ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2014
Διδάσκοντες: Χ. Ζαγούρας, Δ. Καββαδίας

1. Ποιο είναι το μέγιστο πλήθος ακμών που μπορεί να έχει ένα γράφημα με 8 κορυφές; Πόσες ακμές έχει το πλήρες διμερές γράφημα $K_{5,3}$;

   Απάντηση.

   Ένα γράφημα με 8 κορυφές μπορεί να έχει το πολύ

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = 28$$

   ακμές. Το πλήρες διμερές γράφημα $K_{5,3}$ έχει $5 \cdot 3 = 15$ ακμές.

2. Να σχεδιάσετε ένα συνεκτικό γράφημα με 5 κορυφές και στη συνέχεια να βρείτε τη διάμετρό του και τον χρωματικό αριθμό του.

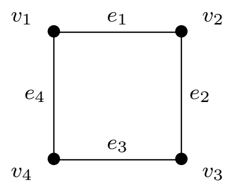
   Απάντηση.

   Η απάντηση εξαρτάται από το γράφημα που σχεδιάστηκε.

3. Να βρεθούν οι πίνακες γειτνίασης, αντιστοιχιών, διασυνδέσεων και βαθμών για τον κύκλο C_4.

   Απάντηση.

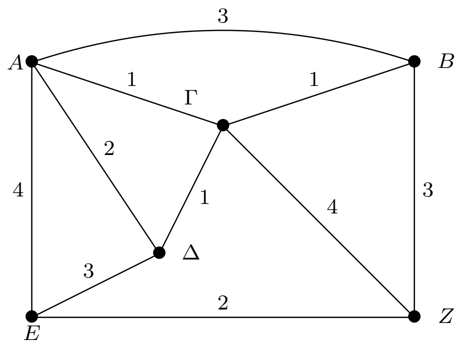
   Θεωρούμε μια διάταξη των κορυφών και των ακμών του C_4:



Ο πίνακας γειτνίασης είναι $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ο πίνακας αντιστοιχιών είναι $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ο πίνακας διασυνδέσεων είναι $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ο πίνακας βαθμών είναι $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Να βρεθεί ένα ελάχιστο επικαλύπτον δέντρο του ακόλουθου γραφήματος

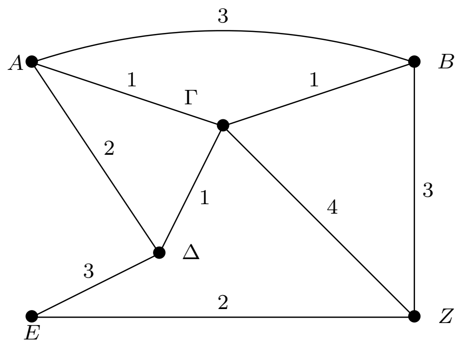
   Απάντηση.



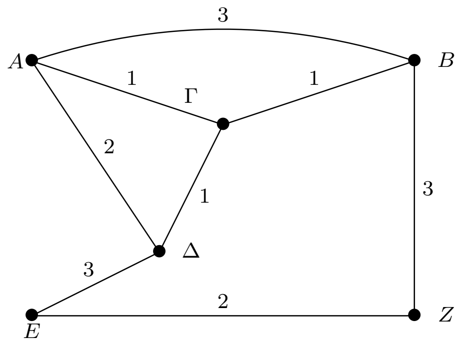
Για το γράφημα αυτό έχουμε πλήθος κορυφών $\nu = 6$ και πλήθος ακμών $\mu = 10$. Μια ενδεικτική λύση χρησιμοποιώντας τον Αλγόριθμο Αντίστροφης Διαγραφής (ο οποίος θα σταματήσει μόλις παραμείνουν 5 ακμές στο γράφημα) είναι η ακόλουθη:

Ακμή	Μήκος
AE	4
ΓZ	4
AB	3
ΔE	3
BZ	3
$A\Delta$	2
EZ	2
$A\Gamma$	1
$B\Gamma$	1
$\Gamma\Delta$	1

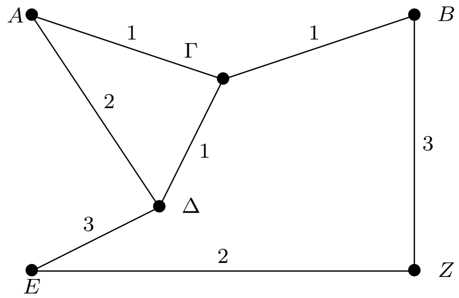
Η διαγραφή της ακμής AE δεν επηρεάζει τη συνεκτικότητα του γραφήματος, επομένως μπορεί να διαγραφεί. Προκύπτει επομένως το ακόλουθο γράφημα με 9 ακμές:



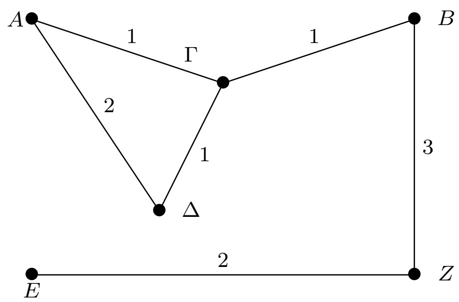
Συνεχίζουμε εξετάζοντας την ακμή ΓZ. Η διαγραφή της ακμής ΓZ δεν επηρεάζει τη συνεκτικότητα του γραφήματος, επομένως μπορεί να διαγραφεί. Προκύπτει τώρα το ακόλουθο γράφημα με 8 ακμές:



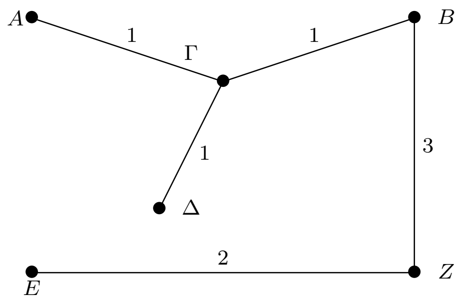
Συνεχίζουμε εξετάζοντας την ακμή AB. Η διαγραφή της ακμής AB δεν επηρεάζει τη συνεκτικότητα του γραφήματος, επομένως μπορεί να διαγραφεί. Προκύπτει τώρα το ακόλουθο γράφημα με 7 ακμές:



Εξετάζουμε τώρα την ακμή ΔE, η οποία μπορεί επίσης να διαγραφεί. Προκύπτει τώρα το ακόλουθο γράφημα με 6 ακμές:



Συνεχίζουμε εξετάζοντας την ακμή BZ, η διαγραφή της οποίας καθιστά το γράφημα μη συνεκτικό, και επομένως δεν διαγράφεται. Εξετάζουμε τώρα την ακμή $A\Delta$, η οποία μπορεί να διαγραφεί αφού δεν επηρεάζει τη συνεκτικότητα. Προκύπτει τώρα το ακόλουθο γράφημα με 5 ακμές:



Ο αλγόριθμος σταματά, και το τελικό γράφημα που προέκυψε είναι ελάχιστο επικαλύπτον δέντρο του αρχικού γραφήματος με συνολικό μήκος 8.

5. i. Έστω φ και ψ προτασιακοί τύποι για τους οποίους ισχύει ότι $\varphi \models \psi$ και $\varphi \not\equiv \psi$. Δείξτε ότι υπάρχει αποτίμηση που ικανοποιεί τον ψ αλλά δεν ικανοποιεί τον φ.

   ii. Δίδονται οι προτασιακοί τύποι $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_8$, όλοι ορισμένοι στις ίδιες τρεις προτασιακές μεταβλητές, για τους οποίους ισχύει ότι $\varphi_1 \models \varphi_2$, $\varphi_2 \models \varphi_3, \ldots, \varphi_7 \models \varphi_8$ και επιπλέον για όλα τα i, j με $i \neq j$ ισχύει $\varphi_i \not\equiv \varphi_j$. Δείξτε ότι αν ο φ_1 δεν είναι αντίφαση, τότε ο φ_8 είναι ταυτολογία.

Απάντηση.

i. Επειδή $\varphi \models \psi$, κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί τον ϕ πρέπει να ικανοποιεί και τον ψ. Επειδή όμως επίσης ισχύει και ότι $\varphi \not\equiv \psi$, θα πρέπει αναγκαστικά ο ψ να ικανοποιείται με μία τουλάχιστον αποτίμηση που δεν ικανοποιεί τον φ, αλλιώς οι δύο τύποι θα πρέπει να ήταν ισοδύναμοι, άτοπο.

ii. Εφόσον ο φ_1 δεν είναι αντίφαση θα πρέπει να ικανοποιείται από μία τουλάχιστον αποτίμηση. Με βάση το (i) ο φ_2 θα πρέπει να ικανοποιείται από μία επιπλέον ακόμη αποτίμηση, δηλαδή από τουλάχιστον δύο αποτιμήσεις. Παρόμοια, ο φ_3 από τουλάχιστον 3 κ.ο.κ. και συνεπώς ο φ_8 από τουλάχιστον 8. Όμως όλοι οι τύποι ορίζονται σε 3 μεταβλητές, άρα ο πίνακας αληθείας τους έχει μόνο 8 γραμμές (αποτιμήσεις). Άρα ο φ_8 ικανοποιείται σε όλες, άρα είναι ταυτολογία.

6. Στην πρωτοβάθμια γλώσσα που ορίζεται σε απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα (δηλαδή σε γραφήματα χωρίς ανακυκλώσεις και παράλληλες ακμές) και είναι εφοδιασμένη με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο G με ερμηνεία «$G(x, y)$: οι κορυφές x και y συνδέονται με ακμή», δίνεται ο τύπος:

$$\varphi(x, y) = \neg G(x, y) \wedge \exists u(G(x, u) \wedge G(u, y))$$

   i. Εξηγήστε στην φυσική γλώσσα (στα Ελληνικά) τι λέει ο παραπάνω τύπος.

   ii. Στο γράφημα του Ερωτήματος 4 παραπάνω, βρείτε τα ζεύγη κορυφών (x, y) που ικανοποιούν τον παραπάνω τύπο.

Απάντηση.

i. Ο τύπος λέει «Οι κορυφές x και y δεν ενώνονται με ακμή αλλά υπάρχει μία (άλλη) κορυφή η οποία ενώνεται και με τις δύο».

ii. Τα ζεύγη (x, y) που ικανοποιούν τον τύπο είναι τα $(A, Z), (B, \Delta), (B, E), (\Gamma, E), (\Delta, Z)$ και τα συμμετρικά τους.

7. Ρίχνουμε ένα ζάρι k φορές και σημειώνουμε τα αποτελέσματα των ρίψεων.

   i. Πόσες είναι οι διαφορετικές ακολουθίες ρίψεων που μπορεί να πάρουμε;

   ii. Ποιά η πιθανότητα να έχουμε ακολουθία που να περιλαμβάνει 2 τουλάχιστον διαφορετικούς αριθμούς;

   iii. Ποιά η πιθανότητα να εμφανιστούν στην ακολουθία αριθμοί μεγαλύτεροι του 3 τουλάχιστον 2 φορές ($k \geq 2$);

   Απάντηση.

   i. 6^k. Πρόκειται για διατάξεις με επανάληψη.

   ii. Οι ακολουθίες που περιλαμβάνουν 2 τουλάχιστον διαφορετικούς αριθμούς βρίσκονται αφαιρώντας από το σύνολο αυτές που όλοι οι αριθμοί είναι ίδιοι. Αυτές είναι προφανώς 6 (η ακολουθία με 1, η ακολουθία με 2 κλπ.). Άρα η πιθανότητα είναι $(6^k - 6)/6^k = 1 - 1/6^{k-1}$.

   iii. Από το σύνολο των ακολουθιών αφαιρούμε αυτές που (i) όλοι οι αριθμοί που τις απαρτιζουν είναι μικρότεροι ή ίσοι του 3 και (ii) αυτές στις οποίες εμφανίζεται αριθμός μεγαλύτερος του 3 ακριβώς 1 φορά. Οι (i) είναι 3^k. Για να βρούμε τον αριθμό στην περίπτωση (ii), υπάρχουν 3 αριθμοί (οι 4, 5, 6) που κάποιος από αυτούς πρέπει να είναι στην ακολουθία ακριβώς 1 φορά. Οι πιθανές του θέσεις είναι k ενώ η υπόλοιπη ακολουθία μπορεί να συμπληρωθεί με 3^{k-1} τρόπους. Σύνολο λοιπόν $3 \times k \times 3^{k-1} = k3^k$. Άρα η πιθανότητα είναι $(6^k - 3^k - k3^k)/6^k = 1 - (k+1)2^{-k}$.

8. Έστω A το σύνολο $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

   i. Ποιος είναι ο πληθάριθμος του δυναμοσυνόλου $P(A)$ του A; (Το δυναμοσύνολο ενός συνόλου είναι το σύνολο των υποσυνόλων του.)

   ii. Πόσα στοιχεία του $P(A)$ είναι υπερσύνολα του συνόλου $\{2, 5\}$;

   Απάντηση.

   i. 2^{10}.

   ii. Κάθε υπερσύνολο του $\{2, 5\}$ στο $P(A)$ προκύπτει αν σε αυτό ενώσουμε ένα υποσύνολο του $A - \{2, 5\}$. Το σύνολο αυτό έχει 8 στοιχεία, άρα τα υπερσύνολα του $\{2, 5\}$ είναι 2^8.

9. Ανάμεσα σε 1000 φοιτητές, 400 θα δώσουν εξετάσεις στα Διακριτά Μαθηματικά, 300 Πραγματική Ι και 200 Γραμμική Άλγεβρα. Υπάρχουν 200 που θα δώσουν 2 μαθήματα (οποιαδήποτε) και 100 που θα δώσουν και τα 3. Πόσοι φοιτητές δεν θα δώσουν κανένα μάθημα;

   Απάντηση.

   Εφαρμόζουμε Εγκλεισμό-Αποκλεισμό. Αν C_1, C_2, C_3 τα σύνολα των φοιτητών που θα δώσουν Διακριτά Μαθηματικά, Γραμμική Άλγεβρα και Πραγματική Ι, αντίστοιχα, ζητάμε τον πληθάριθμο του συνόλου $\overline{C_1}\,\overline{C_2}\,\overline{C_2}$. Με βάση τον τύπο του Εγκλεισμού-Αποκλεισμού

$$|\overline{C_1}\,\overline{C_2}\,\overline{C_2}| = |N| - |C_1| - |C_2| - |C_3| + |C_1C_2| + |C_2C_3| + |C_1C_3| - |C_1C_2C_3|$$

Όμως το άθροισμα των τομών ανά 2 είναι 200 και συνεπώς: $|\overline{C_1}\,\overline{C_2}\,\overline{C_2}| = 1000 - 400 - 300 - 200 + 200 - 100 = 200$.

10. (15 μον.) Δώστε γεννήτρια συνάρτηση και υποδείξτε τον όρο ο συντελεστής του οποίου ισούται με τον αριθμό των διαφορετικών δυαδικών συμβολοσειρών μήκους 100 με 10 εμφανίσεις του συμβόλου 1 και 90 εμφανίσεις του συμβόλου 0 αν η συμβολοσειρά αρχίζει και τελειώνει με το σύμβολο 1 και ανάμεσα σε δύο διαδοχικές εμφανίσεις του συμβόλου 1 θα πρέπει να παρεμβάλλονται τουλάχιστον 3 εμφανίσεις του συμβόλου 0. (Δεν απαιτείται ο υπολογισμός του συντελεστή, αλλά αν τον υπολογίσετε έχετε επιπλέον βαθμολογία.)

    Απάντηση.

    Τοποθετούμε τα 1 (κατά 1 τρόπο) και στην συνέχεια διανέμουμε τα 90 0 στα 9 διαστήματα ανάμεσα από δύο διαδοχικά 1. Επειδή κάθε διάστημα πρέπει να έχει από 3 και πάνω 0, ο απαριθμητής για κάθε διάστημα είναι $(x^3 + x^4 + \cdots + x^{90})$. (Μπορούμε φυσικά να σταματήσουμε την απαρίθμηση στο x^{63} όπως και να την φθάσουμε στο άπειρο.) Η γεννήτρια συνάρτηση είναι συνεπώς $(x^3 + x^4 + \cdots + x^{90})^9$, στην οποία ζητάμε τον συντελεστή του x^{90}.

    Για τον υπολογισμό του συντελεστή είναι όπως γνωρίζουμε ευκολότερο να φθάσουμε την άθροιση μέχρι το άπειρο και να βγάλουμε κοινό παράγοντα το x^3. Αυτό καταλήγει στην γεννήτρια $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^9$ στην οποία αναζητούμε τον συντελεστή του x^{63}. Έχουμε λοιπόν:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^9 = \frac{1}{(1-x)^9}$$

    Ως γνωστόν, η ακολουθία της οποίας γεννήτρια συνάρτηση είναι η τελευταία παράσταση είναι η $\alpha_n = \binom{9+n-1}{n}, n = 0, 1, 2, \ldots$. Κατά συνέπεια ο συντελεστής του x^{63} είναι ο $\binom{71}{63}$.

    Σημείωση: Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε και με απλή συνδυαστική αν βλέπαμε το πρόβλημα σαν διανομή των 27 0 στην αρχή (από 3 σε κάθε διάστημα μεταξύ δύο 1) με 1 τρόπο και στην συνέχεια σαν διανομή των υπόλοιπων 63 χωρίς περιορισμούς στα 9 διαστήματα ανάμεσα από δύο 1. Αυτό είναι ισοδύναμο με την διανομή 63 μη διακεκριμένων μπαλών σε 9 διακεκριμένες υποδοχές. Οι τρόποι είναι $\binom{71}{63}$.