

Όνοματεπώνυμο:.....

Τμήμα:.....Διδάσκων:.....

(Οι εκφωνήσεις επιστρέφονται μαζί με το γραπτό)

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2025

Διδάσκοντες: Δ. Καββαδίας - Χ. Ραπτόπουλος

1. (15 μονάδες) Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας. Καμία απάντηση δεν θα ληφθεί υπόψη χωρίς αιτιολόγηση.
- i. Κάθε συνεκτικό γράφημα με $n \geq 10$ κορυφές και $n + 1$ ακμές έχει ακριβώς 2 κύκλους.
 - ii. Η ακολουθία 6, 6, 5, 4, 3, 2, 2 είναι γραφική.
 - iii. Υπάρχει επίπεδο συνεκτικό γράφημα με $f + 1$ τρίγωνα (δηλ. υπογραφήματα K_3), όπου f είναι ο αριθμός των όψεων.
 - iv. Υπάρχει γράφημα με $n \geq 5$ κορυφές και $n + 2$ ακμές που έχει τουλάχιστον 2 διαφορετικούς κύκλους Hamilton.
 - v. Κάθε συνεκτικό γράφημα με n κορυφές και n ακμές είναι επίπεδο.

Απάντηση.

- i. Λάθος. Για παράδειγμα, ένας κύκλος με μια επιπλέον ακμή που δεν ανήκει στον κύκλο έχει $n + 1$ ακμές και 3 διαφορετικούς κύκλους.
 - ii. Λάθος, επειδή υπάρχουν συνολικά 7 κορυφές, οπότε οι κορυφές με βαθμό 6 θα πρέπει να ενώνονται με όλες τις άλλες, ενώ η κορυφή με βαθμό 5 θα πρέπει να ενώνεται με όλες εκτός από μια, που σημαίνει ότι μπορεί να υπάρχει το πολύ μια κορυφή βαθμού 2.
 - iii. Λάθος, επειδή τα τρίγωνα αποτελούν όψεις του γραφήματος, οπότε μπορούμε να έχουμε το πολύ f τρίγωνα.
 - iv. Σωστό. Για παράδειγμα το γράφημα που αποτελείται από τον κύκλο 5 κορυφών C_5 με 2 επιπλέον ακμές που δεν έχουν κοινά άκρα.
 - v. Σωστό. Ένα συνεκτικό γράφημα με n κορυφές και n ακμές είναι ένα δέντρο με μια επιπλέον ακμή, οπότε υπάρχει επίπεδη αποτύπωση.
2. (10 μονάδες) Να βρείτε τον αριθμό των κύκλων Hamilton σε ένα πλήρες διμερές γράφημα $K_{n,m}$, για κάθε τιμή των n, m . Θεωρήστε ότι οι κορυφές είναι διακεκριμένες.

(Υπόδειξη: Ξεκινήστε από μια αυθαίρετη κορυφή και μετρήστε τις επιλογές που έχετε για να κατασκευάσετε σταδιακά έναν κύκλο Hamilton.)

Απάντηση. Καταρχήν παρατηρούμε ότι, αν $n \neq m$, ή $n \leq 1$, το $K_{n,m}$ δεν έχει κύκλο Hamilton.

Αν $n = m \geq 2$, μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν κύκλο Hamilton σταδιακά ξεκινώντας από μια αυθαίρετη κορυφή (που την επιλέγουμε με 1 τρόπο) ενός συνόλου της διαμέρισης και στη συνέχεια επιλέγοντας την επόμενη κορυφή του κύκλου από τις κορυφές του άλλου συνόλου που δεν έχουν επιλεγεί, μέχρι τελικά να τις καλύψουμε όλες. Οι επιλογές που έχουμε με αυτό τον τρόπο κατασκευής είναι $n(n-1)^2(n-2)^2 \cdots 1 = n!(n-1)!$. Παρατηρούμε όμως ότι με αυτό τον τρόπο μετράμε έναν κύκλο 2 φορές (1 φορά ακολουθώντας τις κορυφές του δεξιόστροφου και 1 αριστερόστροφου). Άρα τελικά, ο αριθμός των κύκλων Hamilton στο $K_{n,n}$, για $n \geq 2$, είναι $\frac{n!(n-1)!}{2}$.

3. (15 μονάδες) Δίνονται προτασιακοί τύποι ϕ, χ, ψ , τέτοιοι ώστε $\phi \models \chi$ και $\chi \models \psi$. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.

- i. $\phi \models \psi$
- ii. $\phi \wedge \psi \models \chi$
- iii. $\neg \chi \models \neg \phi$
- iv. $\neg \phi \models \neg \chi$
- v. $\models \psi \rightarrow \phi$

Απάντηση.

- i. Αληθής, επειδή το σύνολο των αποτιμήσεων που ικανοποιούν τον ψ είναι υπερσύνολο αυτών που ικανοποιούν τον χ , που είναι υπερσύνολο αυτών που ικανοποιούν τον ϕ .
 - ii. Σωστό, επειδή το σύνολο των αποτιμήσεων που ικανοποιεί τον $\phi \wedge \psi$ είναι ίδιο με το σύνολο των αποτιμήσεων που ικανοποιούν τον ϕ .
 - iii. Σωστό, καθώς το $\neg \chi \models \neg \phi$ είναι το αντιθετοανάστροφο του $\phi \models \chi$.
 - iv. Λάθος. Για παράδειγμα, αν $\phi = p \wedge q$ και $\chi = p \vee q$, όπου p, q προτασιακές μεταβλητές, ισχύει $\phi \models \chi$ αλλά όχι $\neg \phi \models \neg \chi$.
 - v. Λάθος. Για παράδειγμα, αν $\phi = p \wedge q$ και $\chi = \psi = p \vee q$, τότε το $\psi \rightarrow \phi$ δεν είναι ταυτολογία.
4. (15 μονάδες) Δίνεται ο πρωτοβάθμιος τύπος: $\exists x \exists y (\neg P(x, y) \wedge \neg P(y, x))$ και το σύνολο $A = \{1, 2, \dots, 10\}$. Για κάθε μία από τις παρακάτω δομές εκφράστε τον παραπάνω τύπο σε φυσική γλώσσα και εξετάστε αν αληθεύει. Εξηγήστε τις απαντήσεις σας.

- i. Δομή με σύμπαν το A , με το $P(x, y)$ να δηλώνει ότι «ο x είναι μικρότερος ή ίσος του y ».
- ii. Δομή με σύμπαν το δυναμοσύνολο (δηλ. το σύνολο των υποσυνόλων) του A , με το $P(x, y)$ να δηλώνει ότι «το x είναι υποσύνολο του y ».

Απάντηση.

- i. Στην δομή αυτή ο τύπος εκφράζεται ως «υπάρχουν δυο αριθμοί του A που κανένας δεν είναι μικρότερος ή ίσος από τον άλλο». Η πρόταση είναι προφανώς ψευδής.
- ii. Σε αυτή τη δομή ο τύπος εκφράζεται ως «υπάρχουν δυο υποσύνολα του A που κανένα δεν αποτελεί υποσύνολο του άλλου». Η πρόταση είναι αληθής. Για παράδειγμα, μπορούμε να πάρουμε τα σύνολα $x = \{1\}$ και $y = \{2\}$.

5. (15 μονάδες) Να δείξετε ότι ο αριθμός των τρόπων που ένας θετικός ακέραιος n μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα θετικών ακεραίων, όταν παίζει ρόλο η σειρά άθροισης, ισούται με 2^{n-1} . Για παράδειγμα, το 4 μπορεί να γραφτεί με 8 τρόπους ως $1 + 1 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 2 = 3 + 1 = 1 + 3 = 2 + 2 = 4$.

(Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $n = 1 + 1 + \dots + 1$ και βρείτε τους τρόπους ομαδοποίησης των n μονάδων μέσω «χωρισμάτων» ανάμεσα στις μονάδες.)

Απάντηση. Παρατηρούμε ότι κάθε τρόπος να γραφτεί το n ως άθροισμα θετικών ακεραίων αντιστοιχεί σε μια κατάλληλη ομαδοποίηση των μονάδων που το αποτελούν. Μια ομαδοποίηση μπορεί να προκύψει αν ανάμεσα από τις μονάδες τοποθετήσουμε χωρίσματα. Συγκεκριμένα, επιλέγοντας να βάλουμε ένα χωρίσμα μεταξύ δυο μονάδων σημαίνει ότι αυτές θα ανήκουν σε διαφορετικούς (διαδοχικούς) όρους του αθροίσματος, ενώ επιλέγοντας να μη βάλουμε χωρίσμα σημαίνει ότι αυτές θα ανήκουν στον ίδιο όρο. Συνολικά έχουμε $n - 1$ θέσεις όπου μπορούμε να τοποθετήσουμε χωρίσματα και η κάθε επιλογή είναι ανεξάρτητη, οπότε έχουμε συνολικά 2^{n-1} τρόπους.

6. (15 μονάδες) Να βρείτε τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να γράψουμε τον αριθμό $2^2 3^3 5^5 7^7$ ως γινόμενο δυο φυσικών αριθμών $a \cdot b$, στις παρακάτω περιπτώσεις:

- Αν δεν υπάρχει κανένας περιορισμός.
- Αν κανένα από τα a και b δεν είναι πρώτος αριθμός.
- Αν ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των a και b ισούται με 1, δηλαδή τα a και b δεν έχουν κοινούς πρώτους παράγοντες.

Απάντηση.

- Ο πρώτος παράγοντας θα είναι της μορφής $2^x 3^y 5^z 7^w$, και ο δεύτερος ορίζεται μονοσήμαντα από τις επιλογές του πρώτου. Άρα, λαμβάνοντας υπόψη τις επιλογές που έχουμε για τους εκθέτες, υπάρχουν συνολικά $3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8$ τρόποι.
 - Θα πρέπει να εξαιρέσουμε τις περιπτώσεις που ένας από τους 2 παράγοντες είναι 1, 2, 3, 5 ή 7, οπότε από το (i) έχουμε $3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 - 2 \cdot 5$ τρόπους.
 - Εφόσον τα a και b δεν έχουν κοινούς πρώτους παράγοντες, το ζητούμενο προκύπτει από τον αριθμό των τρόπων που μπορούμε να κατασκευάσουμε το a . Αυτό γίνεται με $2^4 = 16$ τρόπους, καθώς για κάθε ξεχωριστό πρώτο παράγοντα (2, 3, 5, ή 7) έχουμε δυο επιλογές, είτε τον επιλέξουμε είτε όχι, και στην περίπτωση επιλογής, ο εκθέτης ορίζεται μονοσήμαντα.
7. (15 μονάδες) Έχουμε στη διάθεσή μας 100 μπάλες, από τις οποίες 10 είναι κόκκινες που ζυγίζουν 1kg, 30 είναι πράσινες που ζυγίζουν 3kg, και 60 είναι κίτρινες που ζυγίζουν 6kg. Οι μπάλες διαφέρουν μόνο ως προς το χρώμα και το βάρος.
- Να βρείτε τον αριθμό των τρόπων να φτιάξουμε 2 σάκους με 50 μπάλες ο κάθε ένας (Σημείωση: δεν μας ενδιαφέρει το βάρος κάθε σάκου).
 - Να γράψετε γεννήτρια συνάρτηση και να υποδείξετε τον συντελεστή που ισούται με το πλήθος των τρόπων να γεμίσουμε έναν σάκο με 50kg μπάλες, ώστε να έχουμε τουλάχιστον 2 μπάλες από κάθε χρώμα.

Απάντηση.

- i. Παρατηρούμε ότι η επιλογή των μπαλών στον ένα σάκο ορίζει μονοσήμαντα τις μπάλες που θα έχει ο άλλος σάκος. Συνεπώς, αρκεί να υπολογίσουμε τους τρόπους επιλογής 50 μπαλών για τον ένα σάκο. Αυτό είναι ισοδύναμο με τους συνδυασμούς $k = 50$ μη διακεκριμένων αντικειμένων (σύνολο μπαλών) σε $n = 3$ διακεκριμένες υποδοχές (είδη μπαλών) με επανάληψη, που γίνεται με $\binom{3+50-1}{50} = \binom{52}{2} = 1326$ τρόπους.
- ii. Ο απαριθμητής για τις κόκκινες μπάλες είναι $x^2 + x^3 + \dots + x^{10}$, για τις πράσινες είναι $x^6 + x^9 + \dots + x^{48}$ και για τις κίτρινες είναι $x^{12} + x^{18} + \dots + x^{48}$. Η γεννήτρια συνάρτηση προκύπτει από το γινόμενο αυτών, άρα ισούται με $(x^2 + x^3 + \dots + x^{10})(x^6 + x^9 + \dots + x^{48})(x^{12} + x^{18} + \dots + x^{48})$, ενώ το ζητούμενο δίνεται από τον συντελεστή του x^{50} .