Ονοματεπώνυμο:...
Τμήμα:....................Διδάσκων:..

(Οι εκφωνήσεις επιστρέφονται μαζί με το γραπτό)

Β

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εξετάσεις Ιουλίου 2015

Διδάσκοντες: Δ. Καββαδίας, Μ. Μπουντουρίδης, Π. Αλεβίζος

1. (10 μον) Έστω γράφημα G με τον παρακάτω πίνακα γειτνίασης. Σχεδιάστε το G. Ποιός ο χρωματικός αριθμός του;

$$A_G = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Απάντηση. Το γράφημα αποτελείται από δύο πλήρη γραφήματα to K_4 (πάνω αριστερό τμήμα του πίνακα) και το K_3 (κάτω δεξί), ασύνδετα μεταξύ τους. Χρειαζόμαστε 4 χρώματα για το K_4 και 3 για το K_3. Άρα ο χρωματικός αριθμός του G είναι 4.

2. (15 μον.) Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας. Καμία απάντηση δεν θα ληφθεί υπόψη χωρίς δικαιολόγηση.

   i. Υπάρχει γράφημα με ακολουθία βαθμών 2, 2, 2, 2, 1, 1 .

   ii. Έστω G γράφημα που έχει και κύκλο Euler. Διαιρούμε μία ακμή του G με μια καινούργια κορυφή w (δηλαδή αν uv είναι η ακμή, την αντικαθιστούμε με τις ακμές uw και wv). Το προκύπτον γράφημα συνεχίζει να έχει κύκλο Euler.

   iii. Έστω G γράφημα με 10 κορυφές και χρωματικό αριθμό 3. Τότε στο G υπάρχει σύνολο κορυφών που ανά δύο δεν συνδέονται (δηλαδή σύνολο ανεξαρτησίας) μεγέθους τουλάχιστον 4.

   iv. Υπάρχει επίπεδο συνεκτικό γράφημα με 8 κορυφές, 10 ακμές και 5 όψεις.

   v. Η προσθήκη μιας καινούργιας ακμής μεταξύ δύο κορυφών u και v ενός γραφήματος G δημιουργεί καινούργιο κύκλο αν και μόνο αν οι u και v βρίσκονται στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του G.

Απάντηση

i. Αληθής. Είναι το μονοπάτι με 6 κορυφές.

ii. Αληθής. Το καινούργιο γράφημα είναι συνεκτικό οι δε βαθμοί των κορυφών του είναι όλοι άρτιοι μια και η καινούργια κορυφή έχει βαθμό 2.

iii. Αληθής. Το μέσο μέγεθος μιας χρωματικής ομάδας είναι 10/3=3,3.... Άρα υπάρχει μία με μέγεθος τουλάχιστον 4.

iv. Ψευδής. Θα πρέπει να ισχύει ο τύπος του Euler, δηλαδή 8+5=10+2. Προφανώς δεν ισχύει.

v. Αληθής. Αν η u και v είναι στην ίδια συνιστώσα τότε ενώνονται με μονοπάτι, άρα η προσθήκη της ακμής uv δίνει καινούργιο κύκλο. Αν δεν είναι στην ίδια συνιστώσα, τότε η uv είναι μια γέφυρα που ενώνει τις δύο συνιστώσες, άρα δεν υπάρχει κύκλος που να την περιλαμβάνει.

3. (10 μον.) Έστω F ένα δάσος με συνολικά n κορυφές αποτελούμενο από k δένδρα. Πόσες ακμές έχει;

   Απάντηση. Αν $n_1, n_2, \dots, n_k$ το πλήθος των κορυφών των k συνιστωσών, το πλήθος των ακμών τους είναι αντίστοιχα $n_1 - 1, n_2 - 1, \dots, n_k - 1$ εφόσον είναι δένδρα. Συνολικά λοιπόν είναι $\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) = \sum_{i=1}^{k} n_i - k = n - k$.

4. (10 μον.) Έστω φ και ψ προτασιακοί τύποι. Ο φ είναι ικανοποιήσιμος ενώ ο ψ ταυτολογία. Ποιές από τις παρακάτω δηλώσεις είναι αληθείς; Αιτιολογήστε.

   i. Ο $\varphi \wedge \psi$ είναι ταυτολογία.

   ii. Ο $\varphi \vee \psi$ είναι ταυτολογία.

   iii. Ο $\varphi \to \psi$ είναι ταυτολογία.

   iv. $\neg\psi \vdash \varphi$

   Απάντηση.

   i. Ψευδής. Ο τύπος διαψεύδεται όταν ο φ διαψεύδεται. Άρα δεν πρόκειται για ταυτολογία.

   ii. Αληθής. Ο τύπος αληθεύει όταν τουλάχιστον ένας από τους δύο τύπους αληθεύει. Επειδή όμως ο ψ είναι ταυτολογία και ο $\varphi \vee \psi$ είναι ταυτολογία.

   iii. Αληθής. Το συμπέρασμα της συνεπαγωγής είναι πάντα αληθές, άρα και όλη η συνεπαγωγή.

   iv. Αληθής. Ο $\neg\psi$ είναι αντίφαση, άρα αποδεικνύει κάθε τύπο.

5. (10 μον.) Στην πρωτοβάθμια γλώσσα που ορίζεται σε απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα (δηλαδή σε γραφήματα χωρίς ανακυκλώσεις και παράλληλες ακμές) και είναι εφοδιασμένη με ένα κατηγορηματικό σύμβολο G με ερμηνεία $G(x, y)$: «οι κορυφές x και y συνδέονται με ακμή», γράψτε τύπο $\varphi(x, y)$ που να δηλώνει: « Η κορυφή x συνδέεται με όλες τις άλλες εκτός από την y». Στην συνέχεια και χρησιμοποιώντας προαιρετικά τον τύπο $\varphi(x, y)$ γράψτε τύπο $\psi(x)$ που να δηλώνει «η κορυφή x συνδέεται με όλες τις άλλες εκτός από μία».

   Απάντηση.

$$\varphi(x, y) = \forall z(z \neq x \wedge z \neq y \to G(x, z))$$

και

$$\psi(x) = \exists u \varphi(x, u)$$

Προσέξτε ότι στον $\psi(x)$ δεν χρειάζεται να επιβάλλουμε η u να είναι μοναδική, γιατί αν για μια κορυφή u αληθεύει ο $\varphi(x, u)$, ο ίδιος ο $\varphi(x, u)$ επιβάλλει η u να είναι μοναδική.

6. (10 μον.) Πόσα είναι τα passwords μήκους 20 που μπορούν να σχηματιστούν από τα 26 μικρά γράμματα του λατινικού αλφαβήτου και τα 10 αριθμητικά ψηφία αν ο μόνος περιορισμός είναι ότι πρέπει να υπάρχουν 15 γράμματα και 5 ψηφία;

   Απάντηση. Αρχικά επιλέγουμε τις 5 θέσεις των αριθμητικών ψηφίων. Αυτό γίνεται με $\binom{20}{5}$ τρόπους. Οι 15 θέσεις των γραμμάτων συμπληρώνονται με 26^{15} τρόπους ενώ οι 5 των ψηφίων με 10^5 τρόπους. Από τον κανόνα του γινομένου τα passwords είναι $26^{15}10^5\binom{20}{5}$.

7. (15 μον.) Πόσες είναι οι συμβολοσειρές μήκους 15 που σχηματίζονται από 3 Α, 7 Γ και 5 Δ που αρχίζουν και τελειώνουν με Γ και δεν έχουν 3 συνεχόμενα Α;

   Απάντηση. Οι συμβολοσειρές με αρχή και τέλος το Γ είναι όσες οι συμβολοσειρές μήκους 13 με 3 Α, 5 Γ και 5 Δ που δεν έχουν 3 συνεχόμενα Α. Αν αγνοήσουμε τον τελευταίο περιορισμό, οι συμβολοσειρές είναι $\frac{13!}{3!5!5!}$. Από αυτές πρέπει να αφαιρέσουμε όσες έχουν 3 συνεχόμενα Α. Θεωρώντας τα 3 Α σαν ένα καινούργιο «γράμμα» πρέπει να υπολογίσουμε τις συμβολοσειρές μήκους 11 με 5 Γ, 5Δ και 1 σύμβολο ακόμα. Αυτές είναι $\frac{11!}{5!5!}$. Συνολικά το ζητούμενο είναι:

$$\frac{13!}{3!5!5!} - \frac{11!}{5!5!}$$

8. (10 μον.) Θέλουμε να τοποθετήσουμε σε μια σειρά από 20 καθίσματα ενός αμφιθεάτρου 5 (διακεκριμένους) φοιτητές έτσι ώστε να υπάρχει μεταξύ τους τουλάχιστον ένα κενό κάθισμα. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

   Απάντηση. Στην αρχή τοποθετούμε 5 καθίσματα για τους φοιτητές και ανάμεσα τους από ένα κενό κάθισμα ώστε να εξασφαλίσουμε την απαίτηση της άσκησης. Οι φοιτητές κάθονται στα καθίσματα τους με 5! τρόπους. Απομένουν 11 καθίσματα τα οποία μπορούν να τοποθετηθούν οπουδήποτε ανάμεσα από τους φοιτητές καθως και πριν τον πρώτο και μετά τον τελευταίο. Είναι ισοδύναμο πρόβλημα με την τοποθέτηση 11 μη διακεκριμένων μπαλών σε 6 διακεκριμένες υποδοχές. Οι τρόποι είναι $\binom{11+6-1}{11}$. Συνολικά λοιπόν από τον κανόνα του γινομένου οι τρόποι τοποθέτησης είναι $5!\binom{16}{11} = \frac{16!}{11!}$.

9. (10 μον.) Σε ένα εστιατόριο πηγαίνουν 100 άτομα για την δεξίωση ενός γάμου. Στο εστιατόριο υπάρχουν 3 τραπέζια των 30 ατόμων και 2 των 20. Δώστε γεννήτρια συνάρτηση και επισημάνατε τον συντελεστή που δείχνει με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν οι καλεσμένοι. Τα άτομα θεωρούνται μη διακεκριμένα και δεν έχει σημασία που θα καθίσουν στο τραπέζι (μας ενδιαφέρει μόνο ο αριθμός τους σε κάθε τραπέζι). Κάθε τραπέζι πρέπει να έχει τουλάχιστον 10 καλεσμένους ενώ στα δύο τραπέζια των 20 ατόμων επιπλέον κάθονται μόνο ζευγάρια άρα πρέπει να είναι άρτιος αριθμός. Δεν χρειάζεται να υπολογίσετε τον συντελεστή.

   Απάντηση. Επειδή μας ενδιαφέρει μόνο το πλήθος των ατόμων σε κάθε τραπέζι και όχι ποια άτομα είναι ή που κάθονται, θα χρησιμοποιήσουμε συνήθη γεννήτρια συνάρτηση. Ο απαριθμητής για τα τραπέζια των 30 ατόμων είναι $(x^{10} + x^{11} + \cdots + x^{30})$ ενώ για τα τραπέζια των 20 ατόμων ο απαριθμητής είναι $(x^{10} + x^{12} + x^{14} + \cdots + x^{20})$. Συνολικά λοιπόν η γεννήτρια συνάρτηση είναι η:

$$(x^{10} + x^{11} + \cdots + x^{30})^3 (x^{10} + x^{12} + x^{14} + \cdots + x^{20})^2$$

στην οποία αναζητούμε τον συντελεστή του x^{100}.

10. (10 μον.) Υπολογίστε τον σταθερό όρο στο ανάπτυγμα του $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^{16}$.

    Απάντηση. Έχουμε ότι $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^{16} = \sum_{k=0}^{16} \binom{16}{k} x^{3k} \frac{1}{x^{16-k}} = \sum_{k=0}^{16} \binom{16}{k} x^{4k-16}$ Ο σταθερός όρος προφανώς ευρίσκεται όταν ο εκθέτης του x γίνει 0 δηλαδή όταν $4k - 16 = 0$, και άρα $k = 4$. Ο σταθερός όρος λοιπόν είναι ο $\binom{16}{4}$.