_A+d_B\big)\cdot\mathbb{I}_2\Rightarrow$$

$$t_A\cdot A+t_B\cdot B=\begin{bmatrix}-3+d_A+d_B & 0\\ 0 & 7+d_A+d_B\end{bmatrix}\xRightarrow{\text{παίρνουμε ίχνη στη παραπάνω σχέση}}$$

$$\Rightarrow t_A^2+t_B^2=4+2\cdot\big(d_A+d_B\big)$$

Υποθέτουμε ότι οι πίνακες A,B έχουν όλα τα στοιχεία τους στους ακεραίους.
Τότε $t_A,t_B,d_A,d_B\in\mathbb{Z}$. Αρχικά παρατηρούμε ότι $t_A\equiv t_B\big(mod2\big)$
Εξετάζουμε δύο περιπτώσεις:
<u>1^{η} περίπτωση</u>: Αν $t_A\equiv t_B\equiv 0\big(mod2\big)$, τότε

$$t_A^2+t_B^2\equiv 0\big(mod4\big)\Rightarrow 4+2\cdot\big(d_A+d_B\big)\equiv 0\big(mod4\big)\Rightarrow d_A+d_B\equiv 0\big(mod2\big)$$

Τότε

$$t_A\cdot A+t_B\cdot B=\begin{bmatrix}-3+d_A+d_B & 0\\ 0 & 7+d_A+d_B\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2+1 & 0\\ 0 & 6+1\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\mathbb{I}_2\big(mod2\big)$$

το οποίο είναι άτοπο αφού έχουμε ότι αν

$$t_A\equiv t_B\equiv 0\big(mod2\big)\Rightarrow t_A\cdot A+t_B\cdot B\equiv\mathbb{O}_2\big(mod2\big)$$

<u>2^{η} περίπτωση</u>: Αν $t_A\equiv t_B\equiv 1\big(mod2\big)$, τότε

$$t_A^2+t_B^2\equiv 2\big(mod4\big)\Rightarrow 4+2\cdot\big(d_A+d_B\big)\equiv 2\big(mod4\big)\Rightarrow d_A+d_B\equiv 1\big(mod2\big)$$

Τότε

$$t_A\cdot A+t_B\cdot B=\begin{bmatrix}-3+d_A+d_B & 0\\ 0 & 7+d_A+d_B\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 8\end{bmatrix}\equiv\mathbb{O}_2\big(mod2\big)$$

Και οπότε αφού

$$t_A\equiv t_B\equiv 1\big(mod2\big)\Rightarrow t_A\cdot A+t_B\cdot B\equiv A+B\big(mod2\big)$$

και

$$t_A \cdot A + t_B \cdot B \equiv \mathbb{O}_2 \big(mod2\big)$$

έπεται ότι ισχύει:

$$A + B \equiv \mathbb{O}_2 \big(mod2\big) \Rightarrow A \equiv B \big(mod2\big) \Rightarrow A^2 + B^2 \equiv \mathbb{O}_2 \big(mod2\big)$$

το οποίο είναι άτοπο , διότι

$$t_A \cdot A + t_B \cdot B \equiv \mathbb{O}_2 \big(mod2\big)$$

$$d_A + d_B \equiv 1\big(mod2\big) \Rightarrow \big(d_A + d_B\big) \cdot \mathbb{I}_2 \equiv \mathbb{I}_2 \big(mod2\big)$$

$$t_A \cdot A + t_B \cdot B = A^2 + B^2 + \big(d_A + d_B\big) \cdot \mathbb{I}_2$$

έχουμε ως αποτέλεσμα ότι

$$A^2 + B^2 + \mathbb{I}_2 \equiv \mathbb{O}_2 \big(mod2\big) \Rightarrow A^2 + B^2 \equiv \mathbb{I}_2 \big(mod2\big)$$

Επομένως σε κάθε περίπτωση καταλήγουμε σε άτοπο. Συνεπώς ισχύει το ζητούμενο.

Κανονικές Μορφές $Jordan$

Έστω $A \in M_{n\times n}\big(\mathbb{C}\big)$, τότε υπάρχει $J \in M_{n\times n}\big(\mathbb{C}\big)$ ώστε ο A να είναι όμοιος με τον J , δηλαδή υπάρχει αντιστρέψιμοςς πίνακας $P \in M_{n\times n}\big(\mathbb{C}\big)$ ώστε να ισχύει ότι $A = P \cdot J \cdot P^{-1}$. Ο πίνακας J είναι της μορφής

$$J = \begin{bmatrix} B_1 & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & B_2 & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & . & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & . & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & . & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & B_r \end{bmatrix}$$

με κάθε B_i , $\forall i \in \{1, 2, \cdots, r\}$ να είναι της μορφής

$$B_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix} , \forall i \in \{1, 2, \cdots, r\}$$

με μεταβλητό μέγεθος.

Μέθοδος: Βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A. Έστω ότι είναι το $x_A(t) = (x-\lambda_1)^{e_1} \cdot (x-\lambda_2)^{e_2} \cdots (x-\lambda_k)^{e_k}$. Τότε

$$\mathbb{C}^n = ker\big((A-\lambda_1 \cdot \mathbb{I}_n)^{e_1}\big) \oplus ker\big((A-\lambda_2 \cdot \mathbb{I}_n)^{e_2}\big) \oplus \cdots \oplus ker\big((A-\lambda_k \cdot \mathbb{I}_n)^{e_k}\big)$$

Επιλέγουμε κάποιο k έστω λ_1, e_1 , τα γράφουμε λ και e:

$$d_1 = dim\big(ker\big(A-\lambda \cdot \mathbb{I}_n\big)\big)$$

$$d_2 = dim\big(ker\big(A-\lambda \cdot \mathbb{I}_n\big)^2\big)$$

$$d_3 = dim\big(ker\big(A-\lambda \cdot \mathbb{I}_n\big)^3\big)$$

.

.

.

$$d_N = dim\big(ker\big(A-\lambda \cdot \mathbb{I}_n\big)^N\big)$$

Αποδεικνύεται ότι $d_1 < d_2 < d_3 < \cdots < d_N$

- d_1 είναι η γεωμετρική πολλαπλότητα του λ , όπου λ είναι το πλήθος των *blocks* με ιδιοτιμή λ.

- N είναι ο εκθέτης του $(x-\lambda)$ στο ελάχιστο πολυώνυμο , είναι το μεγαλύτερο *Jordan block* που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

- $d_2 - d_1$ είναι το πλήθος των *blocks* με μέγεθος $\geqslant 3$

.

.

.

- $d_N - d_{N-1}$ είναι το πλήθος των *blocks* με μέγεθος $\geqslant N$

Θεώρημα : Ο πίνακας $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν το ελάχιστο πολυώνυμο του A έχει διακεκριμμένες ρίζες.

Θεώρημα :Ένας συμμετρικός πίνακας $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ έχει πραγματικές ιδιοτιμές και διαγωνοποιείται από ορθογώνιο πίνακα $U \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, δηλαδή πίνακα τέτοιον ώστε $U \cdot U^T = \mathbb{I}_n$. Οπότε γράφουμε $A = U \cdot D \cdot U^T$, όπου $D \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ είναι ο διαγώνιος πίνακας όπου τα στοιχεία της διαγωνίου είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A.

Θεώρημα :Ένας πίνακας $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ τριγωνοποιείται από έναν μοναδιαίο πίνακα U , δηλαδή τέτοιον ώστε $U \cdot U^* = \mathbb{I}_n$. Οπότε γράφουμε $A = U \cdot D \cdot U^*$, όπου ο D είναι άνω τριγωνικός με τα στοιχεία στη διαγώνιο να είναι ίσα με τις ιδιοτιμές του πίνακα A.

Θεώρημα : Αν δύο πίνακες $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ μετατίθονται , δηλαδή $A \cdot B = B \cdot A$, τότε υπάρχει U μοναδιαίος πίνακας ώστε να τριγωνοποιεί και τον A και τον B. Επιπλέον, αν οι A, B είναι διαγωνοποιήσιμοι τότε είναι και ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμοι , δηλαδή υπάρχει P ώστε $A = P \cdot C \cdot P^{-1}$ και $B = P \cdot D \cdot P^{-1}$, όπου C, D διαγώνιοι πίνακες που έχουν ως τιμές τις ιδιοτιμές των αντίστοιχων πινάκων.

Έστω $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ με

$$||A||_2 = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

Ισχύουν τα εξής:

$$||A + B||_2 \leqslant ||A||_2 + ||B||_2$$

$$||A \cdot B||_2 \leqslant ||A||_2 \cdot ||B||_2$$

$$||A^k||_2 \leqslant ||A||_2^k \ , \forall k \in \mathbb{N}$$

Ορισμός : Η σειρά

$$\mathbb{I}_n + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!} + \cdots$$

συγκλίνει. Το όριο συμβολίζεται e^A.

Βασική ιδιότητα :

$$e^{P\cdot A\cdot P^{-1}} = P\cdot e^A\cdot P^{-1}$$

Αφού $A = P\cdot J\cdot P^{-1}$, έπεται ότι $e^A = P\cdot e^J\cdot P^{-1}$, ανάγεται στον υπολογισμό του e^{Block}. Είναι $B = \lambda\cdot\mathbb{I}_r + N$ με

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

τότε $N^r = \mathbb{O}_r$ και συνεπώς

$$B^m = \big(\lambda\cdot\mathbb{I}_r + N\big)^m =$$

$$= \lambda^m\cdot\mathbb{I}_r + \binom{m}{1}\cdot\lambda^{m-1}\cdot N + \binom{m}{2}\cdot\lambda^{m-2}\cdot N^2 + \cdots + \binom{m}{r-1}\cdot\lambda^{m-(r-1)}\cdot N^{r-1} +$$

$$+\binom{m}{r}\cdot\lambda^{m-r}\cdot N^r + \cdots + \binom{m}{m-1}\cdot\lambda\cdot N^{m-1} + N^m =$$

$$= \lambda^m\cdot\mathbb{I}_r + \binom{m}{1}\cdot\lambda^{m-1}\cdot N + \binom{m}{2}\cdot\lambda^{m-2}\cdot N^2 + \cdots + \binom{m}{r-1}\cdot\lambda^{m-(r-1)}\cdot N^{r-1}$$

Ιδιότητα :

$$det\big(e^A\big) = e^{tr(A)} \neq 0$$

Δηλαδή ο e^A είναι αντιστρέψιμος με $\big(e^A\big)^{-1} = e^{-A}$.

Ιδιότητα : Αν $A\cdot B = B\cdot A$ τότε $e^{A+B} = e^A\cdot e^B$.

Ιδιότητα : $\big(e^A\big)^* = e^{A^*}$

Σημείωση : Έχει αποδειχθεί ότι δεν μπορεί να βρεθεί το μήκος μιας έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, δεν υπάρχει κάποιος κλειστός τύπος , αλλά για μια συγκεκριμμένη έλλειψη μπορούμε να βρούμε το μήκος της (επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πρώτου είδους ή επιλύουμε ως προς y και εφαρμόζουμε τον τύπο που είναι $\int\limits_a^b \sqrt{(y')^2+1}\, dx$)

Πρόβλημα : Θεωρούμε τους πίνακες $A, B \in M_{2018\times 2018}\big(\mathbb{R}\big)$ έτσι ώστε $A\cdot B = B \cdot A$ και $A^{2018} = B^{2018} = \mathbb{I}_n$. Να δείξετε ότι εάν $tr\big(A \cdot B\big) = 2018$, τότε $tr(A) = tr(B)$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι τα ελάχιστα πολυώνυμα των πινάκων A και B , έστω $m_A(t)$ και $m_B(t)$, αντίστοιχα διαιρούν το πολυώνυμο $t^{2018} - 1$, δηλαδή ισχύει ότι

$$m_A(t)\big|t^{2018} - 1 \quad , \quad m_B(t)\big|t^{2018} - 1$$

και γνωρίζουμε ότι το πολυώνυμο $t^{2018} - 1$ έχει για ρίζες του τις 2018 ρίζες της μονάδας , δηλαδή

$$\omega_k = e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i}{2018}\cdot k} \ , \forall k \in \big\{0, 1, 2, \cdots, 2017\big\} \text{ ή } \omega = e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i}{2018}} \Rightarrow \text{Σύνολο Ριζών} = \big\{1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{2017}\big\}$$

και διαπιστώνουμε ότι τα ελάχιστα πολυώνυμα των πινάκων A και B έχουν διακεκριμμένες ρίζες οπότε οι πίνακες A και B είναι διαγωνοποιήσιμοι και μάλιστα επειδή οι πίνακες αυτοί μετατίθονται έχουμε ως αποτέλεσμα ότι υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_{2018\times 2018}\big(\mathbb{R}\big)$ τέτοιος ώστε να ισχύει ότι

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1} \quad , \quad B = P \cdot Q \cdot P^{-1}$$

επιπλέον αφού οι πίνακες A και B είναι πραγματικοί έπεται ότι οι ιδιοτιμές τους θα είναι σε ζεύγη συζυγών μιγαδικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι οι αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{2018}$ οι οποίοι δεν είναι απαραίτητα διαφορετικοί μεταξύ τους , και ας είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα B οι αριθμοί $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{2018}$ οι οποίοι δεν είναι απαραίτητα διαφορετικοί μεταξύ τους. Επομένως επειδή

$$2018 = \big|tr\big(A \cdot B\big)\big| = \left|\sum_{k=1}^{2018} \lambda_k \cdot \mu_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{2018} \big|\lambda_k \cdot \mu_k\big| = \sum_{k=1}^{2018} \big|\lambda_k\big| \cdot \big|\mu_k\big| = 2018$$

και συνεπώς διαπιστώνουμε ότι ισχύει η ισότητα στην τριγωνική ανισότητα ο-πότε ισχύει ότι

$$\lambda_k \cdot \mu_k = 1 \ , \ \forall k \in \{1, 2, \cdots, 2018\} \Rightarrow \lambda_k = \frac{1}{\mu_k} = \overline{\mu_k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{2018} \lambda_k = \sum_{k=1}^{2018} \overline{\mu_k} = \sum_{k=1}^{2018} \mu_k \Rightarrow tr(A) = tr(B)$$

Πρόβλημα : Θεωρούμε τους πίνακες $A \in M_{4\times 2}(\mathbb{R})$ και $B \in M_{2\times 4}(\mathbb{R})$ για τους οποίους ισχύει ότι:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Να βρεθεί ο πίνακας $B \cdot A$.

Λύση

Αρχικά μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -\mathbb{I}_2 & \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_2 & -\mathbb{I}_2 \end{bmatrix}$$

Επειδή $A \in M_{4\times 2}(\mathbb{R})$ και $B \in M_{2\times 4}(\mathbb{R})$ μπορούμε να γράψουμε τους πίνακες A και B ως *blocks* , δηλαδή:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, \text{ όπου } A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \text{ και } A_2 = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

και όμοια γράφεται και ο πίνακας B:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \text{ και } B_2 = \begin{bmatrix} b_{13} & b_{14} \\ b_{23} & b_{24} \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

και υπολογίζουμε ότι:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \cdot B_1 & A_1 \cdot B_2 \\ A_2 \cdot B_1 & A_2 \cdot B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbb{I}_2 & \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_2 & -\mathbb{I}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_1 \cdot B_1 = -\mathbb{I}_2 \ , \ A_1 \cdot B_2 = \mathbb{I}_2 \ , \ A_2 \cdot B_1 = \mathbb{I}_2 \ , \ A_2 \cdot B_2 = -\mathbb{I}_2$$

Παρατηρούμε ότι οι πίνακες A_1, A_2, B_1 και B_2 είναι αντιστρέψιμοι με $A_1 = -B_1^{-1}, A_1 = B_2^{-1}, A_2 = B_1^{-1}$ και $A_2 = -B_2^{-1}$, τότε ο ζητούμενος πίνακας ισούται με:

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = B_1 \cdot A_1 + B_2 \cdot A_2 = -\mathbb{I}_2 + \big(-\mathbb{I}_2 \big) = -2 \cdot \mathbb{I}_2$$

Πρόβλημα : Θεωρούμε τους πίνακες $A \in M_{3\times 2}\big(\mathbb{R}\big)$ και $B \in M_{2\times 3}\big(\mathbb{R}\big)$ για τους οποίους ισχύει ότι:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Να βρεθεί ο πίνακας $B \cdot A$.

Λύση

Αρχικά παρατηρούμε ότι ο πίνακας $A \cdot B$ είναι διαγωνοποιήσιμος ως συμμετρικός πίνακας , όπου έχει $det(A) = 0$ και $tr(A) = 18$, επιπλέον εύκολα βρίσκουμε:

$$\big(A{\cdot}B\big)^2 = \big(A{\cdot}B\big){\cdot}\big(A{\cdot}B\big) = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72 & 18 & -18 \\ 18 & 45 & 36 \\ -18 & 36 & 45 \end{bmatrix} =$$

$$= 9 \cdot \begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix} = 9 \cdot \big(A \cdot B\big)$$

Οπότε έχουμε ως αποτέλεσμα ότι το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα $A \cdot B$, ας είναι το $m_{A\cdot B}(t)$, διαιρεί το πολυώνυμο $t^2 - 9 \cdot t$, δηλαδή ισχύει ότι

$m_{A\cdot B}(t)\Big|t^2 - 9\cdot t = t\cdot(t-9)$. Συνεπώς υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_{3\times 3}\big(\mathbb{R}\big)$ τέτοιος ώστε να ισχύει ότι:

$$A\cdot B = P\cdot \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot P^{-1}$$

Επομένως βρίσκουμε ότι:

$$rank\big(A\cdot B\big) = rank\left(P\cdot \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot P^{-1}\right) = rank\left(\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2$$

και οπότε επιπλέον έχουμε ότι:

$$rank\Big(\big(A\cdot B\big)^2\Big) = rank\Big(9\cdot\big(A\cdot B\big)\Big) = rank\big(A\cdot B\big) = 2$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε την εξής ανισότητα:

$$rank\big(B\cdot A\big) \geqslant rank\Big(A\cdot\big(B\cdot A\big)\cdot B\Big) = rank\Big(\big(A\cdot B\big)^2\Big) = 2$$

Και επιπλέον ισχύει ότι:

$$rank\big(B\cdot A\big) \leqslant 2$$

Επομένως έχουμε ότι:

$$rank\big(B\cdot A\big) = 2 \Leftrightarrow det\big(B\cdot A\big) \neq 0 \Leftrightarrow \exists\big(B\cdot A\big)^{-1}$$

Έπειτα έχουμε ότι:

$$\big(B\cdot A\big)^3 = B\cdot\big(A\cdot B\big)^2\cdot A = B\cdot\Big(9\cdot\big(A\cdot B\big)\Big)\cdot A = 9\cdot\big(B\cdot A\big)^2 \Leftrightarrow B\cdot A = 9\cdot\mathbb{I}_2$$

Συνδυαστικά Προβλήματα

Πρόβλημα : Έστω ο πίνακας $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, ο οποίος είναι θετικά ορισμένος. Να δειχθεί ότι:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-<A\cdot\overrightarrow{x},\overrightarrow{x}>}\, dx = \frac{\left(\sqrt{\pi}\right)^n}{det(A)} \ , \forall n \in \mathbb{N}$$

Όπου $<\ .\ ,\ .\ >$ είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^{n\times 1}$. Εξηγούμε ότι:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-<A\cdot\overrightarrow{x},\overrightarrow{x}>}\, d\overrightarrow{x} \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-<A\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\.\\.\\.\\x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\.\\.\\.\\x_n\end{pmatrix}>}\, dx_1\right) dx_2\right)\cdots\, dx_n$$

Λύση

Επειδή ο πίνακας A είναι θετικά ορισμένος , γνωρίζουμε ότι υπάρχει πίνακας U άνω τριγωνικός τέτοιος ώστε να ισχύει $A = U^*\cdot U$, σύμφωνα με το Θεώρημα *Cholesky*. Έχουμε ότι:

$$A = U^*\cdot U \Rightarrow det(A) = det\big(U^*\cdot U\big) = det(U^*)\cdot det(U) = det(U)\cdot det(U) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow det(A) = \big(det(U)\big)^2 \xRightarrow{det(U)>0} det(U) = \sqrt{det(A)}$$

Τότε

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-<A\cdot\overrightarrow{x},\overrightarrow{x}>}\, d\overrightarrow{x} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-<U^*\cdot U\cdot\overrightarrow{x},\overrightarrow{x}>}\, d\overrightarrow{x} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-<U\cdot\overrightarrow{x},U\cdot\overrightarrow{x}>}\, d\overrightarrow{x} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left|\left|U\cdot\overrightarrow{x}\right|\right|^2}\, d\overrightarrow{x} =$$

$$\xrightarrow[d\overrightarrow{x} = det(U^{-1})d\overrightarrow{y}]{\text{Θέτουμε } \overrightarrow{y} = U \cdot \overrightarrow{x} \Leftrightarrow \overrightarrow{x} = U^{-1} \cdot \overrightarrow{y}}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\|\overrightarrow{y}\|^2} \cdot det(U^{-1})\ d\overrightarrow{y} = \frac{1}{det(U)} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\|\overrightarrow{y}\|^2}\ d\overrightarrow{y} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{det(A)}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\cdots \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2\right)}\ dy_1 \right) dy_2 \right) \cdots\ dy_{n-1} \right) dy_n =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi}\cdots\sqrt{\pi}}{\sqrt{det(A)}} = \frac{\left(\sqrt{\pi}\right)^n}{\sqrt{det(A)}}$$

Αφού γνωρίζουμε ότι:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\ dt = \sqrt{\pi}$$

$$< A \cdot \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} > = < \overrightarrow{x}, A^* \cdot \overrightarrow{y} >$$

$$< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} > = \overrightarrow{x}^T \cdot \overline{\overrightarrow{y}}$$

Πρόβλημα : Μέσα σε ένα τετράγωνο κατασκευάζουμε κύκλους εντός του τετραγώνου έτσι ώστε το άθροισμα των περιφερειών των κύκλων να ισούται με δύο φορές την περίμετρο του τετραγώνου.
α) Να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός των κύκλων που μπορούν να κατασκευαστούν.
β) Αποδείξτε ότι υπάρχουν άπειρες ευθείες όπου τέμνουν τουλάχιστον τρεις κύκλους.

Λύση

α) Έστω $C_1, C_2, \cdots, C_k$ οι κύκλοι που μπορούν να κατασκευαστούν με αυτή την ιδιότητα , και ας είναι $d_1, d_2, \cdots, d_k$ οι αντίστοιχοι διάμετροι. Τότε πρέπει ν ισχύει ότι

$$\sum_{n=1}^{k} L_n = 2 \cdot \left(4 \cdot a\right)$$

όπου a είναι η πλευρά του τετραγώνου και $L_n = \pi \cdot d_n$, $n \in \{1, 2, \cdots, k\}$. Προφανώς είναι $d_n \leqslant a$, $n \in \{1, 2, \cdots, k\}$. Συνεπώς έχουμε

$$2 \cdot (4 \cdot a) = 8 \cdot a = \sum_{n=1}^{k} \pi \cdot d_n \leqslant \sum_{n=1}^{k} \pi \cdot a = \pi \cdot k \cdot a \Rightarrow k \geqslant \frac{8}{\pi} > \frac{5}{2} \Rightarrow k \geqslant 3$$

β) Προβάλουμε τους κύκλους πάνω σε μια πλευρά του τετραγώνου έτσι ώστε οι εικόνες τους να είναι οι διάμετροί τους. Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των διαμέτρων είναι περίπου $\frac{8 \cdot a}{\pi} \cong 2.54 \cdot a$ και υπάρχουν τουλάχιστον τρεις κύκλοι στο τετράγωνο , τότε θα υπάρχει ένα διάστημα όπου τουλάχιστον τρεις κύκλοι θα έχουν τομή αυτό το διάστημα σε αυτό το διάστημα τέμνει τουλάχιστον τρεις κύκλους.

Πρόβλημα : Έστω n θετικός ακέραιος και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ \{0\}$ συνάρτηση με $f(2014) = 1 - f(2013)$. Έστω επίσης $x_1, x_2, \cdots, x_n$ πραγματικοί αριθμοί όχι όλοι ίσοι μεταξύ τους. Αν

$$\begin{vmatrix} 1 + f(x_1) & f(x_2) & \cdots & f(x_n) \\ f(x_1) & 1 + f(x_2) & \cdots & f(x_n) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ f(x_1) & f(x_2) & \cdots & 1 + f(x_n) \end{vmatrix} = 0$$

τότε να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)$ δεν είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Επειδή $f(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$ έχουμε ως αποτέλεσμα ότι η $f(x) < 0$, $x \in \mathbb{R}$ ή $f(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

- Αν $f(x) < 0$, $x \in \mathbb{R}$ τότε $f(2014) < 0, f(2013) < 0, 1 - f(2013) > 0 \Rightarrow$ $f(2014) = 1 - f(2013) > 0$ το οποίο είναι άτοπο.

- Αν $f(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$ τότε θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} f(x_1) & f(x_2) & \cdots & f(x_n) \\ f(x_1) & f(x_2) & \cdots & f(x_n) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ f(x_1) & f(x_2) & \cdots & f(x_n) \end{bmatrix}$$

Όπου το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι $x_A(t) = det\big(A - t \cdot \mathbb{I}_n\big)$ και επειδή $x_A(-1) = 0$, δηλαδή ο αριθμός - 1 είναι ιδιοτιμή του πίνακα A. Τότε υπάρχει ιδιοδιάνυσμα στήλη $\overrightarrow{u}$ τέτοιο ώστε

$$\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \end{bmatrix}$$

με $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ και ισχύει ότι

$$A \cdot \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u} \Leftrightarrow$$

$$u_1 \cdot f(x_1) + u_2 \cdot f(x_2) + \cdots + u_n \cdot f(x_n) = -u_1$$
$$u_1 \cdot f(x_1) + u_2 \cdot f(x_2) + \cdots + u_n \cdot f(x_n) = -u_2$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$u_1 \cdot f(x_1) + u_2 \cdot f(x_2) + \cdots + u_n \cdot f(x_n) = -u_n$$

Και άρα προκύπτει ότι $u_1 = u_2 = \cdots = u_n$ με $u_i \neq 0$, $\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ Οπότε διαπιστώνουμε ότι $f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) = -1$ το οποίο μας οδηγεί σε άτοπο , διότι θα έπρεπε να ισχύει ότι $f(x_i) > 0$, $\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Άρα σε κάθε περίπτωση η συνάρτηση $f(x)$ δεν είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Πρόβλημα : Να δείξετε ότι κάθε φυσικός αριθμός $n \in \mathbb{N}$ γράφεται ως εξής: $n = a^2 + b^2 - c^2$ με $a < b < c$ φυσικούς αριθμούς.

Λύση

$$
\begin{gathered}
0 = 3^2 + 4^2 - 5^2 \\
1 = 4^2 + 7^2 - 8^2 \\
2 = 5^2 + 11^2 - 12^2 \\
\forall k \in \mathbb{N} : 2 \cdot k = \big(3 \cdot k\big)^2 + \big(4 \cdot k - 1\big)^2 - \big(5 \cdot k - 1\big)^2 \\
\forall k \in \mathbb{N} : 2 \cdot k + 1 = \big(3 \cdot k + 1\big)^2 + \big(4 \cdot k + 2\big)^2 - \big(5 \cdot k + 2\big)^2
\end{gathered}
$$