ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εξετάσεις Ιανουαρίου 2020

Διδάσκοντες: Δ. Καββαδίας, Π. Αλεβίζος

1. (15 μον.) Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

   i. Αν δύο συνεκτικά επίπεδα γραφήματα G και H έχουν το ίδιο πλήθος κορυφών, ακμών και όψεων, τότε τα G και H είναι κατ' ανάγκη ισόμορφα μεταξύ τους.

   ii. Το συμπληρωματικό κάθε διμερούς γραφήματος με $n \geq 10$ κορυφές δεν είναι επίπεδο.

   iii. Υπάρχει γράφημα G με 11 κορυφές τέτοιο ώστε τόσο το G όσο και το συμπληρωματικό του να έχουν κύκλο Euler. (Αν νομίζετε ότι υπάρχει τέτοιο γράφημα, σχεδιάστε το.)

   iv. Ο χρωματικός αριθμός (δηλ. ο ελάχιστος αριθμός χρωμάτων με τα οποία μπορεί να χρωματιστεί νόμιμα) ενός μη συνεκτικού γραφήματος είναι το άθροισμα των χρωματικών αριθμών των συνεκτικών συνιστωσών του.

   v. Υπάρχει συνεκτικό γράφημα που η αφαίρεση κάθε κορυφής του το κάνει μη συνεκτικό.

   Απάντηση

   i. Ψευδής. Θεωρείστε για παράδειγμα το γράφημα που αποτελείται από δύο τετράγωνα σαν συνεκτικές συνιστώσες και το γράφημα που έχει επίσης δύο συνεκτικές συνιστώσες όπου κάθε μία είναι τρίγωνο με μία επιπλέον ακμή (και κορυφή) συνδεδεμένη σε κάποια από τις 3 κορυφές του τριγώνου η οποία συνεπώς έχει βαθμό 3. Και τα δύο έχουν 8 κορυφές, 8 ακμές και 3 όψεις, αλλά δεν είναι ισόμορφα.

   ii. Αληθής. Εφόσον το γράφημα είναι διμερές και έχει τουλάχιστον 10 κορυφές, ένα τουλάχιστον από τα δύο μέρη του έχει 5 κορυφές που στο συμπληρωματικό θα περιλαμβάνουν το K_5.

   iii. Αληθής. Είναι ο C_{11}, δηλαδή ο κύκλος με 11 κορυφές. Στο συμπληρωματικό κάθε κορυφή συνδέεται με 8 άλλες, δηλαδή έχει άρτιο βαθμό.

   iv. Ψευδής. Για παράδειγμα το γράφημα που αποτελείται από τον K_3 και τον K_5, έχει χρωματικό αριθμό 5.

   v. Ψευδής. Έστω ότι υπήρχε τέτοιο γράφημα. Επιλέγουμε αυθαίρετα μία κορυφή και στην συνέχεια μία οποιαδήποτε από τις συνιστώσες που δημιουργούνται όταν την αφαιρέσουμε. Σε κάθε μία από αυτές πρέπει να ισχύει η ίδια ιδιότητα. Κάνουμε το ίδιο σε αυτή την συνιστώσα κ.ο.κ. μέχρι να μην μπορεί να εφαρμοστεί περαιτέρω. Όμως τότε έχουμε κορυφή βαθμού 1 η οποία δεν είναι σημείο κοπής.

2. (10 μον.) Έστω G απλό μη κατευθυντικό γράφημα με n κορυφές στο οποίο κάθε κορυφή έχει βαθμό τουλάχιστον $n/2 + 1$. Δείξτε ότι αν x και y τα άκρα οποιασδήποτε ακμής του G, τότε υπάρχει κορυφή w που ενώνεται και με την x και με την y.

   Υπόδειξη: Υποθέστε ότι δεν υπάρχει τέτοια κορυφή w. Πόσες κορυφές είναι γειτονικές είτε στην x είτε στην y;

Απάντηση

Έστω N_x και N_y τα σύνολα των γειτονικών κορυφών των κορυφών x και y, αντίστοιχα. Δίδεται ότι $|N_x| \geq \frac{n}{2} + 1$ και $|N_y| \geq \frac{n}{2} + 1$ και συνεπώς $|N_x - \{y\}| \geq \frac{n}{2}$ και $|N_y - \{x\}| \geq \frac{n}{2}$. Όμως επειδή οι κορυφές του γραφήματος είναι n, συνεπάγεται ότι $N_x \cap N_y \neq \emptyset$, άρα υπάρχει κορυφή γειτονική και με την x και με την y.

3. (10 μον.) Δείξτε ότι ένα συνεκτικό γράφημα με n κορυφές και ακολουθία βαθμών $(1, 1, 2, 2, ..., 2)$ είναι δένδρο.

   Απάντηση

   Έστω ότι το γράφημα έχει κύκλο. Οι κορυφές του κύκλου θα έχουν προφανώς βαθμό 2. Επειδή όμως το γράφημα είναι συνεκτικό, οι κορυφές βαθμού 1 δεν μπορούν να συνδέονται με αυτές παρά μόνο αν κάποια είχε βαθμό τουλάχιστον 3, άτοπο. Εφόσον λοιπόν το γράφημα είναι συνεκτικό και ακυκλικό, είναι δένδρο. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι πρόκειται για ένα μονοπάτι με n κορυφές.

4. (15 μον.) Στα παρακάτω τα φ, χ και ψ είναι προτασιακοί τύποι. Εξετάστε αν οι παρακάτω τύποι είναι ταυτολογίες.

   i. $((\varphi \to \psi) \land (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to \chi)$
   ii. $(\varphi \to \psi \lor \chi) \to (\psi \land \chi \to \varphi)$
   iii. $(\varphi \lor \psi \lor \chi) \to (\neg\varphi \to \psi \lor \chi)$
   iv. $(\psi \to \varphi) \to (\chi \to (\psi \to \varphi))$
   v. $(\varphi \to \psi) \land (\varphi \to \neg\psi)$

   Απάντηση

   i. Ταυτολογία. Για να μην είναι, θα πρέπει η υπόθεση της (κεντρικής) συνεπαγωγής να είναι αληθής και το συμπέρασμα ψευδές. Για το τελευταίο πρέπει ο φ να είναι αληθής και ο χ, ψευδής. Αν όμως και η υπόθεση και ο φ είναι αληθή, και ο χ πρέπει να είναι, άτοπο.
   ii. Όχι ταυτολογία. Όπως παραπάνω, το ψευδές συμπέρασμα σημαίνει ότι οι ψ και χ είναι αληθείς, και ο φ ψευδής. Αυτές οι αληθοτιμές όμως κάνουν και την υπόθεση αληθή, επομένως ο τύπος διαψεύδεται.
   iii. Ταυτολογία. Αν η υπόθεση είναι αληθής, τουλάχιστον ένας από τους τρεις τύπους είναι αληθής. Τότε όμως και το συμπέρασμα είναι αληθές.
   iv. Ταυτολογία. Αν η υπόθεση είναι αληθής και το συμπέρασμα είναι επίσης.
   v. Όχι ταυτολογία. Αν φ αληθής, μία από τις δύο παρενθέσεις θα είναι αναγκαστικά ψευδής.

5. (15 μον.) Θεωρούμε μία πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P που ερμηνεύεται στο σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ με το $P(x, y)$ να δηλώνει ότι $x \leq y$. Εξηγήστε αν οι παρακάτω προτάσεις αληθεύουν σε αυτή την ερμηνεία:

   i. $\forall x \forall y (P(x, y) \land P(y, x) \to x \approx y)$
   ii. $\forall x \exists y (x \not\approx y \land P(y, x)$

iii. $\neg \exists x \exists y \exists z (P(x,y) \wedge P(y,z) \wedge P(z,x))$

Απάντηση

i. Αληθεύει. Ο τύπος δηλώνει «Για οποιουσδήποτε φυσικούς αν ο πρώτος είναι μικρότερος ή ίσος του δεύτερου και ο δεύτερος μικρότερος ή ίσος του πρώτου, τότε οι δύο φυσικοί είναι ίσοι». Ισχύει προφανώς.

ii. Δεν αληθεύει. Ο τύπος δηλώνει «Για οποιονδήποτε φυσικό, υπάρχει άλλος διαφορετικός από αυτόν που είναι μικρότερος του». Δεν αληθεύει για το 0.

iii. Δεν αληθεύει. Ο τύπος δηλώνει «Δεν υπάρχουν 3 φυσικοί που κάθε ένας είναι μικρότερος ή ίσος από τους άλλους δύο». Ισχύει όταν και οι 3 φυσικοί είναι ίσοι.

6. (10 μον.) Μια τάξη ενός σχολείου περιέχει 10 διαφορετικά θρανία με 2 διαφορετικά καθίσματα το κάθε ένα (ισοδύναμα, 20 αριθμημένα καθίσματα) στα οποία κάθονται 10 κορίτσια και 10 αγόρια (που προφανώς θεωρούνται όλα διαφορετικά άτομα).

   i. Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν οι μαθητές στα θρανία, χωρίς κάποιο περιορισμό;

   ii. Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν οι μαθητές στα θρανία, αν σε κάθε θρανίο κάθονται ή 2 κορίτσια ή 2 αγόρια;

   Απάντηση

   i. Πρέπει να αντιστοιχηθούν 20 παιδιά με 20 διαφορετικά καθίσματα. Οι τρόποι είναι 20!.

   ii. Επιλέγουμε τα θρανία όπου θα κάτσουν τα κορίτσια με $\binom{10}{5}$ τρόπους. Στην συνέχεια τα κορίτσια κάθονται στα καθίσματα τους με 10! τρόπους. Παρόμοια και τα αγόρια στα υπόλοιπα θρανία. Συνολικά λοιπόν κάθονται με $(10!)^2\binom{10}{5}$ τρόπους.

7. (15 μον.) Έχουμε στη διάθεσή μας 3 ίδια βιβλία με πάχος 10 εκατοστά και 20 διαφορετικά μεταξύ τους βιβλία, όλα με πάχος 5 εκατοστά. Να υπολογίσετε τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων να γεμίσει ένα ράφι μήκους 1 μέτρου, αν έχει σημασία η σειρά τοποθέτησης των βιβλίων στο ράφι. (Υπόδειξη: Εξετάστε περιπτώσεις τοποθέτησης των 3 βιβλίων των 10 εκατοστών στο ράφι.)

   Απάντηση

   Η άσκηση υπάρχει λυμένη στο 6ο σετ ασκήσεων.

8. (10 μον.) Πόσα μη κατευθυντικά γραφήματα με 5 αριθμημένες (δηλαδή διακεκριμένες μεταξύ τους) κορυφές υπάρχουν;

   Απάντηση

   Σε 5 αριθμημένες κορυφές ορίζονται $\binom{5}{2}$ ακμές. Ένα γράφημα με 5 κορυφές μπορεί να σχηματιστεί με οποιοδήποτε υποσύνολο από αυτές. Υπάρχουν όμως $2^{\binom{5}{2}}$ υποσύνολα αυτού του συνόλου ακμών.

9. (10 μον.) Γράψτε γεννήτρια συνάρτηση και υποδείξτε τον συντελεστή που δίνει το πλήθος των ακεραίων λύσεων της εξίσωσης

$$x + y + z + w = 18$$

με τους περιορισμούς: $0 \leq x, y, z, w \leq 7$.

Απάντηση

Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με την τοποθέτηση 18 όμοιων σφαιρών σε 4 διακεκριμένες υποδοχές κάθε μία από τις οποίες χωρά μέχρι 7 σφαίρες. Η γεννήτρια είναι λοιπόν η

$$(1 + u + u^2 + \cdots + u^7)^4$$

και ο συντελεστής που ζητάμε είναι του u^{18}.