

Όνοματεπώνυμο:.....

Τμήμα:.....Διδάσκων:.....

(Οι εκφωνήσεις επιστρέφονται μαζί με το γραπτό)

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εξετάσεις (επί πτυχίω) Ιανουαρίου 2025

Διδάσκοντες: Δ. Καββαδίας - Χ. Ραπτόπουλος

1. (15 μον.) Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας. Καμία απάντηση δεν θα ληφθεί υπόψη χωρίς δικαιολόγηση.
- i. Κάθε d -κανονικό, διμερές γράφημα έχει $2d$ κορυφές.
 - ii. Η συμπίεση μιας ακμής ενός γραφήματος μπορεί να μειώσει τον αριθμό των συνεκτικών συνιστωσών του.
 - iii. Υπάρχει απλό γράφημα 7 κορυφών, με ακολουθία βαθμών κορυφών 6, 6, 5, 3, 3, 2, 1.
 - iv. Υπάρχει δέντρο, στο οποίο, αν προσθέσουμε μια ακμή, προκύπτει Eulerian γράφημα (δηλ. γράφημα που περιέχει κύκλο Euler).
 - v. Υπάρχει δέντρο n κορυφών, του οποίου το συμπληρωματικό είναι επίσης δέντρο n κορυφών.

Απάντηση

- i. Ψευδής. Οποιοσδήποτε κύκλος με άρτιο αριθμό κορυφών $n > 4$ είναι 2-κανονικό γράφημα με n κορυφές. Π.χ. ο C_6 είναι 2-κανονικό γράφημα με $6 \neq 4$ κορυφές.
 - ii. Ψευδής. Η συμπίεση μιας ακμής διατηρεί κάθε μονοπάτι μεταξύ δύο κορυφών, μέσω της κορυφής στην οποία συμπιέζεται η ακμή.
 - iii. Ψευδής. Οι κορυφές βαθμού 6 πρέπει να ενώνονται με όλες τις άλλες, άτοπο διότι τότε δεν θα υπήρχε κορυφή βαθμού 1.
 - iv. Αληθής. Ένα οποιοδήποτε μονοπάτι είναι δένδρο στο οποίο αν προσθέσουμε μία ακμή που ενώνει τα δύο άκρα του, δημιουργείται κύκλος.
 - v. Αληθής. Το μονοπάτι με 4 κορυφές είναι αυτοσυμπληρωματικό.
2. (15 μον.) Να δώσετε (και να αποδείξετε) έναν κλειστό τύπο για τον αριθμό των κύκλων Hamilton σε ένα πλήρες γράφημα $n \geq 3$ κορυφών.

Απάντηση

Στο K_n υπάρχει κάθε δυνατή ακμή μεταξύ δύο κορυφών, συνεπώς το πλήθος των κύκλων Hamilton είναι όσες οι κυκλικές μεταθέσεις των n κορυφών διαιρούμενο δια 2, διότι ένας κύκλος έχει δύο φορές διαγραφής. Συνεπώς το πλήθος είναι $(n-1)!/2$.

3. (15 μον.)

i. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω ταυτολογικές συνεπαγωγές ισχύουν, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.

$$1. \{(p \rightarrow \neg q), (q \wedge r)\} \models (\neg p \vee r)$$

$$2. \{\neg p, (\neg q \rightarrow r)\} \models (\neg p \wedge r)$$

ii. Έστω φ, χ, ψ προτασιακοί τύποι. Να εξετάσετε αν ο παρακάτω τύπος είναι τυπικό θεώρημα. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το Θεώρημα της Πληρότητας.

$$((\neg \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \neg \neg \chi)) \rightarrow ((\neg \varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg \varphi \rightarrow \chi)))$$

Απάντηση

i. 1. Μια αποτίμηση που επαληθεύει τους τύπους αριστερά, πρέπει να έχει $q = r = A$ (δεύτερος τύπος) και άρα $p = \Psi$ (πρώτος τύπος). Όμως τότε και ο τύπος δεξιά, αληθεύει.

2. Αν $p = r = \Psi$ και $q = A$, τότε οι δύο τύποι αριστερά αληθεύουν, αλλά όχι ο τύπος δεξιά.

ii. Ακολουθώντας την υπόδειξη, ο τύπος είναι τυπικό θεώρημα αν και μόνο αν είναι ταυτολογία. Η διπλή άρνηση μπροστά από την μεταβλητή χ μπορεί να αφαιρεθεί (οδηγεί σε ισοδύναμο τύπο), οπότε στην συνέχεια έχουμε ένα τύπο που προκύπτει από το ΑΣ2, άρα είναι ταυτολογία.

4. (15 μον.) Θεωρούμε μια δομή με σύμπαν $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ και η οποία είναι εφοδιασμένη με ένα διθέσιο συναρτησιακό σύμβολο p , όπου $p(a, n)$ ερμηνεύεται ως a^n , δηλαδή σαν την ύψωση του a στην n -οστή δύναμη, το διθέσιο συναρτησιακό σύμβολο «+», με τη συνήθη ερμηνεία της πρόσθεσης, και ένα κατηγορηματικό σύμβολο Q όπου $Q(n)$ ερμηνεύεται ως $n > 2$.

i. Να ερμηνεύσετε τον παρακάτω τύπο σε φυσική γλώσσα και να εξετάσετε αν αληθεύει στην παραπάνω δομή:

$$\forall a \exists b \exists c (P(a, 2) \approx P(b, 2) + P(c, 2))$$

ii. Δώστε τύπο φ με ερμηνεία «για οποιοδήποτε φυσικό $n > 2$, δεν υπάρχουν θετικοί φυσικοί a, b και c που να ικανοποιούν τη σχέση $a^n + b^n = c^n$ ».

Απάντηση

i. «Το τετράγωνο κάθε φυσικού (μεγαλύτερου του 0) είναι το άθροισμα των τετραγώνων δύο (άλλων) φυσικών». Η πρόταση είναι ψευδής. Π.χ. αν $a = 1$, δεν υπάρχουν $b, c \in \mathbb{N}_+$ έτσι ώστε $1 = b^2 + c^2$.

ii.

$$\forall n (Q(n) \rightarrow \neg \exists a \exists b \exists c (p(a, n) + p(b, n) \approx p(c, n)))$$

5. (15 μον.) Ένας ελαιοχρωματιστής έχει αναλάβει να χρωματίσει τα 200 καθίσματα ενός αμφιθεάτρου, χρησιμοποιώντας 5 διαφορετικά χρώματα (υποθέτουμε ότι κάθε κάθισμα είναι διακεκριμένο και μπορεί να έχει μόνο ένα από τα 5 χρώματα).

- i. Να βρείτε τον αριθμό των διαφορετικών χρωματισμών που μπορεί να κάνει ο ελαιο-χρωματιστής.
- ii. Να βρείτε τον αριθμό των διαφορετικών χρωματισμών, αν κανένα χρώμα δεν πρέπει να έχει χρησιμοποιηθεί σε περισσότερες καρέκλες από κάποιο άλλο.
- iii. Αφού γίνει ένας χρωματισμός με ίσο αριθμό καθισμάτων ανά χρώμα, να βρείτε τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων να επιλέξουμε 3 καθίσματα από κάθε χρώμα.

Απάντηση

- i. Για κάθε κάθισμα έχουμε 5 επιλογές, και οι επιλογές είναι ανεξάρτητες για κάθε κάθισμα, άρα από τον κανόνα του γινομένου έχουμε 5^{200} διαφορετικούς χρωματισμούς.
 - ii. Εφόσον κανένα χρώμα δεν πρέπει να έχει χρησιμοποιηθεί σε περισσότερα καθίσματα από κάποιο άλλο, θα πρέπει να έχουμε 40 καθίσματα από το κάθε χρώμα. Ισοδύναμα, έχουμε να διατάξουμε 5 ομάδες όμοιων αντικειμένων (δηλ. καθίσματα με το ίδιο χρώμα) σε 200 θέσεις. Ισοδύναμα, επιλέγουμε χωρίς επανατοποθέτηση με $C(200, 40)$ τρόπους τα καθίσματα που θα έχουν το 1ο χρώμα, με $C(160, 40)$ τρόπους τα καθίσματα που θα έχουν το 2ο χρώμα κ.ο.κ. Τελικά, ο συνολικός αριθμός των ζητούμενων χρωματισμών είναι $\frac{200!}{(40!)^5}$.
 - iii. Έχουμε $C(40, 3)$ επιλογές από κάθε χρώμα, και εφόσον οι επιλογές είναι ανεξάρτητες, από τον κανόνα του γινομένου, ο συνολικός αριθμός των τρόπων επιλογής είναι $(C(40, 3))^5$.
6. (10 μον.) Σε μια έρευνα σχετικά με τις προτιμήσεις αθλημάτων, στην οποία συμμετείχαν 100 άτομα, 50 δήλωσαν ότι τους αρέσει το μπάσκετ (=M), 60 ότι τους αρέσει το ποδόσφαιρο (=Π) και 30 ότι τους αρέσει το τένις (T). Αν γνωρίζουμε ότι σε 40 αρέσει το M και το Π, σε 15 αρέσει το Π και το T, σε 25 αρέσει το M και το T και σε 10 αρέσουν και τα τρία αθλήματα, να βρείτε πόσοι δήλωσαν ότι δεν τους αρέσει κανένα από τα τρία αθλήματα.

Απάντηση

Παρατηρούμε καταρχήν ότι, εφαρμόζοντας απευθείας τον τύπο εγκλεισμού-αποκλεισμού, παίρνουμε ότι το ζητούμενο είναι

$$\begin{aligned} |\overline{M} \cap \overline{\Pi} \cap \overline{T}| &= 100 - |M| - |\Pi| - |T| + |M \cap \Pi| + |M \cap T| + |\Pi \cap T| - |M \cap \Pi \cap T| \\ &= 100 - 50 - 60 - 30 + 40 + 15 + 25 - 10 = 30. \end{aligned}$$

Παρόλα αυτά, όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς, αν προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τον αριθμό των ατόμων που τους αρέσει μόνο το μπάσκετ (δηλ. τον πληθάριθμο του $M \cap \overline{\Pi} \cap \overline{T}$), τότε, βασιζόμενοι πάλι την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού, αλλά με νέο δειγματοχώρο το M , έχουμε

$$\begin{aligned} |M \cap \overline{\Pi} \cap \overline{T}| &= |M| - |M \cap \Pi| - |M \cap T| + |M \cap \Pi \cap T| \\ &= 50 - 40 - 25 + 10 = -25. \end{aligned}$$

Προφανώς το παραπάνω δεν μπορεί να συμβεί, που σημαίνει ότι δεν είναι δυνατόν να προκύψουν αυτά τα στατιστικά σε οποιαδήποτε έρευνα.

Το θέμα αυτό βαθμολογείται με 10 μονάδες, είτε αν δόθηκε η απάντηση με απευθείας εφαρμογή του τύπου εγκλεισμού-αποκλεισμού για τον υπολογισμό του $|\overline{M} \cap \overline{\Pi} \cap \overline{T}|$, είτε αν έγινε η παρατήρηση σχετικά με το $|M \cap \overline{\Pi} \cap \overline{T}|$.

7. (15 μον.) Γράψτε γεννήτρια συνάρτηση και υποδείξτε τον συντελεστή που δίνει το πλήθος των θετικών ακεραίων λύσεων της εξίσωσης

$$x + 2y + z = 30$$

με τους περιορισμούς: $x \geq 3$, $y \leq 10$ και z άρτιος.

Απάντηση

Ο απαριθμητής για την μεταβλητή x είναι $w^3 + \dots w^{30}$. Ο απαριθμητής για την y είναι $w^2 + \dots + w^{20}$, επειδή η μεταβλητή y πολλαπλασιάζεται με το 2, δεν μπορεί να συνεισφέρει περισσότερο από 20 μονάδες και δεν μπορεί να είναι 0 λόγω του περιορισμού θετικότητας. Ο απαριθμητής για την z είναι $w^2 + \dots w^{30}$, επειδή πρέπει να είναι άρτιος, αλλά δεν μπορεί να είναι 0. Συνολικά, η γεννήτρια συνάρτηση δίνεται από το γινόμενο $(w^3 + \dots w^{30})(w^2 + \dots + w^{20})(w^2 + \dots w^{30})$, και το πλήθος των θετικών ακεραίων λύσεων της εξίσωσης δίνεται από τον συντελεστή του w^{30} .

□