

Όνοματεπώνυμο:.....

Τμήμα:.....Διδάσκων:.....

(Οι εκφωνήσεις επιστρέφονται μαζί με το γραπτό)

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εξετάσεις Ιουνίου 2025 - Λύσεις Θεμάτων

Διδάσκοντες: Δ. Καββαδίας - Χ. Ραπτόπουλος

1. (15 μον.) Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας. Καμία απάντηση δεν θα ληφθεί υπόψη χωρίς δικαιολόγηση.
- i. Ένα δάσος με k δένδρα και συνολικά n κορυφές έχει $n - k$ ακμές
 - ii. Έστω G γράφημα που έχει κύκλο Euler. Διαιρούμε μία ακμή του G με μια καινούργια κορυφή w (δηλαδή αν uv είναι η ακμή, την αντικαθιστούμε με τις ακμές uw και wv). Το προκύπτον γράφημα συνεχίζει να έχει κύκλο Euler.
 - iii. Το πλήρες διμερές γράφημα $K_{2,3}$ έχει κύκλο Hamilton.
 - iv. Υπάρχει επίπεδο συνεκτικό γράφημα με 8 κορυφές, 10 ακμές και 5 όψεις.
 - v. Η προσθήκη μιας καινούργιας ακμής μεταξύ δύο κορυφών u και v ενός γραφήματος G δημιουργεί καινούργιο κύκλο αν και μόνο αν οι u και v βρίσκονται στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του G .

Απάντηση

- i. Αληθής. Χρειάζονται $k - 1$ ακμές για να ενωθούν τα k δένδρα του δάσους σε ένα δένδρο. Αυτό θα έχει $n - 1$ ακμές, οπότε αφαιρώντας τις $k - 1$ που προστέθηκαν έχουμε $n - k$ ακμές.
 - ii. Αληθής. Το καινούργιο γράφημα είναι συνεκτικό οι δε βαθμοί των κορυφών του είναι όλοι άρτιοι μια και η καινούργια κορυφή έχει βαθμό 2.
 - iii. Ψευδής. Ένα πλήρες διμερές γράφημα $K_{n,m}$ έχει κύκλο Hamilton αν και μόνο εάν $n = m \geq 2$.
 - iv. Ψευδής. Θα πρέπει να ισχύει ο τύπος του Euler, δηλαδή $8+5=10+2$. Προφανώς δεν ισχύει.
 - v. Αληθής. Αν η u και v είναι στην ίδια συνεκτική συνιστώσα τότε ενώνονται με μονοπάτι, άρα η προσθήκη της ακμής uv δίνει καινούργιο κύκλο. Αν δεν είναι στην ίδια συνιστώσα, τότε η uv είναι μια γέφυρα που ενώνει τις δύο συνιστώσες, άρα δεν υπάρχει κύκλος που να την περιλαμβάνει.
2. (10 μον.) Να βρείτε το πλήθος των ακμών στο συμπληρωματικό γράφημα του πλήρους διμερούς γραφήματος $K_{n,m}$, όπου $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$.

Απάντηση

Το συμπληρωματικό του $K_{n,m}$ αποτελείται από δυο πλήρη υπογραφήματα K_n και K_m χωρίς κοινές κορυφές (άρα ούτε κοινές ακμές). Το πλήθος των ακμών στο πλήρες γράφημα K_n ισούται με το πλήθος των τρόπων επιλογής δυο κορυφών από τις n , χωρίς επανατοποθέτηση και χωρίς να ενδιαφέρει η σειρά επιλογής, δηλαδή $C(n, 2) = \binom{n}{2}$. Ομοίως, το πλήθος ακμών στο K_m ισούται με $C(m, 2) = \binom{m}{2}$. Συνολικά, από τον κανόνα του αθροίσματος, το πλήθος των ακμών στο συμπληρωματικό του $K_{n,m}$ ισούται με $C(n, 2) + C(m, 2) = \binom{n}{2} + \binom{m}{2}$.

3. (15 μον.)

- i. Έστω φ και ψ προτασιακοί τύποι. Ο φ είναι ικανοποιήσιμος ενώ ο ψ ταυτολογία. Ποιές από τις παρακάτω δηλώσεις είναι αληθείς; Αιτιολογήστε.
 1. Ο $\varphi \wedge \psi$ είναι ταυτολογία.
 2. Ο $\varphi \vee \psi$ είναι ταυτολογία.
 3. Ο $\varphi \rightarrow \psi$ είναι ταυτολογία.
 4. $\neg\psi \vdash \varphi$
- ii. Έστω $\varphi = (p_1 \rightarrow p_2) \wedge p_3$ όπου p_1, p_2, p_3 προτασιακές μεταβλητές. Αν για τον προτασιακό τύπο ψ που ορίζεται επίσης στις p_1, p_2, p_3 , ισχύει ότι $\varphi \models \neg\psi$, σε πόσες το πολύ αποτιμήσεις (από τις 8 πιθανές) επαληθεύεται ο ψ ;

Απάντηση

- i.
 1. Ψευδής. Ο τύπος διαψεύδεται όταν ο φ διαψεύδεται. Άρα δεν πρόκειται για ταυτολογία.
 2. Αληθής. Ο τύπος αληθεύει όταν τουλάχιστον ένας από τους δύο τύπους αληθεύει. Επειδή όμως ο ψ είναι ταυτολογία και ο $\varphi \vee \psi$ είναι ταυτολογία.
 3. Αληθής. Το συμπέρασμα της συνεπαγωγής είναι πάντα αληθές, άρα και όλη η συνεπαγωγή.
 4. Αληθής. Ο $\neg\psi$ είναι αντίφαση, άρα αποδεικνύει κάθε τύπο.
 - ii. Ο τύπος φ επαληθεύεται στις 3 αποτιμήσεις $(p_1, p_2, p_3) = (T, T, T)$ ή (F, T, T) ή (F, F, T) . Σε αυτές τουλάχιστον τις αποτιμήσεις πρέπει να επαληθεύεται και ο $\neg\psi$ άρα σε αυτές τουλάχιστον πρέπει να διαψεύδεται ο ψ και άρα σε 5 το πολύ αποτιμήσεις πρέπει να επαληθεύεται ο ψ .
4. (15 μον.) Θεωρούμε μια δομή με σύμπαν $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ η οποία περιλαμβάνει ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $Q(x, y)$ με ερμηνεία «ο φυσικός x διαιρεί τον y ».

- i. Στην παραπάνω δομή γράψτε τύπο $\varphi(x, y)$ που να δηλώνει «το σύνολο των διαιρετών του x είναι γνήσιο υποσύνολο του συνόλου των διαιρετών του y ».
- ii. Ποιοί αριθμοί επαληθεύουν τον τύπο $\varphi(x, 8)$;
Υπόδειξη: Σκεφτείτε ποιοί είναι το σύνολο των διαιρετών του 8.

Απάντηση

i.

$$\varphi(x, y) = \forall z(Q(z, x) \rightarrow Q(z, y)) \wedge \exists z(Q(z, y) \wedge \neg Q(z, x))$$

- ii. Το σύνολο των διαιρετών του 8 είναι προφανώς το $\{1, 2, 4, 8\}$ και εφόσον ο x επαληθεύει τον $\varphi(x, 8)$ το σύνολο των διαιρετών του θα είναι γνήσιο υποσύνολο του παραπάνω συνόλου. Το 8 δεν μπορεί όμως να περιλαμβάνεται σε αυτό γιατί τότε και όλοι οι υπόλοιποι αριθμοί θα πρέπει να περιλαμβάνονται στους διαιρέτες του x . Άρα οι διαιρέτες του x είναι κάποιο υποσύνολο του $\{1, 2, 4\}$ και επομένως το $x = 1$ ή $x = 2$ ή $x = 4$.
5. (15 μον.) Να βρείτε το πλήθος των τρόπων να φτιάξουμε 3 διαφορετικές ομάδες (π.χ. την θεατρική ομάδα, την ομάδα ποδοσφαίρου και την ομάδα χορού) με τους 99 διακεκριμένους μαθητές ενός σχολείου, στις παρακάτω περιπτώσεις:
- i. Κάθε μαθητής μπορεί να ανήκει σε 1 ή 2 ομάδες.
- ii. Κάθε μαθητής πρέπει να ανήκει ακριβώς σε 1 ομάδα και όλες οι ομάδες έχουν τον ίδιο αριθμό μαθητών.

Απάντηση

- i. Κάθε μαθητής έχει 6 επιλογές, αφού μπορεί να επιλέξει είτε μόνο μια από τις 3 ομάδες, είτε κάποιο συνδυασμό 2 από αυτές. Επίσης, η επιλογή κάθε μαθητή δεν επηρεάζει την επιλογή των άλλων μαθητών, οπότε, από τον κανόνα του γινομένου, υπάρχουν 6^{99} διαφορετικοί τρόποι να φτιάξουμε τις ομάδες.
- ii. Παρατηρούμε ότι κάθε ομάδα θα πρέπει να έχει ακριβώς 33 μαθητές. Επίσης, δεν υπάρχει διαφοροποίηση μεταξύ των θέσεων σε κάθε ομάδα, οπότε το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με την αντιστοίχιση των θέσεων των ομάδων στους μαθητές, δηλαδή με την μετάθεση 99 αντικειμένων που είναι χωρισμένα σε 3 ομάδες (οι διαθέσιμες θέσεις κάθε ομάδας), με 33 αντικείμενα η κάθε μια, όπου τα αντικείμενα κάθε ομάδας είναι όμοια μεταξύ τους. Άρα, οι διαφορετικοί τρόποι να φτιάξουμε τις ομάδες σε αυτή την περίπτωση είναι $\frac{99!}{(33!)^3}$.
6. (10 μον.) Κατά τη δήλωση προτιμήσεων 300 καθηγητών μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, 170 δήλωσαν τον νομό Αχαΐας (Α), 140 δήλωσαν τον νομό Μεσσηνίας (Μ) και 120 δήλωσαν τον νομό Ηλείας (Η). Επιπλέον, 70 δήλωσαν Α και Μ, 50 δήλωσαν Α και Η ενώ 30 δήλωσαν και τους τρεις νομούς. Αν γνωρίζουμε επιπλέον ότι όλοι οι μαθηματικοί που έκαναν δήλωση επέλεξαν τουλάχιστον έναν νομό, να βρείτε πόσοι επέλεξαν μόνο τους νομούς Μ και Η αλλά όχι τον Α.

Απάντηση

Αρχικά, εφαρμόζουμε την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού για να υπολογίσουμε το $|MH|$, δηλαδή το πλήθος των μαθηματικών που συμπεριέλαβαν στις επιλογές τους τους νομούς Μ και Η. Συγκεκριμένα, λαμβάνοντας υπόψη ότι $|\bar{A}M\bar{H}| = 0$, αφού όλοι επέλεξαν τουλάχιστον έναν νομό, έχουμε:

$$0 = 300 - |A| - |M| - |H| + |AM| + |AH| + |MH| - |AMH|,$$

οπότε αντικαθιστώντας βρίσκουμε $|MH| = 40$. Επίσης, έχουμε ότι $|MH| = |\bar{A}MH| + |AMH|$ αφού αυτοί που συμπεριέλαβαν στις επιλογές τους τους νομούς Μ και Η είτε συμπεριέλαβαν στη δήλωσή τους τον νομό Α, είτε όχι. Αντικαθιστώντας, παίρνουμε το ζητούμενο $|\bar{A}MH| = 40 - 30 = 10$.

7. (10 μον.) Να βρείτε το πλήθος των τρόπων να τοποθετήσουμε 50 όμοια αντίτυπα βιβλίων Άλγεβρας και 30 όμοια αντίτυπα βιβλίων Γεωμετρίας στα 7 διακεκριμένα ράφια μιας βιβλιοθήκης, χωρίς να έχει σημασία η σειρά τοποθέτησης στα ράφια, αν κάθε ράφι πρέπει να έχει τουλάχιστον 5 αντίτυπα Άλγεβρας και 3 αντίτυπα Γεωμετρίας.

Απάντηση

Εφόσον η τοποθέτηση των βιβλίων Άλγεβρας δεν επηρεάζει την τοποθέτηση των βιβλίων Γεωμετρίας, θα μετρήσουμε τους τρόπους τοποθέτησής τους ξεχωριστά και στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε τον κανόνα του γινομένου.

Συγκεκριμένα, αν αγνοήσουμε προσωρινά τα βιβλία Γεωμετρίας, το πρόβλημα τοποθέτησης των 50 όμοιων αντιτύπων Άλγεβρας στα ράφια είναι ισοδύναμο με την τοποθέτηση 50 όμοιων μπαλών (αντίτυπα Άλγεβρας) σε 7 διακεκριμένες υποδοχές (ράφια), ώστε κάθε υποδοχή να έχει τουλάχιστον 5 μπάλες. Για να ικανοποιήσουμε τον περιορισμό, δεσμεύουμε 35 μπάλες ώστε να τοποθετήσουμε 5 σε κάθε υποδοχή οπότε έχουμε να τοποθετήσουμε 15 όμοιες μπάλες σε 7 διακεκριμένες υποδοχές, χωρίς επιπλέον περιορισμούς. Το τελευταίο είναι πρόβλημα συνδυασμών $n = 7$ διακεκριμένων αντικειμένων ανά $k = 15$ με επανάληψη, άρα γίνεται με $\binom{7+15-1}{15} = \binom{21}{15}$ τρόπους.

Ομοίως, αν αγνοήσουμε προσωρινά τα βιβλία Άλγεβρας, για την τοποθέτηση των βιβλίων Γεωμετρίας δεσμεύουμε 21 βιβλία για να ικανοποιηθεί ο περιορισμός και στη συνέχεια τοποθετούμε τα υπόλοιπα 9 βιβλία Γεωμετρίας στα 7 ράφια χωρίς επιπλέον περιορισμούς, με $\binom{7+9-1}{9} = \binom{15}{9}$ τρόπους.

Συνολικά, από τον κανόνα του γινομένου, η τοποθέτηση των βιβλίων στα ράφια της βιβλιοθήκης γίνεται με $\binom{21}{15} \binom{15}{9} = \frac{21!}{9!(6!)^2}$ τρόπους.

8. (10 μον.) Ένα μαγαζί πουλάει πορτοκάλια σε συσκευασίες του 1 kg, των 2 kg και των 7 kg. Να γράψετε γεννήτρια συνάρτηση και να υποδείξετε τον συντελεστή που ισούται με το πλήθος των τρόπων να αγοράσουμε 50 kg πορτοκάλια, αν θέλουμε να πάρουμε τουλάχιστον 10 συσκευασίες του 1 kg, και το πολύ 3 συσκευασίες των 7 kg.

Απάντηση

Λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς, οι απαριθμητές για κάθε συσκευασία φαίνονται παρακάτω:

$$\text{Συσκευασία 1 kg: } x^{10} + x^{11} + \dots + x^{50}$$

$$\text{Συσκευασία 2 kg: } 1 + x^2 + \dots + x^{50}$$

$$\text{Συσκευασία 7 kg: } 1 + x^7 + x^{14} + x^{21}$$

Η γεννήτρια συνάρτηση ισούται με το γινόμενο των απαριθμητών:

$$A(x) = (x^{10} + x^{11} + \dots + x^{50}) (1 + x^2 + \dots + x^{50}) (1 + x^7 + x^{14} + x^{21}).$$

Το πλήθος των τρόπων να αγοράσουμε 50 kg πορτοκάλια με τους δεδομένους περιορισμούς ισούται με τον συντελεστή του x^{50} στο ανάπτυγμα της $A(x)$.