Ονοματεπώνυμο:... ....
Τμήμα:....................Διδάσκων:... ....

(Οι εκφωνήσεις επιστρέφονται μαζί με το γραπτό)

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2019

Διδάσκοντες: Δ. Καββαδίας, Π. Αλεβίζος

1. (15 μον.) Έστω G ένα απλό μη κατευθυντικό γράφημα με n κορυφές. Συμβολίζουμε με $\overline{G}$ το συμπληρωματικό του G. (Δηλαδή το γράφημα που έχει ακμές ακριβώς εκεί όπου το G δεν έχει.) Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

   i. Ένα μόνο από τα γραφήματα G και $\overline{G}$ μπορεί να έχει κύκλο Hamilton.

   ii. Εάν το πλήθος των κορυφών n είναι άρτιο, τότε το πολύ ένα από τα γραφήματα G και $\overline{G}$ μπορεί να έχει κύκλο Euler.

   iii. Αν $\chi(G)$ είναι ο χρωματικός αριθμός του G, τότε ισχύει ότι $\chi(G)+\chi(\overline{G}) = n$. (*Υπόδειξη: Εξετάστε το K_n.*)

   Απάντηση

   i. Ψευδής. Θεωρείστε για παράδειγμα τον κύκλο με 5 κορυφές C_5 και το συμπληρωματικό του γράφημα.

   ii. Αληθής. Εάν το πλήθος των κορυφών n είναι άρτιο, τότε κάθε κορυφή έχει περιττό βαθμό είτε στο G είτε στο $\overline{G}$. Συνεπώς δεν είναι δυνατό και τα δύο γραφήματα να έχουν όλες τις κορυφές τους με άρτιο βαθμό.

   iii. Ψευδής. Το K_n έχει χρωματικό αριθμό n ενώ το $\overline{K_n}$ (που αποτελείται από n απομονωμένες κορυφές), έχει χρωματικό αριθμό 1. Άρα $\chi(G) + \chi(\overline{G}) = n + 1$.

2. (10 μον.) Δείξτε ότι το πλήρες διμερές γράφημα $K_{2,n}$ είναι επίπεδο και υπολογίστε το πλήθος των όψεων μιας επίπεδης αποτύπωσης του.

   Απάντηση

   Σχεδιάζοντας n κορυφές πάνω σε μία ευθεία και από μία κορυφή σε κάθε ημιεπίπεδο, έχουμε μία επίπεδη αποτύπωση του $K_{2,n}$. Μπορούμε απλώς να μετρήσουμε τις όψεις αυτής της αποτύπωσης, ή να παρατηρήσουμε ότι το γράφημα αυτό έχει $2n$ ακμές και άρα από τον τύπο του Euler για τα επίπεδα συνεκτικά γραφήματα έχουμε την εξίσωση $(2 + n) + f = 2n + 2$, που δίνει $f = n$.

3. (10 μον.) Να δείξετε ότι δεν υπάρχει απλό γράφημα με 12 κορυφές και 28 ακμές του οποίου όλες οι κορυφές έχουν βαθμό 3 ή 6.

   Απάντηση

Έστω k το πλήθος των κορυφών βαθμού 6 και άρα $12-k$ κορυφές έχουν βαθμό 3. Εφαρμόζοντας το Λήμμα της Χειραψίας παίρνουμε $3(12-k)+6k = 2\cdot 28$, που είναι άτοπο μια και το αριστερό μέλος διαιρείται με το 3 ενώ το δεξί, όχι.

4. (15 μον.) Στα παρακάτω τα φ και ψ είναι προτασιακοί τύποι και το T σύνολο προτασιακών τύπων. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς; Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

   i. Αν το T είναι ικανοποιήσιμο και $T' \subseteq T$, τότε το T' είναι επίσης ικανοποιήσιμο.
   ii. Αν τα σύνολα τύπων T_1, T_2 είναι ικανοποιήσιμα, τότε το $T_1 \cup T_2$ είναι επίσης ικανοποιήσιμο.
   iii. Αν ο τύπος φ είναι τυπικό θεώρημα, τότε για κάθε ψ, ισχύει $\varphi \vdash \psi$.
   iv. Αν ο τύπος φ είναι αντίφαση, τότε για κάθε ψ, ισχύει $\varphi \vdash \psi$.
   v. $\varphi \vdash \psi$ αν και μόνο αν ο τύπος $\varphi \to \psi$ είναι τυπικό θεώρημα.

   Απάντηση

   i. Αληθής. Αν το T είναι ικανοποιήσιμο, εξ' ορισμού όλοι οι τύποι στο T ικανοποιούνται σε κάποια αποτίμηση και άρα και οποιοδήποτε υποσύνολο του T.
   ii. Ψευδής. Μπορεί τα δύο σύνολα τύπων T_1 και T_2 να ικανοποιούνται σε διαφορετικές αποτιμήσεις.
   iii. Ψευδής. Αν ο τύπος φ είναι τυπικό θεώρημα και ίσχυε ότι$\varphi \vdash \psi$, αυτό θα σήμαινε ότι και ο ψ είναι τυπικό θεώρημα και όχι τυχών τύπος.
   iv. Αληθής. Από μία αντίφαση αποδεικνύεται κάθε τύπος.
   v. Αληθής. Από το Θεώρημα Απαγωγής (και το αντίστροφο του) $\varphi \vdash \psi$ αν και μόνο αν $\vdash \varphi \to \psi$, ή αλλιώς αν ο τύπος $\varphi \to \psi$ είναι τυπικό θεώρημα.

5. (15 μον.) Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα που περιέχει ένα κατηγορηματικό σύμβολο G. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε απλά, μη κατευθυνόμενα γραφήματα όπου οι μεταβλητές ερμηνεύονται ως οι κορυφές των γραφημάτων και το $G(x,y)$ αληθεύει αν οι κορυφές x και y συνδέονται με ακμή.

   i. Τι δηλώνει στην γλώσσα αυτή ο παρακάτω τύπος;

   $$\forall x \forall y((x \neq y) \wedge (\exists z(G(x,y) \wedge G(y,z)) \to G(x,z)))$$

   ii. Στην γλώσσα αυτή να γράψετε πρόταση που να δηλώνει: «Κάθε μη απομονωμένη κορυφή (δηλαδή κορυφή βαθμού μεγαλύτερου του 0) έχει τουλάχιστον δύο γείτονες».

   Απάντηση

   i. «Κάθε δύο κορυφές είναι διαφορετικές και αν συνδέονται μεταξύ τους και μία από τις δύο συνδέεται και με τρίτη κορυφή, τότε και η άλλη συνδέεται με την τρίτη κορυφή».
   ii.

   $$\forall x(\exists y G(x,y) \to \exists z \exists w(z \neq w \wedge G(x,z) \wedge G(x,w))$$

6. (10 μον.) Να βρείτε τον αριθμό των διαφορετικών μεταθέσεων των γραμμάτων της λέξης ΠΑΡΑΠΟΝΑ όταν:

i. δεν υπάρχει κανένας περιορισμός.

ii. τα δύο Π δεν πρέπει να είναι σε διαδοχικές θέσεις.

Απάντηση

i. Πρόκειται για μεταθέσεις 8 αντικειμένων που χωρίζονται σε μία τριμελή ομάδα (τα 3 Α), σε μία διμελή (τα 2 Π) και τρεις μονομελείς ομάδες (τα υπόλοιπα γράμματα). Άρα οι μεταθέσεις είναι $\frac{8!}{3!\cdot 2!} = 3360$.

ii. Υπολογίζουμε αρχικά τις μεταθέσεις όπου τα δύο Π είναι σε διαδοχικές θέσεις. Για τον σκοπό αυτό θεωρούμε τα δύο Π σαν ένα αντικείμενο, οπότε τώρα έχουμε 7 αντικείμενα που χωρίζονται σε μία τριμελή ομάδα (τα Α) και σε τέσσερεις μονομελείς ομάδες. Οι μεταθέσεις είναι λοιπόν $\frac{7!}{3!} = 840$. Αυτές τις αφαιρούμε από τις μεταθέσεις χωρίς περιορισμό που υπολογίσαμε στο (i) και έχουμε 3360-840=2520.

7. (10 μον.) Έχουμε 10 διαφορετικά βιβλία Άλγεβρας και 10 διαφορετικά βιβλία Γεωμετρίας τα οποία μοιράζουμε με τυχαίο τρόπο σε 10 διαφορετικούς φοιτητές έτσι ώστε κάθε φοιτητής να πάρει από 2 βιβλία.

   i. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτή η διανομή αν δεν υπάρχει κανένας άλλος περιορισμός;

   ii. Ποιά η πιθανότητα τουλάχιστον ένας φοιτητής να πάρει ένα βιβλίο Άλγεβρας και ένα βιβλίο Γεωμετρίας;

Απάντηση

i. Έχουμε 20 διαφορετικά βιβλία τα οποία πρέπει να χωρίσουμε σε 10 διμελείς *διακριτές* ομάδες (οι φοιτητές είναι διακεκριμένοι μεταξύ τους). Οι τρόποι είναι $\frac{20!}{2!^{10}}$.

ii. Υπολογίζουμε αρχικά το πλήθος των διανομών όπου κάθε φοιτητής παίρνει είτε δύο βιβλία Άλγεβρας είτε δύο βιβλία Γεωμετρίας. Οι τρόποι επιλογής των 5 φοιτητών που θα πάρουν μόνο βιβλία Άλγεβρας, είναι $\binom{10}{5}$. Οι τρόποι διανομής τώρα των 10 βιβλίων Αλγέβρας σε αυτούς τους 5 φοιτητές είναι ανάλογα με το (i), $\frac{10!}{2!^5}$. Αντίστοιχοι είναι και οι τρόποι διανομής των βιβλίων Γεωμετρίας στους υπόλοιπους 5 φοιτητές. Συνολικά λοιπόν οι τρόποι είναι $\binom{10}{5}\left(\frac{10!}{2!^5}\right)^2$.

Αυτούς τους αφαιρούμε από το πλήθος των διανομών χωρίς περιορισμό του (i), και διαιρούμε την διαφορά ώστε να πάρουμε την ζητούμενη πιθανότητα.

$$\frac{\frac{20!}{2!^{10}} - \binom{10}{5}\left(\frac{10!}{2!^5}\right)^2}{\frac{20!}{2!^{10}}}$$

8. (15 μον.) Έστω τα σύνολα $A = \{0, 1, \ldots, 9\}$ και $B = \{x, y, z, w\}$.

   i. Πόσα είναι τα υποσύνολα του συνόλου $A \cup B$;

   ii. Πόσα είναι τα υποσύνολα του συνόλου $A \cup B$ που περιλαμβάνουν 4 στοιχεία του A και 2 στοιχεία του B;

   iii. Επαναλάβετε το ερώτημα (ii) αν το σύνολο B είναι το $B = \{0, 1, x, y\}$.

Απάντηση

i. Το $A \cup B$ έχει πληθάριθμο 14, άρα τα υποσύνολα του είναι 2^{14}.

ii. Τα υποσύνολα του A με 4 στοιχεία είναι $\binom{10}{4}$, ενώ του συνόλου B με 2 στοιχεία είναι $\binom{4}{2}$. Από τον κανόνα του γινομένου έχουμε ότι το ζητούμενο πλήθος υποσυνόλων είναι $\binom{10}{4} \cdot \binom{4}{2}$.

iii. Σε αυτή την περίπτωση, μπορεί να έχουμε στην επιλογή μας 0,1 ή 2 κοινά στοιχεία των A και B στα υποσύνολα. Εξετάζουμε κάθε μία από τις περιπτώσεις ξεχωριστά.

0 κοινά στοιχεία. Σε αυτή την περίπτωση δεν παίρνουμε κανένα από τα 0 και 1. Οι επιλογές είναι λοιπόν $\binom{8}{4}$ από το A και 1 από το B.

1 κοινό στοιχείο. Αυτό μπορεί να είναι το 0 ή το 1, αλλά όχι και τα δύο. Οι 2 επιλογές δίνουν ίδιο πλήθος, άρα σε αυτή την περίπτωση έχουμε $\binom{8}{3}$ επιλογές από το A και 2 από το B.

2 κοινά στοιχεία. Εδώ οι επιλογές είναι $\binom{8}{2}$ από το A και 1 από το B..

Συνολικά λοιπόν το πλήθος των υποσυνόλων είναι από τον κανόνα του αθροίσματος, το άθροισμα των παραπάνω περιπτώσεων.

$$\binom{8}{4} + 4 \cdot \binom{8}{3} + \binom{8}{2}$$

9. (10 μον.) Γράψτε γεννήτρια συνάρτηση και υποδείξτε τον συντελεστή που δίνει το πλήθος των μη αρνητικών ακεραίων λύσεων της εξίσωσης

$$3x + 5y + 7z + 9w = 50$$

Απάντηση

Θέτοντας $s_1 = 3x$, $s_2 = 5y$, $s_3 = 7z$ και $s_4 = 9w$, ζητάμε ισοδύναμα να βρούμε τις ακέραιες και μη αρνητικές λύσεις της εξίσωσης

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 50$$

Όπου όμως τα s_1, s_2, s_3 και s_4 είναι αντίστοιχα πολλαπλάσια των 3, 5, 7 και 9. Εισάγουμε την μεταβλητή s για την γεννήτρια και έχουμε

$$(1 + s^3 + \cdots + s^{48})(1 + s^5 + \cdots + s^{50})(1 + s^7 + \cdots + s^{49})(1 + s^9 + \cdots + s + s^{45})$$

Σε αυτή αναζητούμε τον συντελεστή του s^{50}.