Ονοματεπώνυμο:... ....
Τμήμα:....................Διδάσκων:... ....
(Συνολική βαθμολογία 120 μον. Οι εκφωνήσεις επιστρέφονται μαζί με το γραπτό)

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Πρόοδος Μαΐου 2022

Διδάσκοντες: Δ. Καββαδίας - Ν. Ρεκατσίνας

1. (μον. 15) Ποιοι από τους παρακάτω τύπους είναι ταυτολογίες, αντιφάσεις ή τίποτα από τα δύο:

   i. $(p_1 \to (p_2 \to p_1)) \to p_3$
   ii. $(p_1 \wedge \neg p_1) \to p_2$
   iii. $(p_1 \wedge p_2) \leftrightarrow (\neg p_1 \vee \neg p_2)$
   iv. $p_1 \wedge \neg(p_2 \to p_1)$

   Απάντηση

   i. Τίποτε από τα δύο. Η υπόθεση της συνεπαγωγής είναι ταυτολογία (προέρχεται από το ΑΣ1), ενώ το συμπέρασμα δηλ. η μεταβλητή p_3 μπορεί να γίνει είτε αληθής είτε ψευδής και αντίστοιχα όλος ο τύπος.
   ii. Ταυτολογία. Η υπόθεση της συνεπαγωγής είναι αντίφαση, άρα η συνεπαγωγή είναι πάντα αληθής.
   iii. Αντίφαση. Εφαρμόζοντας τον κανόνα De Morgan στο δεύτερο μέλος έχουμε $(p_1 \wedge p_2) \leftrightarrow \neg(p_1 \wedge p_2)$. Συνεπώς τα δύο μέλη της ισοδυναμίας είναι αντίθετα, άρα ο τύπος είναι αντίφαση.
   iv. Αντίφαση. Έχουμε διαδοχικά: $p_1 \wedge \neg(p_2 \to p_1) \equiv p_1 \wedge \neg(\neg p_2 \vee p_1) \equiv p_1 \wedge (p_2 \wedge \neg p_1)$.

2. (15 μον) Έστω T σύνολο προτασιακών τύπων και φ, ψ προτασιακοί τύποι. Να δείξετε ότι $T \models \neg\varphi \to \psi$ αν και μόνο αν το σύνολο $T \cup \{\neg\varphi, \neg\psi\}$ είναι μη ικανοποιήσιμο.

   Απάντηση

   Αν το T δεν είναι ικανοποιήσιμο, η ισοδυναμία είναι προφανής. Αν είναι, έστω $T \models \neg\varphi \to \psi$. Τότε μία αποτίμηση που ικανοποιεί το T πρέπει να ικανοποιεί τον $\neg\varphi \to \psi$. Αν δεν ικανοποιεί τον $\neg\varphi$, έχουμε το ζητούμενο. Αν ικανοποιεί τον $\neg\varphi$, τότε πρέπει να ικανοποιεί και τον ψ, οπότε δεν ικανοποιεί τον $\neg\psi$. Αντίστροφα, αν το $T \cup \{\neg\varphi, \neg\psi\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο, τότε μία αποτίμηση που ικανοποιεί το T δεν ικανοποιεί είτε τον $\neg\varphi$, είτε τον $\neg\psi$ (ή και τους δύο). Σε κάθε περίπτωση ικανοποιεί τον $\neg\varphi \to \psi$.

3. (μον. 5+10=15)

   i. Έστω φ_1 και φ_2 προτασιακοί τύποι για τους οποίους ισχύει ότι $\varphi_1 \models \varphi_2$ και $\varphi_1 \not\equiv \varphi_2$. Δείξτε ότι υπάρχει αποτίμηση που ικανοποιεί τον φ_2 αλλά δεν ικανοποιεί τον φ_1.

ii. Δίδονται οι προτασιακοί τύποι $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_8$, όλοι ορισμένοι στις ίδιες τρεις (3) προτασιακές μεταβλητές, για τους οποίους ισχύει ότι $\varphi_1 \models \varphi_2$, $\varphi_2 \models \varphi_3$,…, $\varphi_7 \models \varphi_8$ και επιπλέον για όλα τα i, j με $i \neq j$ ισχύει $\varphi_i \not\equiv \varphi_j$. Δείξτε ότι αν ο φ_1 δεν είναι αντίφαση, τότε ο φ_8 είναι ταυτολογία.

   Υπόδειξη: Σκεφτείτε ότι υπάρχουν 8 δυνατές αποτιμήσεις που αφορούν τους τύπους και στην συνέχεια χρησιμοποιήστε το (i).

Απάντηση

i. Επειδή $\varphi_1 \models \varphi_2$, κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί τον φ_1 πρέπει να ικανοποιεί και τον φ_2. Επειδή όμως και $\varphi_1 \not\equiv \varphi_2$, ο φ_2 πρέπει να ικανοποιείται και από μία τουλάχιστον ακόμη αποτίμηση αλλιώς οι δύο τύποι θα ήταν ισοδύναμοι.

ii. Εφόσον κάθε τύπος συνεπάγεται ταυτολογικά τον επόμενο του, σύμφωνα με το (i) κάθε τύπος έχει τουλάχιστον μία επιπλέον αποτίμηση από τον προηγούμενο του που τον ικανοποιεί. Επειδή ο φ_1 δεν είναι αντίφαση ικανοποιείται από μία τουλάχιστον αποτίμηση. Σύμφωνα με τα παραπάνω, ο φ_2 ικανοποιείται από 2 τουλάχιστον αποτιμήσεις, ο φ_3 από 3 τουλάχιστον κοκ, και τελικά ο φ_8 από 8 τουλάχιστον αποτιμήσεις. Όμως υπάρχουν 8 δυνατές αποτιμήσεις που αφορούν τους 8 τύπους και άρα ο φ_8 πρέπει να ικανοποιείται από όλες, δηλαδή είναι ταυτολογία.

4. (15 μον.)) Έστω S ένα πεπερασμένο σύνολο και $P(S)$ το σύνολο των υποσυνόλων του S. Έστω Q διμελές κατηγορηματικό σύμβολο που ερμηνεύουμε στο $P(S)$ ως εξής: $Q(x, y)$ αν και μόνο αν το σύνολο x είναι υποσύνολο του y, δηλαδή $x \subseteq y$.

   Στην δομή αυτή: (α) εξηγήστε στην φυσική γλώσσα τι δηλώνουν οι παρακάτω τύποι (δώστε μία κατά το δυνατό φυσική πρόταση, δηλαδή μην «απαγγείλετε» τους τύπους λέγοντας κάτι σαν «υπάρχει x ....» κλπ.) (β) στην συνέχεια ελέγξτε αν αληθεύουν στην δομή.

   i. $\exists x \forall y Q(y, x)$
   ii. $\forall x \exists y (x \neq y \wedge Q(y, x))$

Απάντηση.

i. «Υπάρχει υποσύνολο του S που είναι υπερσύνολο κάθε υποσυνόλου του S». Προφανώς αληθεύει διότι το υποσύνολο αυτό είναι το ίδιο το S.

ii. «Κάθε υποσύνολο του S είναι γνήσιο υπερσύνολο κάποιου άλλου υποσυνόλου του S». Δεν αληθεύει γιατί το κενό σύνολο δεν είναι γνήσιο υπερσύνολο κανενός άλλου υποσυνόλου.

5. (10 μον.) Θέλουμε να στελεχώσουμε μία 10-μελή κοινοβουλευτική επιτροπή επιλέγοντας από τους 300 βουλευτές του κοινοβουλίου. Η επιτροπή θα έχει πρόεδρο, αντιπρόεδρο και γραμματέα και επτά ισότιμα μέλη. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η στελέχωση;

Απάντηση

Η επιλογή των 3 διακεκριμένων μελών γίνεται με $(300)_3$ τρόπους και στην συνέχεια η επιλογή των απλών μελών με $\binom{297}{7}$ τρόπους. Συνολικά λοιπόν η επιτροπή στελεχώνεται με $(300)_3 \cdot \binom{297}{7}$ τρόπους.

6. (15 μον.) Πόσοι είναι οι τρόποι τοποθέτησης $n \geq 2$ διακεκριμένων ατόμων σε μία σειρά έτσι ώστε δύο συγκεκριμένα από αυτά να μην κάθονται σε διπλανές θέσεις;

   Απάντηση

   Έστω A και B τα δύο συγκεκριμένα άτομα του περιορισμού. Αν εξαιρέσουμε προς στιγμή τον B, οι τρόποι τοποθέτησης των υπολοίπων είναι $(n-1)!$. Στην συνέχεια ο B μπορεί να τοποθετηθεί ανάμεσα από οποιαδήποτε 2 άτομα αλλά όχι αμέσως πριν και αμέσως μετά τον A. Υπάρχουν συνεπώς $n-1+1-2=n-2$ θέσεις τοποθέτησης του B. Από τον κανόνα του γινομένου οι τρόποι είναι $(n-2)(n-1)!$.

7. (10+10=20 μον.) Σε ένα καλάθι υπάρχουν 30 κόκκινες καραμέλες, 30 πράσινες και 30 μπλε. Οι καραμέλες ίδιου χρώματος είναι όλες ίδιες μεταξύ τους.

   i. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 10 καραμέλες;
   ii. Επαναλάβατε το παραπάνω ερώτημα αν έχουμε 30 κόκκινες και 30 πράσινες μπάλες αλλά 5 μπλε.

   Απάντηση

   i. Οι 10 επιλογές είναι ισοδύναμες με τους συνδυασμούς με επανάληψη των 3 ανά 10, ή ισοδύναμα επίσης με την τοποθέτηση 10 όμοιων μπαλών σε 3 διακεκριμένες υποδοχές κάθε μία από τις οποίες μπορεί να χωρέσει και τις 10 μπάλες. Οι τρόποι είναι $\binom{10+3-1}{10} = \binom{12}{10}$.
   ii. Στην περίπτωση αυτή η μία υποδοχή έχει μέγιστη χωρητικότητα 5 μπαλών, οπότε κάποιες από τις διανομές του (i) παραβιάζουν την χωρητικότητα. Για να τις υπολογίσουμε θεωρούμε ότι δίνουμε 6 μπάλες στην τρίτη υποδοχή και διανέμουμε χωρίς περιορισμούς τις υπόλοιπες 4 μπάλες. Οι τρόποι τώρα είναι $\binom{4+3-1}{4} = \binom{6}{4}$. Αυτούς πρέπει να τους αφαιρέσουμε από τους τρόπους του (i). Συνολικά λοιπόν οι τρόποι είναι $\binom{12}{10} - \binom{6}{4}$.

8. (μον. 15) Ένας πρωτοετής έχει στην βιβλιοθήκη του 10 διαφορετικά βιβλία.

   i. Πόσες επιλογές βιβλίων από τα 10 έχει αν πρέπει οπωσδήποτε να πάρει ένα τουλάχιστον βιβλίο;
   ii. Πόσες επιλογές βιβλίων από τα 10 έχει αν πρέπει οπωσδήποτε να πάρει τα βιβλία της Άλγεβρας Ι και της Διαφορικής Γεωμετρίας;
   iii. Πόσες επιλογές βιβλίων από τα 10 έχει αν πρέπει οπωσδήποτε να πάρει είτε το βιβλίο της Άλγεβρας Ι είτε (διαζευκτικά, δηλαδή μία από τις δύο επιλογές) το βιβλίο της Διαφορικής Γεωμετρίας;

   Απάντηση

   i. Ο φοιτητής πρέπει να επιλέξει ένα υποσύνολο των βιβλίων του αλλά όχι το κενό. Οι επιλογές του λοιπόν είναι $2^{10}-1$.
   ii. Ο φοιτητής πρέπει να πάρει τα δύο υποχρεωτικά βιβλία και από τα υπόλοιπα 8 οποιοδήποτε υποσύνολο τους. Τα υποσύνολα αυτά είναι 2^8.
   iii. Αν επιλέξει το βιβλίο της Άλγεβρας Ι, τότε δεν μπορεί να πάρει το βιβλίο της Διαφορικής Γεωμετρίας οπότε, όπως παραπάνω, έχει 2^8 επιλογές. Αν επιλέξει το βιβλίο της Διαφορικής Γεωμετρίας, τότε αποκλείεται το βιβλίο της Άλγεβρας Ι δηλαδή και πάλι 2^8 επιλογές. Συνολικά λοιπόν οι επιλογές είναι $2^8+2^8=2^9$.