Ονοματεπώνυμο:.. ....
Τμήμα:....................Διδάσκων:.. ....
(Οι εκφωνήσεις επιστρέφονται μαζί με το γραπτό)

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2018

Διδάσκοντες: Δ. Καββαδίας, Π. Αλεβίζος

1. (15 μον.) Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

   i. Υπάρχει απλό γράφημα με επτά κορυφές και ακολουθία βαθμών (6,6,6,5,4,3,2).

   ii. Υπάρχει γράφημα το οποίο έχει σαν υπογράφημα κύκλο με περιττό μήκος (περιττό πλήθος ακμών) το οποίο έχει χρωματικό αριθμό το πολύ 2.

   iii. Το συμπληρωματικό γράφημα ενός διμερούς γραφήματος είναι πάντοτε μη συνεκτικό.

   iv. Το πλήρες διμερές γράφημα $K_{2017,2018}$ έχει κύκλο Euler.

   v. Υπάρχει γράφημα του οποίου όλες οι κορυφές έχουν βαθμό 3 (3-κανονικό) με 10 ακμές.

   Απάντηση

   i. Ψευδής. Αν υπήρχε τέτοιο γράφημα θα είχε 7 κορυφές. Κάθε κορυφή βαθμού 6 θα πρέπει συνεπώς να συνδέεται με όλες τις άλλες κορυφές. Άρα και η κορυφή βαθμού 2 θα πρέπει να συνδέεται με τις 3 κορυφές βαθμού 6, άτοπο.

   ii. Ψευδής. Σε οποιονδήποτε βέλτιστο χρωματισμό ο περιττός κύκλος χρειάζεται τουλάχιστον 3 χρώματα, ανεξάρτητα από τον χρωματισμό των υπόλοιπων κορυφών.

   iii. Ψευδής. Το μονοπάτι μήκους 3 είναι διμερές γράφημα και το συμπληρωματικό του είναι ισόμορφο με το ίδιο (είναι αυτοσυμπληρωματικό γράφημα).

   iv. Ψευδής. Οι κορυφές που βρίσκονται στο μέρος με τις 2018 κορυφές, έχουν βαθμό 2017. Συνεπώς έχουμε κορυφές περιττού βαθμού και άρα δεν μπορεί να υπάρχει κύκλος Euler.

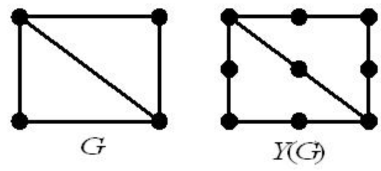
   v. Ψευδής. Αν υπήρχε τέτοιο γράφημα, με n κορυφές τότε από το Λήμμα της Χειραψίας θα ίσχυε ότι $3n = 2 \cdot 10$. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί το 3 δεν διαιρεί το 10.

2. (10 μον.) Έστω G ένα γράφημα με n κορυφές και m ακμές. Το «γράφημα υποδιαίρεσης» του G συμβολίζεται με $Y(G)$ και είναι ένα γράφημα που προκύπτει όταν κάθε ακμή του G υποδιαιρεθεί σε δύο ακμές με την εισαγωγή μιας καινούργιας κορυφής. (Δείτε παρακάτω ένα παράδειγμα.)

   i. Υπολογίστε το πλήθος των κορυφών και των ακμών του $Y(G)$ συναρτήσει των n και m.

   ii. Δείξτε ότι το $Y(G)$ είναι διμερές γράφημα.

   Απάντηση



i. Για κάθε ακμή του G, στο $Y(G)$ εισάγεται μία νέα κορυφή, ενώ κάθε ακμή του G διαιρείται σε δύο. Συνεπώς το πλήθος των κορυφών του $Y(G)$ είναι $n+m$ ενώ των ακμών είναι $2m$.

ii. Με την υποδιαίρεση κάθε ακμής το μήκος οποιουδήποτε κύκλου του $Y(G)$ είναι το διπλάσιο του μήκους του αντίστοιχου κύκλου του G, είναι δηλαδή άρτιος αριθμός. Άρα κάθε κύκλος του $Y(G)$ είναι άρτιος και συνεπώς το $Y(G)$ διμερές γράφημα.

3. (10 μον.) Έστω G ένα γράφημα το οποίο περιλαμβάνει μια ακμή η οποία ανήκει σε όλους τους κύκλους περιττού μήκους του G. Δείξτε ότι το G μπορεί να χρωματιστεί νόμιμα με 3 χρώματα. (*Υπόδειξη: Λάβετε υπόψη ότι ένα γράφημα είναι διμερές αν και μόνο αν δεν περιλαμβάνει περιττό κύκλο. Αφαιρέστε τώρα ένα άκρο αυτής της ακμής από το G. Τι συμβαίνει με το υπόλοιπο γράφημα;*)

   Απάντηση

   Εφόσον η συγκεκριμένη ακμή ανήκει σε κάθε περιττό κύκλο του G, αφαιρώντας ένα άκρο της καταστρέφουμε κάθε περιττό κύκλο του G. Συνεπώς το γράφημα που απομένει δεν έχει περιττό κύκλο, άρα είναι διμερές και συνεπώς χρωματίζεται με 2 χρώματα. Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε και ένα τρίτο χρώμα για τον νόμιμο χρωματισμό της κορυφής που αφαιρέθηκε.

4. (15 μον.) Έστω T_1, T_2 σύνολα προτασιακών τύπων και φ, ψ προτασιακοί τύποι τέτοιοι ώστε $T_1 \models \varphi$ και $T_2 \models \psi$. Ποιες από τις παρακάτω ταυτολογικές συνεπαγωγές αληθεύουν; Εξηγήστε τις απαντήσεις σας.

   i. $T_1 \cap T_2 \models \varphi \wedge \psi$
   ii. $T_1 \cup T_2 \models \varphi \wedge \psi$
   iii. $T_1 \cap T_2 \models \varphi \vee \psi$
   iv. $T_1 \models \varphi \to \psi$
   v. $T_2 \models \varphi \to \psi$

   Απάντηση

   i. Ψευδής. Μία αποτίμηση που ικανοποιεί το υποσύνολο του T_1 που είναι κοινό με το T_2, δεν ικανοποιεί αναγκαστικά τον τύπο φ. Παρόμοια και για το T_2 σε σχέση με τον ψ. Άρα μία αποτίμηση που ικανοποιεί το $T_1 \cap T_2$, δεν ικανοποιεί αναγκαστικά τον τύπο $\varphi \wedge \psi$.

   ii. Αληθής. Το αριστερό μέλος ικανοποιείται σε κάποιο υποσύνολο των αποτιμήσεων που ικανοποιούν το T_1 και αντίστοιχα το T_2. Άρα σε αυτές ικανοποιούνται και ο φ και ο ψ.

   iii. Ψευδής. Όπως στο (i) οι αποτιμήσεις που ικανοποιούν το αριστερό μέλος δεν ικανοποιούν αναγκαστικά ούτε τον φ ούτε τον ψ.

iv. Ψευδής. Οι αποτιμήσεις που ικανοποιούν το T_1 ικανοποιούν και τον φ, άρα για να είναι και το δεξί μέλος αληθές, θα πρέπει να ικανοποιούν και τον ψ. Όμως αυτό δεν είναι δεδομένο.

v. Αληθής. Οι αποτιμήσεις που ικανοποιούν το T_2, ικανοποιούν και το συμπέρασμα της συνεπαγωγής άρα και όλη την συνεπαγωγή.

5. (15 μον.) Δίνεται ο πρωτοβάθμιος τύπος:

$$\forall x \forall y (P(x,y) \vee P(y,x)) \rightarrow \exists x \forall y P(x,y)$$

Για κάθε μία από τις παρακάτω δομές εξετάστε αν ο τύπος αληθεύει. Εξηγήστε τις απαντήσεις σας.

i. Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ με το $P(x,y)$ να δηλώνει ότι «ο x είναι μικρότερος ή ίσος του y».

ii. Το σύνολο των παραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ με το $P(x,y)$ να δηλώνει ότι «ο x είναι μικρότερος ή ίσος του y».

iii. Το σύνολο των θετικών φυσικών αριθμών $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$ με το $P(x,y)$ να δηλώνει ότι «ο x διαιρεί ακριβώς τον y».

Απάντηση

i. Αληθεύει. Ο τύπος στην δομή αυτή δηλώνει «Αν για κάθε δύο φυσικούς ο ένας είναι μικρότερος ή ίσος του άλλου, τότε υπάρχει φυσικός που είναι μικρότερος ή ίσος κάθε άλλου». Η υπόθεση της συνεπαγωγής είναι προφανώς αληθής αλλά και το συμπέρασμα αληθές.

ii. Δεν αληθεύει. Ο τύπος δηλώνει ότι και στο (i) αλλά για τους πραγματικούς αριθμούς. Και πάλι η υπόθεση της συνεπαγωγής είναι αληθής όμως τώρα το συμπέρασμα δεν αληθεύει διότι δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός μικρότερος ή ίσος κάθε άλλου.

iii. Αληθεύει. Η υπόθεση της συνεπαγωγής τώρα δηλώνει «Αν για κάθε δύο φυσικούς ο ένας διαιρεί ακριβώς τον άλλο τότε ...». Όμως αυτό δεν ισχύει για κάθε δύο φυσικούς (π.χ. 7 και 13) και άρα η συνεπαγωγή αληθεύει.

6. (10 μον.) Να υπολογιστεί το πλήθος των n-διαστατων δυαδικών συμβολοσειρών ($n \geq 4$) που είτε αρχίζουν με 00 είτε τελειώνουν σε 11 (αλλά όχι και τα δύο).

Απάντηση

Τα n-διαστατα διανύσματα που αρχίζουν με 00 αλλά δεν τελειώνουν σε 11 (δηλαδή τελειώνουν σε 00 ή 10 ή 01) είναι $3 \cdot 2^{n-4}$. Αυτό διότι για κάθε πιθανή κατάληξη από τις 3 (π.χ. σε 00) έχουμε 2^{n-4} τέτοια διανύσματα. Ανάλογα, όσα τελειώνουν σε 11 αλλά δεν αρχίζουν με 00 (δηλαδή αρχίζουν με 11 ή 10 ή 01) είναι $3 \cdot 2^{n-4}$. Τα δύο αυτά σύνολα είναι ξένα μεταξύ τους και άρα οι ζητούμενες συμβολοσειρές είναι $2 \cdot 3 \cdot 2^{n-4} = 3 \cdot 2^{n-3}$.

7. (20 μον.) Για κάθε μία από τις 4 παρακάτω περιπτώσεις υπολογίστε το πλήθος των διαφορετικών τρόπων να μοιραστούν όλα σε 4 διαφορετικά παιδιά 6 μήλα και 7 πορτοκάλια, (τα μήλα, όπως και τα πορτοκάλια είναι πανομοιότυπα) όταν κάθε παιδί πρέπει να πάρει από:

i. Τουλάχιστον 1 μήλο.

ii. Το πολύ 2 πορτοκάλια.

iii. Τουλάχιστον ένα μήλο *και* το πολύ 2 πορτοκάλια.

iv. Τουλάχιστον ένα μήλο, ή το πολύ 2 πορτοκάλια, ή και τα δύο.

(*Υπόδειξη: Δώστε την απάντηση στο (iv) σαν συνάρτηση των απαντήσεων στα (i), (ii) και (iii) (ακόμη και αν δεν τις υπολογίσατε), χρησιμοποιώντας εγκλεισμό-αποκλεισμό*)

Απάντηση

i. Δίνουμε πρώτα από 1 μήλο σε κάθε παιδί ώστε να καλυφθεί ο περιορισμός και στην συνέχεια διανέμουμε τα υπόλοιπα 2 μήλα σε όλα τα παιδιά. Η διανομή αυτή είναι διανομή 2 μη διακεκριμένων πραγμάτων σε 4 διακεκριμένες υποδοχές και γίνεται με $\binom{2+4-1}{2} = \binom{5}{2}$ τρόπους. Τα πορτοκάλια διανέμονται χωρίς περιορισμό σαν 7 μη διακεκριμένα αντικείμενα σε 4 διακεκριμένες υποδοχές με $\binom{7+4-1}{7} = \binom{10}{7}$. Ο κανόνας του γινομένου δίνει ότι οι τρόποι διανομής σε αυτή την περίπτωση είναι $\binom{5}{2} \cdot \binom{10}{7}$.

ii. Εδώ τα μήλα μοιράζονται με το ίδιο σκεπτικό όπως παραπάνω με $\binom{6+4-1}{6} = \binom{9}{6}$ τρόπους. Για τα πορτοκάλια παρατηρούμε ότι εφόσον πρέπει να μοιραστούν και τα 7 αλλά δεν μπορεί κανένα παιδί να πάρει περισσότερα από 2, ένα παιδί θα πρέπει να πάρει 1 πορτοκάλι και τα άλλα 3 παιδιά από 2. Υπάρχουν 4 τρόποι να επιλεγεί αυτό το παιδί. Συνολικά λοιπόν οι τρόποι διανομής είναι $4 \cdot \binom{9}{6}$.

iii. Στο (i) έχουμε υπολογίσει τους τρόπου διανομής των μήλων ώστε κάθε παιδί να πάρει τουλάχιστον 1 και στο (ii) τους τρόπους διανομής των πορτοκαλιών ώστε κάθε παιδί να πάρει το πολύ 2. Ο κανόνας του γινομένου δίνει $4 \cdot \binom{5}{2}$.

iv. Αθροίζοντας τους τρόπους που υπολογίσαμε στα (i) και (ii), έχουμε διπλομετρήσει τους τρόπους όπου έχουν διανεμηθεί τουλάχιστον 1 μήλο και το πολύ 2 πορτοκάλια σε κάθε παιδί, δηλαδή αυτοί που υπολογίσαμε στο (iii). Εφαρμόζοντας εγκλεισμό-αποκλεισμό παίρνουμε ότι οι τρόποι διανομής είναι

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{10}{7} + 4 \cdot \binom{9}{6} - 4 \cdot \binom{5}{2}$$

8. (15 μον.) Διαθέτουμε γραμματόσημα των 5 λεπτών, 10 λεπτών, 20 λεπτών και 50 λεπτών. Τα γραμματόσημα της ίδιας αξίας είναι μεταξύ τους πανομοιότυπα. Θέλουμε να υπολογίσουμε τους τρόπους που μπορούμε να κολλήσουμε στον φάκελο γραμματόσημα αξίας N λεπτών. Να δοθεί η γεννήτρια συνάρτηση, καθώς και ο όρος της ο συντελεστής του οποίου δίνει την απάντηση στο ερώτημα αυτό. Η γεννήτρια σας θα πρέπει να δοθεί σε κλειστή μορφή, δηλαδή δεν θα πρέπει να υπάρχουν άπειρα αθροίσματα σε αυτή.

Απάντηση

Οι απαριθμητές για τα γραμματόσημα είναι ανάλογα με την αξία τους:

$(1 + x^5 + x^{10} + \cdots) = \frac{1}{1-x^5}$

$(1 + x^{10} + x^{20} + \cdots) = \frac{1}{1-x^{10}}$

$(1 + x^{20} + x^{40} + \cdots) = \frac{1}{1-x^{20}}$

$(1 + x^{50} + x^{100} + \cdots) = \frac{1}{1-x^{50}}$

για τα γραμματόσημα των 5, 10, 20 και 50 λεπτών αντίστοιχα. Σημειώνουμε ότι η άθροιση μπορεί να φτάσει μέχρι το άπειρο (και άρα η σειρά να αντικατασταθεί χησιμοποιώντας τον τύπο της γεωμετρικής προόδου), διότι οι δυνάμεις που είναι μεγαλύτερες από το x^N δεν συνεισφέρουν στον συντελεστή του. Η γεννήτρια είναι λοιπόν το γινόμενο των 4 απαριθμητών

$$\frac{1}{1-x^5}\cdot\frac{1}{1-x^{10}}\cdot\frac{1}{1-x^{20}}\cdot\frac{1}{1-x^{50}}$$

και σε αυτή ζητάμε τον συντελεστή του x^N.