Ονοματεπώνυμο:.. ....
Τμήμα:....................Διδάσκων:... ....
(Οι εκφωνήσεις επιστρέφονται μαζί με το γραπτό)

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Εξετάσεις Φεβρουαρίου 2022
Διδάσκων: Δ. Καββαδίας

1. (15 μον.) Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

   i. Το συμπληρωματικό κάθε διμερούς γραφήματος με $n \geq 10$ κορυφές δεν είναι επίπεδο.

   ii. Το K_5 είναι υπογράφημα του $K_{5,5}$.

   iii. Κάθε πλήρες διμερές γράφημα με άρτιο πλήθος κορυφών έχει κύκλο Euler.

   iv. Αν κάποιο γράφημα με $n \geq 3$ κορυφές έχει χρωματικό αριθμό ίσο με n, τότε αυτό έχει κύκλο Hamilton.

   v. Αν το G είναι πλήρες γράφημα, τότε κάθε επαγόμενο υπογράφημα του είναι επίσης πλήρες γράφημα.

   Απάντηση

   i. Αληθής. Εφόσον το διμερές γράφημα έχει τουλάχιστον 10 κορυφές, ένα τουλάχιστον τμήμα του έχει τουλάχιστον 5 κορυφές. Το τμήμα αυτό είναι σύνολο ανεξαρτησίας στο γράφημα και συνεπώς είναι πλήρες γράφημα στο συμπληρωματικό του. Όμως ένα πλήρες γράφημα με τουλάχιστον 5 κορυφές, περιλαμβάνει το K_5 και άρα δεν είναι επίπεδο γράφημα.

   ii. Ψευδής. Το K_5 έχει τουλάχιστον ένα τρίγωνο, ενώ το $K_{5,5}$ όχι επειδή είναι διμερές γράφημα και συνεπώς δεν περιλαμβάνει περιττούς κύκλους.

   iii. Ψευδής. Π.χ. το $K_{3,3}$ έχει 6 κορυφές αλλά όλες έχουν βαθμό 3, δηλαδή περιττό. Συνεπώς δεν έχει κύκλο Euler.

   iv. Αληθής. Αν ένα γράφημα με n κορυφές έχει χρωματικό αριθμό n, τότε πρόκειται για το K_n. Συνεπώς έχει κύκλο Hamilton.

   v. Αληθής. Οποιαδήποτε επιλογή ενός υποσυνόλου των κορυφών του πλήρους γραφήματος, περιλαμβάνει κορυφές που συνδέονται όλες ανά δύο μεταξύ τους. Συνεπώς πρόκειται για πλήρες γράφημα.

2. (10 μον.) Δίδεται ένα επίπεδο συνεκτικό γράφημα G με 16 κορυφές που όλες έχουν βαθμό 4. Το G έχει επίπεδη αποτύπωση όπου κάθε όψη είναι ή τρίγωνο ή τετράπλευρο. Πόσες όψεις του είναι τρίγωνα και πόσες τετράπλευρα;

   Απάντηση

Έστω x τα τρίγωνα και y τα τετράπλευρα. Το γράφημα έχει άθροισμα βαθμών $16 \times 4 = 64$. Συνεπώς οι ακμές του είναι 32. Από τον τύπο του Euler $n + f = m + 2$ παίρνουμε ότι $f = 18$. Έχουμε λοιπόν την σχέση $x + y = 18$. Εφαρμόζοντας τώρα το Λήμμα της Χειραψίας στις όψεις του γραφήματος παίρνουμε την σχέση $3x + 4y = 64$. Λύνοντας το σύστημα των δύο αυτών εξισώσεων παίρνουμε $y = 10$ και $x = 8$.

3. (10 μον) Έστω γράφημα G με τον παρακάτω πίνακα γειτνίασης. Σχεδιάστε το G. Ποιός ο χρωματικός αριθμός του;

$$A_G = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Απάντηση. Πρόκειται για διμερές γράφημα. Το πάνω δεξιά τμήμα του πίνακα διάστασης 4×3 (και το ανάστροφο κάτω αριστερά) προσδιορίζει τα δύο μέρη. Στο πρώτο μετέχουν οι κορυφές v_1, v_2, v_3, v_4 και στο δεύτερο οι κορυφές v_5, v_6, v_7. Άρα ο χρωματικός του αριθμός είναι 2.

4. (15 μον.) Έστω φ, χ και ψ προτασιακοί τύποι. Ποιές από τις παρακάτω δηλώσεις είναι αληθείς; Αιτιολογήστε.

   i. Αν $\chi \models \neg(\varphi \wedge \psi)$, τότε $\chi \wedge \neg\varphi \models \neg\psi$
   ii. Αν $\varphi \vdash \chi \vee \psi$, τότε $\{\varphi, \neg\chi\} \vdash \psi$
   iii. Αν $\varphi \vdash \psi$ και $\varphi \vdash \neg\psi$, τότε $\varphi \models \chi$
   iv. Ο τύπος $((\varphi \to \chi) \wedge (\chi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \leftrightarrow (\varphi \leftrightarrow \psi))$ είναι ταυτολογία.
   v. Δείξτε ότι δεν είναι δυνατή η παρακάτω τυπική απόδειξη. Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Πληρότητας.
   $\vdash ((\varphi \to (\varphi \to \neg\psi)) \to (\chi \to \psi)$

Απάντηση.

   i. Ψευδής. Αν χ είναι αληθής τότε τουλάχιστον ένας από τους φ, ψ, αλλά όχι αναγκαστικά και οι δύο, είναι ψευδής. Άρα αν ο χ είναι αληθής και ο φ ψευδής, τότε θα πρέπει και ο ψ να είναι ψευδής, που δεν συμβαίνει πάντα.
   ii. Αληθής. Αν $\varphi \vdash \chi \vee \psi$, τότε ισοδύναμα $\varphi \vdash \neg\chi \to \psi$. Το Θεώρημα Απαγωγής δίνει $\{\varphi, \neg\chi\} \vdash \psi$.
   iii. Αληθής. Η υπόθεση $\varphi \vdash \psi$ και $\varphi \vdash \neg\psi$ σημαίνει ότι ο φ είναι αντίφαση και συνεπώς ο φ συνεπάγεται ταυτολογικά κάθε τύπο.
   iv. Ψευδής. Το αριστερό μέρος της ισοδυναμίας σημαίνει ότι και οι τρεις τύποι είναι ισοδύναμοι μεταξύ τους και άρα συνεπάγεται το δεξί μέρος, αλλά όχι και το αντίστροφο.

v. Από το Θεώρημα Πληρότητας πρέπει να δειχθεί ότι ο τύπος είναι ταυτολογία. Αυτό όμως δεν ισχύει διότι για φ και ψ ψευδείς και χ αληθή, ο τύπος διαψεύδεται.

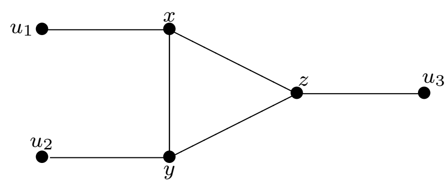
5. (15 μον.) Θεωρούμε τη γλώσσα της κατηγορηματικής λογικής που ορίζεται σε απλά μη κατευθυντικά γραφήματα, όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $P(x, y)$ δηλώνει ότι «οι κορυφές x και y συνδέονται με ακμή». Σε αυτή την ερμηνεία: (i) Εξηγήστε στη φυσική γλώσσα (στα Ελληνικά) τι δηλώνει ο παρακάτω τύπος. Μην χρησιμοποιήσετε ονόματα μεταβλητών στην δήλωση σας (δηλ. μην πείτε κάτι σαν «υπάρχει κορυφή x κλπ...») (ii) Δώστε ένα γράφημα με τουλάχιστον 6 κορυφές και μέγιστο βαθμό κορυφής 3 στο οποίο ο τύπος να επαληθεύεται.

$$\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(y, z) \wedge P(z, x) \wedge \forall w (\neg P(w, x) \wedge \neg P(w, y) \rightarrow P(w, z)))$$

Απάντηση.

(i) «Στο γράφημα υπάρχει ένα τρίγωνο και οποιαδήποτε κορυφή δεν συνδέεται με δύο από τις κορυφές του τριγώνου, συνδέεται υποχρεωτικά με την τρίτη.»

(ii) Ένα γράφημα με 6 κορυφές είναι το παρακάτω. Η κορυφή u_3 δεν συνδέεται με τις x και y και άρα πρέπει να συνδέεται με την z όπως επιβάλλει η συνεπαγωγή. Οι κορυφές u_1 και u_2 συνδέονται με την x και με την y αντίστοιχα και άρα δεν απαιτείται να συνδέονται με την z.



6. (10 μον.) Πόσα μη κατευθυντικά γραφήματα με 5 αριθμημένες (δηλαδή διακεκριμένες μεταξύ τους) κορυφές και τουλάχιστον 2 ακμές υπάρχουν;

Απάντηση

Σε 5 αριθμημένες κορυφές ορίζονται $N = \binom{5}{2}$ ακμές. Ένα γράφημα με 5 κορυφές μπορεί να σχηματιστεί με οποιοδήποτε υποσύνολο από αυτές που έχει 2 στοιχεία και πάνω. Υπάρχουν όμως $2^N - 1 - N$ υποσύνολα αυτού του συνόλου ακμών. (Εξαιρούμε από το 2^N το κενό και τα μονοσύνολα.)

7. (10 μον.) Πόσα είναι τα passwords μήκους 15 που μπορούν να σχηματιστούν από τα 26 μικρά γράμματα του λατινικού αλφαβήτου και τα 10 αριθμητικά ψηφία αν ο μόνος περιορισμός είναι ότι πρέπει να υπάρχουν 10 γράμματα και 5 ψηφία;

Απάντηση. Αρχικά επιλέγουμε τις 5 θέσεις των αριθμητικών ψηφίων. Αυτό γίνεται με $\binom{15}{5}$ τρόπους. Οι 10 θέσεις των γραμμάτων συμπληρώνονται με 26^{10} τρόπους ενώ οι 5 των ψηφίων με 10^5 τρόπους. Από τον κανόνα του γινομένου τα passwords είναι $26^{10} 10^5 \binom{15}{5}$.

8. (20 μον.) Θέλουμε να μοιράσουμε 20 όμοιες σοκολάτες σε 5 παιδιά με τους περιορισμό ότι το πρώτο παιδί δεν μπορεί να πάρει πάνω από 8 σοκολάτες και το δεύτερο πρέπει να πάρει τουλάχιστον 2 σοκολάτες.

i. Δώστε γεννήτρια συνάρτηση και *υπολογίστε* τον συντελεστή που δίνει απάντηση στο ερώτημα αυτό.

ii. Απαντήστε το ίδιο ερώτημα χωρίς την χρήση γεννήτριας συνάρτησης.

Απάντηση

i. Ο απαριθμητής για το πρώτο παιδί είναι $(1+x+x^2+\cdots+x^8)$, για το δεύτερο παιδί $(x^2+x^3+\cdots+x^{20})$ και για κάθε ένα από τα υπόλοιπα παιδιά είναι $(1+x+x^2+\cdots+x^{20})$. Η γεννήτρια είναι συνεπώς η

$$(1+x+x^2+\cdots+x^8)(x^2+\cdots+x^{20})(1+x+x^2+\cdots+x^{20})^3$$

και σε αυτή αναζητάμε τον συντελεστή του x^{20}.

Ο υπολογισμός του συντελεστή διευκολύνεται αν (i) βγάλουμε κοινό παράγοντα το x^2 από τον δεύτερο απαριθμητή και αναζητήσουμε τον συντελεστή του x^{18} και (ii) αν θεωρήσουμε τους απαριθμητές των 4 παιδιών εκτός του πρώτου, να πηγαίνουν στο άπειρο. Είναι προφανές ότι ο ζητούμενος συντελεστής δεν επηρεάζεται με αυτή τη μετατροπή. Έχουμε λοιπόν:

$$(1+x+x^2+\cdots+x^8)(1+x+x^2+\cdots)^4 = \frac{1-x^9}{1-x}\cdot\frac{1}{(1-x)^4} = \frac{1}{(1-x)^5} - \frac{x^9}{(1-x)^5}$$

Ο μειωτέος γράφεται σαν $(1-x)^{-5} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+4}{n}x^n$. Ο συντελεστής του x^{18} από τον όρο αυτό είναι συνεπώς $\binom{22}{18}$.

Αντίστοιχα ο αφαιρετέος γράφεται $\frac{x^9}{(1-x)^5} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+4}{n}x^{n+9}$. Ο συντελεστής του x^{18} εδώ προκύπτει προφανώς για $n=9$ και είναι $\binom{13}{9}$. Συνολικά λοιπόν ο ζητούμενος συντελεστής είναι ο $\binom{22}{18}-\binom{13}{9}$.

ii. Αν δεν υπήρχε ο πρώτος περιορισμός θα δίναμε 2 μπάλες στο δεύτερο παιδί και θα διανέμαμε 18 όμοια αντικειμένα σε 5 διακεκριμένες υποδοχές. Οι τρόποι θα ήταν $\binom{18+5-1}{18} = \binom{22}{18}$. Οι τρόποι διανομής που παραβιάζουν τον περιορισμό προκύπτουν αν δώσουμε 9 σοκολάτες στο πρώτο παιδί και στην συνέχεια διανείμουμε τις υπόλοιπες 9 σοκολάτες σε όλα τα παιδιά (και στο πρώτο) χωρίς περιορισμούς. Οι τρόποι είναι όπως παραπάνω $\binom{13}{9}$. Άρα οι τρόποι που πληρούν τον περιορισμό είναι $\binom{22}{18}-\binom{13}{9}$.