Ονοματεπώνυμο:... ....
Τμήμα:.....................Διδάσκων:.. ....

(Οι εκφωνήσεις επιστρέφονται μαζί με το γραπτό)

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εξετάσεις Ιουνίου 2024

Διδάσκων: Δ. Καββαδίας - Χ. Ραπτόπουλος

1. (15 μον.) Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας. Καμία απάντηση δεν θα ληφθεί υπόψη χωρίς δικαιολόγηση.

   i. Το γράφημα $K_{3,6}$ έχει κύκλο Euler.

   ii. Αν συμπιέσουμε οποιαδήποτε ακμή ενός δέντρου, το γράφημα που προκύπτει είναι δέντρο.

   iii. Ο συνολικός αριθμός των μονοπατιών, μήκους τουλάχιστον 1, σε ένα δέντρο n κορυφών ισούται με $n(n-1)$.

   iv. Αν για κάποιο γράφημα G, τόσο το G όσο και το συμπληρωματικό του έχουν κύκλο Euler, τότε το G πρέπει να έχει περιττό πλήθος κορυφών.

   v. Σε ένα απλό γράφημα αν αφαιρεθεί μία ακμή ενός κύκλου Hamilton το γράφημα που προκύπτει δεν έχει κύκλο Hamilton

   Απάντηση.

   i. Ψευδής. Οι 6 κορυφές στο ένα τμήμα του διμερούς γραφήματος θα πρέπει να ενώνονται με τις 3 κορυφές του άλλου τμήματος, άρα έχουν βαθμό 3, δηλαδή περιττό. Συνεπώς το γράφημα δεν έχει κύκλο Euler.

   ii. Αληθής. Η πράξη της συμπίεσης διατηρεί την συνεκτικότητα, και δεν δημιουργεί επιπλέον κύκλους.

   iii. Αληθής. Για κάθε ζεύγος διαφορετικών κορυφών υπάρχει μοναδικό μονοπάτι. Άρα ο συνολικός αριθμός τους ισούται με τον αριθμό των τρόπων να επιλέξουμε την αρχή και το (διαφορετικό) τέλος του μονοπατιού.

   iv. Αληθής. Έστω d ο βαθμός μίας κορυφής στο G και d' στο συμπληρωματικό του $\overline{G}$. Τότε θα ισχύει $d + d' = n - 1$ και επειδή τόσο το d όσο και το d' είναι άρτιοι, το n θα πρέπει να είναι περιττός αριθμός.

   v. Ψευδής. Το γράφημα είναι δυνατό να είχε και άλλο κύκλο Hamilton που δεν χρησιμοποιούσε την συγκεκριμένη ακμή.

2. (10 μον.) Να δείξετε ότι δεν υπάρχει απλό γράφημα με 12 κορυφές και 28 ακμές του οποίου κάθε κορυφή έχει βαθμό είτε 3 είτε 6.

   Απάντηση

Έστω k το πλήθος των κορυφών βαθμού 6 και άρα $12-k$ κορυφές έχουν βαθμό 3. Εφαρμόζοντας το Λήμμα της Χειραψίας παίρνουμε $3(12-k)+6k = 2 \cdot 28$, που είναι άτοπο μια και το αριστερό μέλος διαιρείται με το 3 ενώ το δεξί, όχι.

3. (15 μον.)

   i. Βρείτε ποια από τα παρακάτω σύνολα τύπων είναι συνεπή. Τα p, q, r είναι προτασιακές μεταβλητές.
      1. $\{(p \to q), (q \to r), (r \to \neg p)\}$
      2. $\{\neg(p \to q), q\}$

   ii. Έστω φ, χ, ψ προτασιακοί τύπο. Δείξτε ότι δεν είναι δυνατή η παρακάτω τυπική απόδειξη. Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Πληρότητας.
   $\vdash ((\varphi \to (\varphi \to \neg\psi)) \to (\chi \to \psi)$

   iii. Είναι οι πρωτοβάθμιοι τύποι $\exists x \exists y (Q(x) \vee R(y))$ και $\exists x Q(x) \vee \exists y R(y)$ ισοδύναμοι; Τα Q και R είναι μονομελή κατηγορήματα.

Απάντηση.

   i. Το Θεώρημα Πληρότητας μας λέει ότι αν ένα σύνολο είναι συνεπές τότε είναι και ικανοποιήσιμο. Τα δύο θεωρήματα Πληρότητας και Εγκυρότητας μαζί μάλιστα, μας λένε ότι ένα σύνολο είναι συνεπές αν και μόνο αν είναι ικανοποιήσιμο. Άρα, αντί να ελέγξουμε την συνέπεια των συνόλων με συντακτικό τρόπο, μπορούμε να το κάνουμε ευκολότερα με σημασιολογικό. Μπορούμε δηλαδή γενικά να κάνουμε τον πίνακα αληθείας των τύπων του συνόλου και να ελέγξουμε αν είναι ικανοποιήσιμο. Εδώ όμως τα πράγματα είναι πολύ απλά. Για το (1) παρατηρούμε ότι αν $p = q = r = \Psi$, τότε και οι 3 τύποι του συνόλου ικανοποιούνται, άρα είναι συνεπές. Για το (2) θα πρέπει $q = A$ αλλά τότε ο $\neg(p \to q)$ δεν ικανοποιείται. Άρα το σύνολο δεν είναι συνεπές.

   ii. Παρατηρούμε ότι ο δοθείς τύπος δεν είναι ταυτολογία διότι αν ψ ψευδής η υπόθεση της συνεπαγωγής είναι αληθής, ενώ το συμπέρασμα γίνεται ψευδές όταν χ αληθής. Όμως τότε από το Θεώρημα Πληρότητας δεν ισχύει και ότι $\vdash ((\varphi \to (\varphi \to \neg\psi)) \to (\chi \to \psi)$.

   iii. Το αριστερό μέλος λέει ότι στο σύμπαν της δομής υπάρχουν δύο στοιχεία (μπορεί και να ταυτίζονται) που είτε το ένα επαληθεύει το κατηγόρημα Q είτε το άλλο το R (ή επαληθεύουν και τα δύο κατηγορήματα). Όμως ακριβώς το ίδιο λέει και το δεξί μέλος. Μπορούμε να το δείξουμε και πιο τυπικά χρησιμοποιώντας (δύο φορές) το γεγονός ότι το $\exists$ «επιμερίζει» την διάζευξη. Έχουμε λοιπόν ότι

   $$\exists x \exists y (Q(x) \vee R(y)) \equiv \exists x \exists y Q(x) \vee \exists x \exists y R(y) \equiv \exists x \exists y Q(x) \vee \exists y \exists x R(y).$$

   Όμως επειδή η y δεν είναι ελεύθερη στον $Q(x)$ και η x στον $R(y)$, έχουμε ότι $\exists y Q(x) \equiv Q(x)$ και $\exists x R(y) \equiv R(y)$, οπότε ο τύπος είναι ισοδύναμος με τον $\exists x Q(x) \vee \exists y R(y)$.

4. (15 μον.) Έστω $P(A)$ το δυναμοσύνολο (δηλαδή το σύνολο των υποσυνόλων) του πεπερασμένου συνόλου A. Θεωρούμε μια δομή όπου σύμπαν είναι το $P(A)$ και η οποία είναι εφοδιασμένη με το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο Q όπου $Q(x, y)$ ερμηνεύεται σαν «το σύνολο x είναι υποσύνολο του συνόλου y».

i. Δώστε τύπο φ με ερμηνεία «για οποιαδήποτε δύο σύνολα υπάρχει μοναδικό ελάχιστο (ως προς τον εγκλεισμό) σύνολο που είναι υπερσύνολο και των δύο» (ή αλλιώς, η ένωση δύο συνόλων είναι μοναδική).

ii. Να εκφράσετε σε φυσική γλώσσα την ιδιότητα που αποδίδει στο x ο τύπος $\psi(x) = \forall y(\neg(x \approx y) \to Q(x,y))$.

Απάντηση

i. $\varphi = \forall x \forall y \exists z (Q(x,z) \wedge Q(y,z) \wedge \forall u (Q(x,u) \wedge Q(y,u) \to Q(z,u)))$

ii. Το x δεν έχει κανένα γνήσιο υπερσύνολο ή αλλιώς, το x είναι το κενό σύνολο.

5. (15 μον.) 50 τουρίστες που θεωρούνται διακεκριμένοι ταξιδεύουν με ένα πλοίο σε 10 καμπίνες των 5 θέσεων η κάθε μία. Με πόσους τρόπους μπορούν να τακτοποιηθούν στις καμπίνες αν:

   i. Κάθε καμπίνα είναι αριθμημένη (διακεκριμένη) και οι 5 κουκέτες της κάθε καμπίνας θεωρούνται διακεκριμένες επίσης.

   ii. Οι καμπίνες είναι αριθμημένες αλλά οι κουκέτες δεν είναι. Στην περίπτωση αυτή έχει σημασία μόνο ποιοι τουρίστες έχουν μπει σε μία συγκεκριμένη καμπίνα και όχι ποια κουκέτα έχει ο καθένας από τους 5.

   iii. Ούτε οι καμπίνες ούτε οι κουκέτες είναι αριθμημένες.

   Απάντηση.

   i. Εφόσον κάθε κουκέτα προσδιορίζεται με μοναδικό τρόπο από τον αριθμό της και τον αριθμό της καμπίνας της, το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με την μετάθεση 50 αντικειμένων. Δηλαδή οι τρόποι είναι 50!

   ii. Στην περίπτωση αυτή οι 5 κουκέτες μιας καμπίνας είναι τα μη διακεκριμένα αντικείμενα μιας ομάδας αντικειμένων. Υπάρχουν 10 τέτοιες διαφορετικές ομάδες (οι 10 καμπίνες) και ζητάμε τις μεταθέσεις 50 αντικειμένων που χωρίζονται σε 10 ομάδες των 5 αντικειμένων. Οι τρόποι είναι $\frac{50!}{(5!)^{10}}$.

   iii. Εδώ οι ομάδες διακρίνονται μεταξύ τους μόνο από τα μέλη τους (δηλ. ποιοι τουρίστες βρίσκονται σε κάθε καμπίνα). Άρα πρέπει να αφαιρέσουμε την αρίθμηση στις καμπίνες που υποθέτει το αποτέλεσμα του (ii). Οι τρόποι τώρα είναι $\frac{50!}{(5!)^{10} \cdot 10!}$.

6. (10 μον.) Από τους 200 πρωτοετείς Μαθηματικούς, 100 έδωσαν «Διακριτά Μαθηματικά» (=Δ), 110 «Απειροστικό ΙΙ» (=Α) και 120 «Γραμμική Άλγεβρα» (=Γ). Δ και Α έδωσαν 60, Δ και Γ έδωσαν 40, Α και Γ έδωσαν 50, ενώ κανένα από τα τρία μαθήματα έδωσαν 10 φοιτητές. Πόσοι έδωσαν και τα τρία μαθήματα;

   Απάντηση.

   Αν συμβολίσουμε με M το σύνολο όλων των πρωτοετών μαθηματικών, η αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού δίνει:

$$|\overline{\Delta}\,\overline{\mathrm{A}}\,\overline{\Gamma}| = |M| - |\Delta| - |\mathrm{A}| - |\Gamma| + |\Delta\,\mathrm{A}| + |\Delta\,\Gamma| + |\mathrm{A}\,\Gamma| - |\Delta\,\mathrm{A}\,\Gamma|$$

   Αντικαθιστώντας τις δοθείσες τιμές έχουμε μια εξίσωση για το $|\Delta\,\mathrm{A}\,\Gamma|$ η οποία δίνει ότι και τα τρία μαθήματα έδωσαν 10 φοιτητές.

7. (10 μον.) Θέλουμε να στελεχώσουμε 3 διαφορετικές επιτροπές από ένα σύνολο 40 υποψηφίων. Οι επιτροπές έχουν 10, 7 και 5 μέλη αντίστοιχα. Τα μέλη των δύο πρώτων επιτροπών είναι *ισότιμα* ενώ της τρίτης έχουν όλα *διαφορετικούς ρόλους* μέσα στην επιτροπή (π.χ. πρόεδρος, αντιπρόεδρος, γραμματέας κλπ.). Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

   Απάντηση

   Επιλέγουμε τα μέλη της πρώτης επιτροπής με $\binom{40}{10}$ τρόπους. Στην συνέχεια της δεύτερης από τους εναπομείναντες 30 υποψήφιους με $\binom{30}{7}$ τρόπους. Για την τρίτη επιτροπή όμως οι τρόποι είναι $(23)_5$ μια και τώρα τα 5 μέλη της πρέπει και να διαταχθούν εφόσον οι 5 θέσεις της επιτροπής είναι διακεκριμένες. Από τον κανόνα του γινομένου έχουμε ότι οι τρόποι στελέχωσης της επιτροπής είναι $\binom{40}{10}\binom{30}{7}(23)_5$.

8. (10 μον.) Γράψτε γεννήτρια συνάρτηση και υποδείξτε τον συντελεστή που δίνει το πλήθος των ακεραίων λύσεων της εξίσωσης

$$x + y + z + w = 18$$

   με τους περιορισμούς: $0 \leq x, y, z, w \leq 7$.

   Απάντηση

   Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με την τοποθέτηση 18 όμοιων σφαιρών σε 4 διακεκριμένες υποδοχές κάθε μία από τις οποίες χωρά μέχρι 7 σφαίρες. Η γεννήτρια είναι λοιπόν η

$$(1 + u + u^2 + \cdots + u^7)^4$$

   και ο συντελεστής που ζητάμε είναι του u^{18}.