

Όνοματεπώνυμο:.....

Τμήμα:.....Διδάσκων:.....

(Συνολική βαθμολογία 105 μονάδες. Οι εκφωνήσεις επιστρέφονται μαζί με το γραπτό)

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Πρόοδος Απριλίου 2025

Διδάσκοντες: Δ. Καββαδίας - Χ. Ραπτόπουλος

1. (15 μον.) Έστω μεταβλητές p, q και r . Να βρείτε ποιοι από τους παρακάτω τύπους είναι ταυτολογικά ισοδύναμοι με τον $\neg(p \wedge (q \vee r))$. Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

i. $\neg p \vee (\neg q \wedge \neg r)$.

ii. $p \rightarrow \neg(q \wedge r)$.

iii. $(q \vee r) \rightarrow \neg p$.

Απάντηση

- i. Έχουμε εφαρμόζοντας δύο φορές τον κανόνα De Morgan:

$$\neg p \vee (\neg q \wedge \neg r) \equiv \neg p \vee \neg(q \vee r) \equiv \neg(p \wedge (q \vee r))$$

Επομένως οι δύο τύποι είναι ταυτολογικά ισοδύναμοι.

- ii. Χρησιμοποιούμε πρώτα αντικατάσταση συνεπαγωγής και στην συνέχεια κανόνα De Morgan και έχουμε:

$$p \rightarrow \neg(q \wedge r) \equiv \neg p \vee \neg(q \wedge r) \equiv \neg(p \wedge (q \wedge r))$$

Ο τελευταίος τύπος είναι πάντα αληθής για $q = \Psi$, ενώ ο δοθείς δεν είναι. Άρα οι δύο τύποι δεν είναι ισοδύναμοι.

- iii. Ομοίως με αντικατάσταση συνεπαγωγής και στην συνέχεια De Morgan:

$$(q \vee r) \rightarrow \neg p \equiv \neg(q \vee r) \vee \neg p \equiv \neg((q \vee r) \wedge p) \equiv \neg(p \wedge (q \vee r)),$$

που είναι ο δοθείς τύπος.

2. (15 μον.) Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως αληθείς ή ψευδείς. Τα p, q και r είναι προτασιακές μεταβλητές. Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

i. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ είναι ταυτολογία.

ii. $\{p \wedge p, \neg p \rightarrow \neg r, q \rightarrow r\} \models \neg p \vee (q \wedge \neg r)$.

iii. Αν το T είναι συνεπές σύνολο τύπων, τότε $T \vdash p \wedge \neg p$.

Απάντηση

- i. Αληθής. Ο τύπος δεξιά της ισοδυναμίας είναι ο αντιστροφoαντίθετος του τύπου δεξιά.
 - ii. Ψευδής. Για να ικανοποιηθεί το σύνολο τύπων αριστερά, πρέπει $p = A$ (που ικανοποιεί και τον δεύτερο τύπο). Ο τρίτος τύπος επαληθεύεται είτε όταν $q = \Psi$ είτε όταν $q = r = A$. Καμία από αυτές τις αποτιμήσεις δεν ικανοποιεί τον τύπο δεξιά.
 - iii. Ψευδής. Χρησιμοποιούμε Θεώρημα Εγκυρότητας-Πληρότητας. Ο τύπος δεξιά είναι αντίφαση. Επειδή το T είναι συνεπές είναι και ικανοποιήσιμο άρα δεν μπορεί να συνεπάγεται ταυτολογικά μία αντίφαση.
3. (25 μον.) Έστω σύνολο $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και έστω δομή $\mathcal{A}$ με σύμπαν το δυναμοσύνολο 2^S του S , διμελές κατηγορηματικό σύμβολο Q , όπου $Q(X, Y)$ ερμηνεύεται ως « $X \subseteq Y$ », σύμβολο σταθεράς c , η οποία ισούται με το σύνολο $\{0, 1, 2\}$, και διθέσιο συναρτησιακό σύμβολο f , όπου $f(X, Y)$ ισούται με $X \cup Y$ (δηλ. $f(X, Y)$ επιστρέφει την ένωση του συνόλου X με το σύνολο Y).
- i. Στην δομή $\mathcal{A}$, να δώσετε τύπο $\varphi_1(Y)$ που να δηλώνει ότι «το σύνολο Y έχει τουλάχιστον ένα στοιχείο που δεν ανήκει στο c ».
 - ii. Στην δομή $\mathcal{A}$, να δώσετε τύπο που να δηλώνει «Το c έχει τουλάχιστον ένα γνήσιο υπερσύνολο».
 - iii. Να ερμηνεύσετε τον παρακάτω τύπο σε φυσική γλώσσα περιγράφοντας την ιδιότητα που έχουν όλα τα στοιχεία X του σύμπαντος που τον ικανοποιούν:

$$\varphi_2(X) = \exists Y(\varphi_1(Y) \wedge (X \approx f(c, Y))),$$

όπου $\varphi_1(Y)$ είναι ο τύπος από το (i).

Απάντηση

- i. Η ένωση ενός τέτοιου συνόλου με το c , δίνει σύνολο διάφορο από το c . Άρα
- $$\varphi_1(Y) = \neg(f(c, Y) \approx c)$$
- ii.
- $$\exists X(Q(c, X) \wedge \neg(c \approx X))$$
- iii. «Το X είναι γνήσιο υπερσύνολο του c ».
4. (15 μον.) Σε ένα συνέδριο βρίσκονται 10 άνδρες και 15 γυναίκες.
- i. Να βρείτε τον συνολικό αριθμό των χειραψιών που θα γίνουν αν κάθε σύνοδος χαιρετηθεί με κάθε άλλο από μια φορά.
 - ii. Να βρείτε τον συνολικό αριθμό χειραψιών μεταξύ ανδρών και γυναικών.
 - iii. Να αποδείξετε χρησιμοποιώντας συνδυαστικά επιχειρήματα (δηλ. χωρίς αλγεβρικές πράξεις) ότι

$$\binom{25}{2} = \binom{15}{2} + \binom{10}{2} + 15 \cdot 10.$$

Απάντηση

- i. Κάθε ζεύγος ανθρώπων κάνει μία χειραψία. Επομένως οι χειραψίες είναι όσα τα ζεύγη των ανθρώπων που είναι $\binom{25}{2}$.
 - ii. Από τον κανόνα του γινομένου, αυτές οι χειραψίες είναι $15 \cdot 10$.
 - iii. Στο δεξί μέλος οι δύο διωνυμικοί συντελεστές είναι οι χειραψίες μεταξύ ανδρών και γυναικών αντίστοιχα (με το σκεπτικό του (i)) ενώ το γινόμενο $15 \cdot 10$ είναι οι χειραψίες μεταξύ ανδρών και γυναικών. Το άθροισμα αυτό είναι το σύνολο των χειραψιών μεταξύ όλων των ατόμων, που είναι το αριστερό μέλος.
5. (15 μον.) Στα 30 διακεκριμένα ντουλάπια ενός αεροπλάνου πρέπει να τοποθετηθούν 20 διακεκριμένες αποσκευές. Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η τοποθέτηση στις εξής περιπτώσεις:
- i. Κάθε ντουλάπι χωράει το πολύ μια αποσκευή.
 - ii. Κάθε ντουλάπι μπορεί να χωρέσει μέχρι και όλες τις αποσκευές και δεν έχει σημασία η σειρά των αποσκευών μέσα στα ντουλάπια.
 - iii. Στην περίπτωση (ii.), να βρείτε την πιθανότητα σε μια τυχαία τοποθέτηση των αποσκευών στα ντουλάπια, 4 συγκεκριμένες αποσκευές (π.χ. οι βαλίτσες a_1, a_2, a_3 και a_4) να βρεθούν στο ίδιο ντουλάπι (οποιοδήποτε από τα 30).

Απάντηση

- i. Έχουμε διατάξεις των 30 ανά 20, άρα $(30)_{20}$.
- ii. Για κάθε αποσκευή έχουμε 30 επιλογές τοποθέτησης, άρα οι τρόποι είναι 30^{20} .
- iii. Οι τρόποι τοποθέτησης ώστε οι 4 συγκεκριμένες αποσκευές να τοποθετηθούν στο ίδιο ντουλάπι είναι $30 \cdot 30^{16}$. (Επιλογή ενός από τα 30 ντουλάπια όπου θα τοποθετηθούν οι 4 συγκεκριμένες αποσκευές και στην συνέχεια τοποθέτηση των υπόλοιπων 16 στα 30 ντουλάπια.) Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$p = \frac{30 \cdot 30^{16}}{30^{20}} = 30^{-3}.$$

6. (20 μον.) Μια βιβλιοθήκη περιέχει 200 επιστημονικά άρθρα. Από αυτά, στα 120 εμφανίζεται η λέξη “mathematics” (M), στα 100 η λέξη “biology” (B) και στα 90 η λέξη “physics” (P). Επίσης, σε 60 άρθρα εμφανίζονται οι λέξεις M και B, σε 40 εμφανίζονται οι λέξεις M και P και σε 50 εμφανίζονται οι λέξεις B και P. Τέλος, σε 20 άρθρα εμφανίζεται η λέξη B αλλά καμία από τις άλλες δυο λέξεις (M ή P).
- i. Να βρείτε σε πόσα άρθρα δεν εμφανίζεται καμία από τις τρεις λέξεις. (Υπόδειξη: Βρείτε μια σχέση για το πλήθος των άρθρων που δεν περιέχουν ούτε την M ούτε την P.)
 - ii. Να βρείτε σε πόσα άρθρα εμφανίζονται και οι τρεις λέξεις.

Απάντηση

- i. Αγνοούμε προσωρινά το χαρακτηριστικό B και εφαρμόζουμε την αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού για τα χαρακτηριστικά M και P. Τα άρθρα που δεν περιλαμβάνουν ούτε το M ούτε το P είναι $200 - 120 - 90 + 40 = 30$. Από αυτά αφαιρούμε τα 20 όπου εμφανίζεται το B και συνεπώς σε 10 άρθρα δεν εμφανίζεται καμία από τις τρεις λέξεις.
- ii. Τέλος, εφαρμόζοντας Εγκλεισμό-Αποκλεισμό και για τα τρία χαρακτηριστικά έχουμε την παρακάτω εξίσωση, όπου x είναι το πλήθος των άρθρων που περιλαμβάνουν και τις τρεις λέξεις.

$$10 = 200 - 120 - 100 - 90 + 60 + 40 + 50 - x.$$

Άρα σε $x = 30$ άρθρα εμφανίζονται και οι τρεις λέξεις.