ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εξετάσεις Ιανουαρίου 2017

Διδάσκοντες: Δ. Καββαδίας, Π. Αλεβίζος

1. (15 μον.) Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

   i. Αν το γράφημα G έχει κύκλο Euler και διαιρέσουμε κάθε ακμή του με μία καινούργια κορυφή, τότε το προκύπτον γράφημα συνεχίζει να έχει κύκλο Euler.

   ii. Αν το γράφημα G έχει κύκλο Hamilton και διαιρέσουμε κάθε ακμή του με μία καινούργια κορυφή, τότε το προκύπτον γράφημα συνεχίζει να έχει κύκλο Hamilton.

   iii. Υπάρχει επίπεδο γράφημα με ακολουθία βαθμών (5,4,3,3,3,2).

   iv. Αν ένα γράφημα έχει σαν υπογράφημα το K_m, τότε ο χρωματικός του αριθμός είναι τουλάχιστον m.

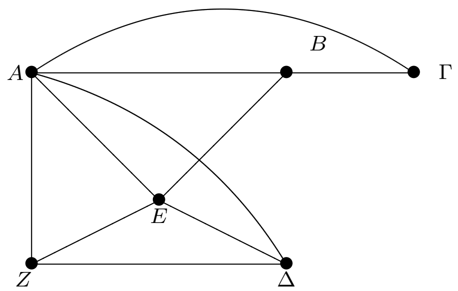
   v. Ένα γράφημα με ένα σημείο κοπής δεν έχει κύκλο Euler.

Απάντηση.

i. Αληθής. Ο κύκλος Euler του G διέρχεται από όλες τις ακμές. Προφανώς αν η ακμή έχει διαιρεθεί με μία κορυφή ο ίδιος κύκλος Euler διέρχεται και από όλες τις ακμές του καινούργιου γραφήματος. Εναλλακτικά, επειδή το G είχε κύκλο Euler κάθε κορυφή θα είναι συνεκτικό και κάθε κορυφή του θα έχει άρτιο βαθμό. Στο προκύπτον γράφημα οι παλιές κορυφές διατηρούν τον βαθμό τους, ενώ οι καινούργιες έχουν όλες βαθμό 2.

ii. Ψευδής. Θεωρείστε π.χ. ένα «τετράγωνο» με μία διαγώνιο.

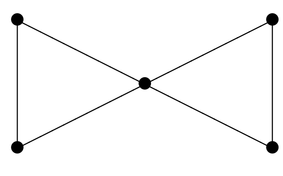
iii. Αληθής. Το γράφημα είναι το παρακάτω.



G

iv. Αληθής. Χρειάζονται m χρώματα για να χρωματιστεί το υπογράφημα K_m, και πιθανόν επιπλέον χρώματα για τις υπόλοιπες κορυφές.

v. Ψευδής. Ένα αντιπαράδειγμα είναι το παρακάτω.



2. (15 μον.) 'Εστω G ένα γράφημα με $n \geq 2$ κορυφές. Δείξτε ότι αν το G έχει σύνολο ανεξαρτησίας με $k > n/2$ κορυφές, τότε δεν μπορεί να έχει κύκλο Hamilton.

   (*Υπόδειξη: Έστω ότι το G είχε κύκλο Hamilton C. Είναι δυνατόν δύο κορυφές από το σύνολο ανεξαρτησίας να είναι διαδοχικές στον C;*)

   Απάντηση.

   Έστω $I = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$ οι κορυφές ενός συνόλου ανεξαρτησίας μεγέθους k. Από τον ορισμό του συνόλου ανεξαρτησίας, δεν υπάρχει ακμή μεταξύ οποιονδήποτε δύο κορυφών του συνόλου, άρα αν το G έχει κύκλο Hamilton, στον κύκλο αυτό ανάμεσα από δύο κορυφές του I θα παρεμβάλλεται τουλάχιστον μία κορυφή που δεν ανήκει στο I. Συνεπώς οι κορυφές εκτός του I είναι τουλάχιστον όσες οι κορυφές του I, άτοπο μια και $|I| = k > n/2$.

3. (10 μον.) Έχουμε 4 κάρτες για τις οποίες ξέρουμε ότι κάθε μία έχει από την μία πλευρά ένα γράμμα από τα Α και Β και από την άλλη έναν αριθμό από τους 1 και 2. Οι 4 κάρτες είναι τοποθετημένες στο τραπέζι με την μία πλευρά προς τα πάνω και βλέπουμε σε αυτές τα σύμβολα Α, Β, 1 και 2 αντίστοιχα. Πόσες το λιγότερο (και ποιες) κάρτες πρέπει να αναποδογυρίσουμε ώστε να επιβεβαιώσουμε ή να διαψεύσουμε την πρόταση «Αν μία κάρτα έχει το Α από τη μία πλευρά, τότε έχει το 1 από την άλλη»;

   Απάντηση.

   Η προς επιβεβαίωση πρόταση είναι μια συνεπαγωγή της μορφής $P \to Q$. Θα πρέπει λοιπόν να ελέγξουμε αν, όταν αληθεύει η υπόθεση της συνεπαγωγής, αληθεύει και το συμπέρασμα. Αυτό συμβαίνει με την κάρτα Α την οποία πρέπει να γυρίσουμε πρώτη. Αν δούμε εκεί 2, προφανώς η πρόταση δεν ισχύει και δεν χρειάζεται κάτι άλλο. Αν δούμε 1 όμως, πρέπει να ελέγξουμε και την ισοδύναμη πρόταση $\neg Q \to \neg P$. Η υπόθεση αυτής της συνεπαγωγής επαληθεύεται στη κάρτα με το 2. Αν δουμε εκεί Α, τότε η πρόταση δεν είναι αληθής, αν δούμε Β, τότε είναι. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι ούτε η κάρτα με το Β ούτε με το 1 μας δίνουν κάποια πληροφορία.

4. (10 μον.) Βρείτε χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Πληρότητας ποια από τα παρακάτω σύνολα τύπων είναι συνεπή.

   i. $\{(p \to q), (q \to r), (r \to \neg p)\}$
   ii. $\{\neg(p \to q), q\}$

   Απάντηση.

   Το Θεώρημα Πληρότητας μας λέει ότι αν ένα σύνολο είναι συνεπές τότε είναι και ικανοποιήσιμο. Τα δύο θεωρήματα Πληρότητας και Εγκυρότητας μαζί μάλιστα, μας λένε ότι ένα σύνολο είναι συνεπές αν και μόνο αν είναι ικανοποιήσιμο. Άρα, αντί να ελέγξουμε την συνέπεια των συνόλων με συντακτικό τρόπο, μπορούμε να το κάνουμε ευκολότερα με σημασιολογικό. Μπορούμε δηλαδή γενικά να κάνουμε τον πίνακα αληθείας των τύπων του συνόλου και να ελέγξουμε αν είναι ικανοποιήσιμο. Εδώ όμως τα πράγματα είναι πολύ απλά. Για το (i) παρατηρούμε ότι αν $p = q = r = \Psi$, τότε και οι 3 τύποι του συνόλου ικανοποιούνται, άρα είναι συνεπές. Για το (ii) θα πρέπει $q = A$ αλλά τότε ο $\neg(p \to q)$ δεν ικανοποιείται. Άρα το σύνολο δεν είναι συνεπές.

5. (15 μον.) Θεωρούμε τη γλώσσα της κατηγορηματικής λογικής που ορίζεται σε απλά μη κατευθυντικά γραφήματα, όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος και το διμελές

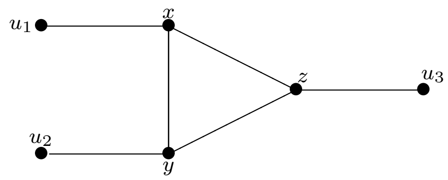
κατηγορηματικό σύμβολο $P(x, y)$ δηλώνει ότι «οι κορυφές x και y συνδέονται με ακμή». Σε αυτή την ερμηνεία: (i) Εξηγήστε στη φυσική γλώσσα (στα Ελληνικά) τι δηλώνει ο παρακάτω τύπος. Μην χρησιμοποιήσετε ονόματα μεταβλητών στην δήλωση σας (δηλ. μην πείτε κάτι σαν «υπάρχει κορυφή x κλπ...») (ii) Δώστε ένα γράφημα με τουλάχιστον 6 κορυφές και μέγιστο βαθμό κορυφής 3 στο οποίο ο τύπος να επαληθεύεται.

$$\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(y, z) \wedge P(z, x) \wedge \forall w (\neg P(w, x) \wedge \neg P(w, y) \rightarrow P(w, z)))$$

Απάντηση.

(i) «Στο γράφημα υπάρχει ένα τρίγωνο και οποιαδήποτε κορυφή δεν συνδέεται με δύο από τις κορυφές του τριγώνου, συνδέεται υποχρεωτικά με την τρίτη.»

(ii) Ένα γράφημα με 6 κορυφές είναι το παρακάτω. Η κορυφή u_3 δεν συνδέεται με τις x και y και άρα πρέπει να συνδέεται με την z όπως επιβάλλει η συνεπαγωγή. Οι κορυφές u_1 και u_2 συνδέονται με την x και με την y αντίστοιχα και άρα δεν απαιτείται να συνδέονται με την z.



6. (10 μον.) Στη βιβλιοθήκη του Πανεπιστημίου υπάρχουν 10 διαφορετικά βιβλία τα οποία πρόκειται να τα δανειστούν οι 3 φοιτητές Α, Β, Γ. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτός ο δανεισμός αν (i) δεν υπάρχει άλλος περιορισμός και (ii) αν ο Α δεν θα δανειστεί και το 1ο και το 6ο βιβλίο μαζί.

   Απάντηση.

   (i) Αν δεν υπάρχει άλλος περιορισμός κάθε βιβλίο μπορεί να πάρει μία ετικέτα από τις Α, Β, Γ που δηλώνει σε ποιον φοιτητή δανείστηκε. Υπάρχουν 3 επιλογές για κάθε βιβλίο, άρα 3^{10} συνολικά.

   (ii) Οι απαγορευμένοι δανεισμοί είναι αυτοί που ο Α έχει πάρει το 1ο και το 6ο βιβλίο. Τα υπόλοιπα 8 δανείζονται όπως προηγουμένως και άρα οι οι απαγορευμένοι τρόποι είναι 3^8. Συνολικά λοιπόν $3^{10} - 3^8$.

7. (15 μον.) Σε μια κληρωτίδα τοποθετούνται 40 μπάλες (4 μπάλες για κάθε έναν από τους αριθμούς 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9). Αν κληρωθούν 4 μπάλες, υπολογίστε το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων αν:

   i. Δεν μας ενδιαφέρει η σειρά κλήρωσης
   ii. Μας ενδιαφέρει η σειρά κλήρωσης

   Απάντηση.

   (i) Επειδή κληρώνονται 4 μπάλες και υπάρχουν 4 για κάθε αριθμό, είναι δυνατό να κληρωθούν και οι 4 μπάλες του ίδιου αριθμού. Άρα οι τρόποι είναι όσες οι διανομές 4 μη διακεκριμένων σφαιρών σε 10 διακεκριμένες υποδοχές, δηλαδή $\binom{10+4-1}{4} = \binom{13}{4}$.

(ii) Σε αυτή τη περίπτωση η πρώτη μπάλα μπορεί να έχει 10 τιμές, η δεύτερη το ίδιο κλπ. Συνολικά 10^4.

8. (10 μον.) Ποιος είναι ο συντελεστής του όρου του αναπτύγματος της παράστασης $(3x^5 - \frac{5}{x^3})^{16}$ ο οποίος είναι ανεξάρτητος του x;

   Απάντηση.

$$(3x^5 - \frac{5}{x^3})^{16} = \sum_{k=0}^{16} \binom{16}{k} (3x^5)^k \left(-\frac{5}{x^3}\right)^{16-k} = \sum_{k=0}^{16} \binom{16}{k} 3^k (-5)^{16-k} x^{8k-48}$$

   Ο όρος που δεν εξαρτάται από το x είναι αυτός όπου $8k - 48 = 0$ ή $k = 6$. Ο συντελεστής του λοιπόν είναι $\binom{16}{6} 3^6 5^{10}$.

9. (10 μον.) Ένας άνθρωπος έχει στο πορτοφόλι του 10 κέρματα του ενός €, 10 κέρματα των δύο € και 10 χαρτονομίσματα των 5 € και αγοράζει προϊόντα αξίας 50 €. Σχηματίστε γεννήτρια συνάρτηση και προσδιορίστε τον όρο, ο συντελεστής του οποίου θα δώσει τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να πληρώσει ο αγοραστής.

Απάντηση.
Ο απαριθμητής για τα κέρματα του 1 ευρώ είναι ο $(1 + x + x^2 + \cdots + x^{10})$. Ο απαριθμητής για τα κέρματα των 2 ευρώ είναι $(1+x^2+x^4+\cdots+x^{20})$ και των 5 ευρώ παρόμοια $(1+x^5+x^{10}+\cdots+x^{50})$. Η γεννήτρια συνάρτηση είναι το γινόμενο τους

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^{10})(1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{20})(1 + x^5 + x^{10} + \cdots + x^{50})$$

και σε αυτή ζητάμε τον συντελεστή του x^{50}.