ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Απαντήσεις Θεμάτων Προόδου Μαΐου 2024

Διδάσκοντες: Δ. Καββαδίας - Χ. Ραπτόπουλος

1. (μον. 15) Για κάθε έναν από τους παρακάτω προτασιακούς τύπους, να πείτε αν πρόκειται για ταυτολογία, αντίφαση ή τίποτα από τα δυο. Τα p και q είναι προτασιακές μεταβλητές.

   i. $(p \wedge q \to p) \to p$
   ii. $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
   iii. $(p \wedge q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

   Απάντηση

   Σημειώνουμε ότι τα ερωτήματα μπορούν να απαντηθούν με χρήση πινάκων αληθείας. Εδώ δίνουμε εναλλακτικές απαντήσεις.

   i. Τίποτα από τα δυο. Για παράδειγμα, αν p είναι ψευδής, τότε ο τύπος είναι ψευδής, ενώ αν p είναι αληθής, τότε ο τύπος είναι αληθής.
   ii. Ταυτολογία. Πράγματι, παρατηρήστε ότι ο τύπος δεξιά του $\leftrightarrow$ είναι το η αντιθετοαναστροφή του τύπου στα αριστερά.
   iii. Αντίφαση. Πράγματι, από τον νόμο De Morgan έχουμε $(\neg p \vee \neg q) \equiv \neg(p \wedge q)$, δηλαδή ο τύπος της εκφώνησης είναι της μορφής $\phi \wedge \neg\phi$.

2. (20 μον.) Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως αληθείς ή ψευδείς. Τα p και q είναι προτασιακές μεταβλητές. Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

   i. $\{p \to p, p \wedge q \to q\} \models p \vee \neg q$
   ii. Αν το T είναι αντιφατικό σύνολο τύπων, τότε $T \vdash p \wedge q$
   iii. Αν $T \vdash p \vee q$, τότε $T \cup \neg p \vdash \neg q$

   Απάντηση

   Σημειώνουμε ότι τα ερωτήματα μπορούν να απαντηθούν με χρήση πινάκων αληθείας. Εδώ δίνουμε εναλλακτικές απαντήσεις.

   i. Δεν ισχύει, επειδή το σύνολο των υποθέσεων ικανοποιείται αν η p είναι ψευδής και η q είναι αληθής, ενώ δεν ικανοποιείται ο τύπος $p \vee \neg q$.
   ii. Ισχύει επειδή, εφόσον το T είναι αντιφατικό σύνολο τύπων, μπορούμε να αποδείξουμε οποιονδήποτε τύπο.
   iii. Δεν ισχύει. Ως αντιπαράδειγμα, παρατηρούμε ότι, αν $T = \{q\}$, τότε $\{q\} \vdash p \vee q$, αλλά $\{q, \neg p\} \nvdash \neg q$

3. (20 μον.) Έστω δομή $\mathcal{R}$ με σύμπαν τους πραγματικούς αριθμούς, συναρτησιακό σύμβολο «$*$» που αντιστοιχεί στην πράξη του πολλαπλασιασμού, κατηγορηματικό σύμβολο «$<$» και το σύμβολο σταθεράς 0 (με τις συνήθεις ερμηνείες).

i. Να εκφράσετε σε φυσική γλώσσα τον παρακάτω τύπο (περιγράψτε την ιδιότητα που ο τύπος φ δηλώνει για τον x και αποφύγετε την ανάγνωση των συμβόλων του τύπου): $\varphi(x) = \exists y((x \approx y * y) \wedge \neg(y \approx 0))$

ii. Στην παραπάνω δομή, δώστε τύπο που να δηλώνει «μεταξύ οποιωνδήποτε δύο διαφορετικών πραγματικών αριθμών υπάρχει ένας τρίτος».

Απάντηση

i. Ο τύπος $\varphi(x)$ δηλώνει ότι «ο x είναι θετικός αριθμός».

ii. $\forall x \forall y \exists z(\neg(x \approx y) \rightarrow ((x < z) \wedge (z < y)) \vee ((y < z) \wedge (z < x)))$.

4. (15 μον.) Να βρείτε πόσοι 12-ψήφιοι αριθμοί υπάρχουν που περιέχουν 4 εξάρια, 3 εφτάρια και 5 εννιάρια, στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. Χωρίς περιορισμούς.

ii. Έτσι ώστε να είναι μεγαλύτεροι του $8 \cdot 10^{12}$.

Απάντηση

i. Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με μεταθέσεις τριών ομάδων όμοιων αντικειμένων, με πληθαρίθμους $4, 3$ και 5 αντίστοιχα. Άρα έχουμε $\frac{12!}{4!3!5!}$.

ii. Θα πρέπει αναγκαστικά το πρώτο ψηφίο να είναι 9. Συνεπώς έχουμε μεταθέσεις τριών ομάδων όμοιων αντικειμένων, με πληθάριμους $4, 3$ και 4 αντίστοιχα (δηλ. με ένα λιγότερο εννιάρι). Άρα έχουμε $\frac{11!}{4!3!4!}$.

5. (20 μον.) Να υπολογίσετε τον αριθμό των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $x + y + z + w = 12$ για τις εξής περιπτώσεις:

i. Αν $x \geq 3$.

ii. Αν ακριβώς δυο μεταβλητές είναι μη μηδενικές.

Απάντηση

i. Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με την τοποθέτηση 12 όμοιων μπαλών σε 4 διακεκριμένες υποδοχές, υπό την προϋπόθεση ότι η υποδοχή που αντιστοιχεί στην x έχει τουλάχιστον 3 μπάλες. Συνεπώς, δεσμεύουμε 3 από τις 12 μπάλες, τις τοποθετούμε στην υποδοχή για την x και στη συνέχεια διανέμουμε τις υπόλοιπες μπάλες με $\binom{9+4-1}{9}$ τρόπους. Ισοδύναμα, έχουμε συνδυασμούς 4 διακεκριμένων αντικειμένων ανά 12, υπό την προϋπόθεση ότι το πρώτο αντικείμενο επιλέγεται τουλάχιστον 3 φορές.

ii. Επιλέγουμε τις 2 από τις 4 μεταβλητές που θα είναι μη μηδενικές με $\binom{4}{2}$ τρόπους. Αν κ και λ είναι οι δυο μη μηδενικές μεταβλητές, αναζητούμε τον αριθμό των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $\kappa + \lambda = 12$, υπό την προϋπόθεση ότι $\kappa \geq 1$ και $\lambda \geq 1$. Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με την τοποθέτηση 12 όμοιων μπαλών σε 2 διακεκεριμένες υποδοχές, υπό την προϋπόθεση ότι κάθε υποδοχή έχει τουλάχιστον 1 μπάλα. Συνεπώς, δεσμεύουμε 2 μπάλες τις οποίες τοποθετούμε σε διαφορετικές υποδοχές και στη συνέχεια διανέμουμε τις υπόλοιπες 10 μπάλες με $\binom{2+10-1}{10}$ τρόπους. Συνολικά, από τον κανόνα του γινομένου παίρνουμε $\binom{4}{2}\binom{2+10-1}{10}$ διαφορετικές μη αρντητικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $x + y + z + w = 12$ αν ακριβώς δυο μεταβλητές είναι μη μηδενικές.

6. (20 μον.) Έστω $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ ένα σύνολο με 6 διαφορετικά μεταξύ τους στοιχεία και έστω $S = \{a_1, a_2, a_3\}$ ένα συγκεκριμένο υποσύνολο του με 3 στοιχεία.

   i. Πόσα είναι τα υποσύνολα του A; Πόσα από αυτά περιέχουν το S;

   ii. Πόσα υποσύνολα του A έχουν ακριβώς 3 στοιχεία;

   iii. Από όλα τα υποσύνολα του A που έχουν 3 στοιχεία, επιλέγουμε τυχαία και ισοπίθανα ένα από αυτά, έστω T. Να βρείτε την πιθανότητα το T που επιλέξαμε να περιλαμβάνει ακριβώς 2 στοιχεία του S.

Απάντηση

i. Τα υποσύνολα του A είναι 2^6. Τα υποσύνολα του A που περιέχουν το S είναι 2^3.

ii. Τα υποσύνολα του A με ακριβώς 3 στοιχεία είναι όσοι οι συνδυασμοί 3 αντικειμένων από 6 διακεκριμένα αντικείμενα χωρίς επανάληψη, δηλ. $\binom{6}{3}$.

iii. Όλα τα στοιχεία του δειγματοχώρου του πειράματος είναι $\binom{6}{3} = 20$. Ο αριθμός των υποσυνόλων του A με 3 στοιχεία, που περιλαμβάνουν ακριβώς 2 στοιχεία του S είναι $\binom{3}{2} \cdot \binom{3}{1} = 9$. Συνεπώς η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{9}{20}$.