Θεωρία Γραφημάτων

Διακριτά Μαθηματικά – Θεωρία Γραφημάτων

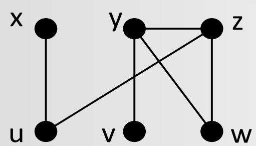
Πανεπιστήμιο Πατρών

Τμήμα Μαθηματικών

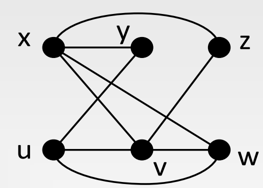
Το συμπληρωματικό γράφημα

- Αν $G = (V, E)$ απλό γράφημα, το συμπληρωματικό του ορίζεται σαν $\overline{G} = (V, \overline{E})$ όπου το e ∈ $\overline{E}$ αν-ν e ∉ E. Δηλαδή το $\overline{E}$ έχει ακριβώς τις ακμές που **δεν έχει** το G.
- **Σύνολο ανεξαρτησίας** είναι ένα σύνολο κορυφών που είναι ανά δύο ασύνδετες.
- Το μέγεθος του μεγαλύτερου συνόλου ανεξαρτησίας συμβολίζεται με $\alpha(G)$.

G:



$\overline{G}$:



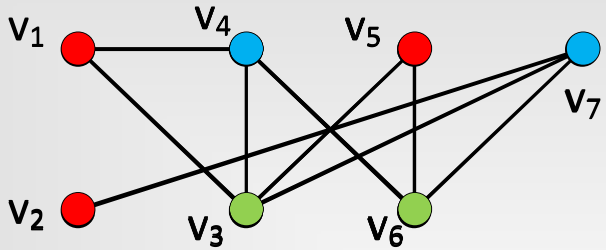
- Παράδειγμα. Η ακμή xu υπάρχει στο G αλλά όχι στο $\overline{G}$. Επίσης $\alpha(G)$=3 (π.χ. {x,v,w})
- Παρατηρήσεις
  - $\overline{\overline{G}} = G$ (το συμπληρωματικό του συμπληρωματικού είναι το αρχικό γράφημα)
  - Ένα σύνολο ανεξαρτησίας μεγέθους k στο G είναι πλήρες υπογράφημα (κλίκα) μεγέθους k στο $\overline{G}$ και το αντίστροφο.
  - Αν m οι ακμές του G τότε το $\overline{G}$ έχει $\frac{n(n-1)}{2} - m$ ακμές

Χρωματισμοί

- **Ορισμοί**. Ένας **χρωματισμός** f ενός γραφήματος G με k χρώματα είναι μια απεικόνιση του συνόλου των κορυφών V στο $[k]=\{1,2,\ldots,k\}$, $f: V \rightarrow [k]$, τέτοια που αν $u, v \in V$ είναι γειτονικές κορυφές, $f(u) \neq f(v)$. Το $f(u)$ ονομάζεται **χρώμα** της κορυφής u. Οι κορυφές με ίδιο χρώμα βρίσκονται στην ίδια **χρωματική κλάση**. Το μικρότερο k για το οποίο υπάρχει χρωματισμός του G λέγεται **χρωματικός αριθμός** του G και συμβολίζεται με $\chi(G)$.
- Παρατηρήσεις.
  - Αν το G έχει ανακυκλώσεις, τότε δεν έχει χρωματισμό για κανένα k.
  - Αν $\chi(G)=1$, τότε το G δεν έχει ακμές.
  - Αν $\chi(G)=2$, τότε το G είναι διμερές.
  - Αν $\chi(G)=k$, τότε το G είναι k-μερες (ανάλογο με το διμερές όπου το V διαμερίζεται σε k μέρη).
- Η εύρεση του χρωματικού αριθμού ενός γραφήματος είναι δύσκολο πρόβλημα για $k \geq 3$. (Είναι NP-πλήρες.)

Χρωματισμοί (συνέχεια…)

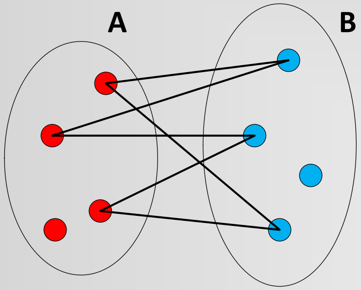
- Ο **λαίμαργος αλγόριθμος** χρωματισμού: Διατάσσουμε αυθαίρετα τις κορυφές και χρωματίζουμε με αυτή τη σειρά δίνοντας στην v_i το χρώμα με τον μικρότερο δείκτη που δεν έχει χρησιμοποιηθεί στους γείτονες της v_i με μικρότερο δείκτη.

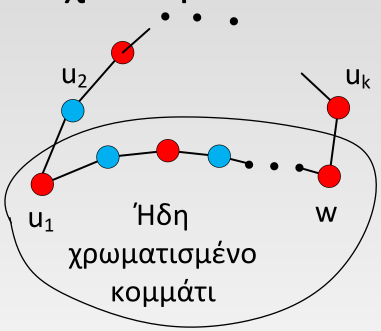


- **Παράδειγμα**. $f(v_1)=1$, $f(v_2)=1$, $f(v_3)=2$, $f(v_4)=3$, $f(v_5)=1$, $f(v_6)=2$, $f(v_7)=3$
- **Παρατήρηση**. Ο αλγόριθμος δεν οδηγεί πάντα σε βέλτιστο χρωματισμό
- **Πόρισμα**. $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$
- **Απόδειξη**. Εφόσον μια κορυφή σε οποιαδήποτε διάταξη δεν μπορεί να έχει περισσότερους από Δ(G) γείτονες, ο λαίμαργος αλγόριθμος δεν θα χρειαστεί πάνω από $\Delta(G)+1$ χρώματα.

Εφαρμογή: διμερή γραφήματα

- Ένα διμερές γράφημα είναι εξ' ορισμού διχρωματικό.
- **Χαρακτηρισμός**. Ένα γράφημα είναι διμερές αν-ν δεν έχει περιττό κύκλο.
- **Απόδειξη**.

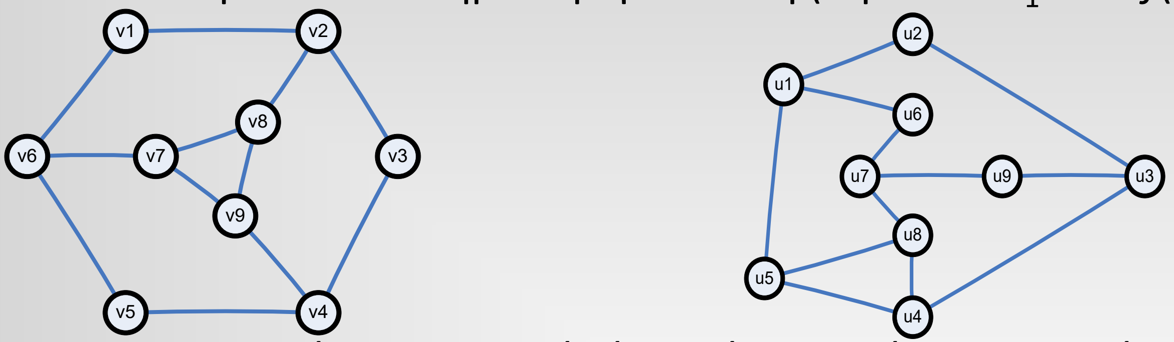




  - **Αναγκαίο**. Ένας κύκλος έχει κορυφές που εναλλάσσονται μεταξύ του συνόλου A και του B. Προφανώς έχει άρτιο μήκος.
  - **Ικανό**. Αρκεί να δείξουμε ότι ένα γράφημα του οποίου όλοι οι κύκλοι είναι άρτιοι είναι διχρωματικό. Επιλέγουμε μια κορυφή u_1 και την χρωματίζουμε π.χ. κόκκινη. Στην συνέχεια έναν γείτονα της u_2 μπλε, μετά γείτονα του γείτονα κόκκινο κ.ο.κ. Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται μέχρις ότου βρούμε κορυφή γειτονική κάποιας ήδη χρωματισμένης. Όμως δεν μπορεί να υπάρχει σύγκρουση όπως στο σχήμα γιατί τότε το μήκος του ήδη χρωματισμένου μονοπατιού u_1-w είναι άρτιο όπως και το «τόξο» $u_1, u_2, \ldots, u_k$. Τότε όμως αυτά τα δύο μονοπάτια μαζί με την ακμή $u_k w$ δίνουν περιττό κύκλο, άτοπο. Παρόμοια όταν η w είναι μπλε, δεν μπορεί και η u_k να είναι μπλε.

Ισομορφισμός γραφημάτων

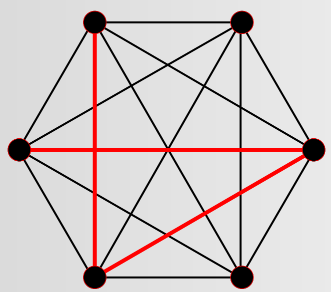
- Δύο γραφήματα $G_1=(V_1, E_1)$ και $G_2=(V_2, E_2)$ λέγονται ισομορφικά αν υπάρχει f: $V_1 \rightarrow V_2$, ένα-προς-ένα και επί η οποία διατηρεί την γειτνίαση (δηλ. $vu \in E_1$ αν-ν $f(u)f(v) \in E_2$).

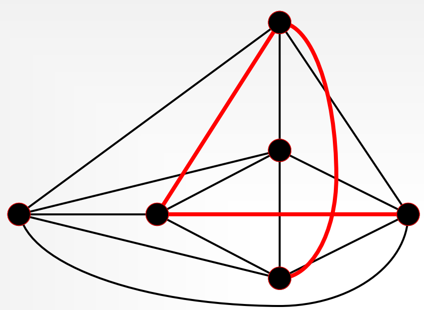


- **Παρατηρήσεις**. Διαισθητικά, ισομορφικά είναι δύο γραφήματα που είναι τα ίδια αλλά με διαφορετικές ονομασίες στις κορυφές τους.
  - Λόγω του παραπάνω όλες οι σημαντικές ιδιότητες των γραφημάτων (πλήθος κορυφών και ακμών, βαθμοί κορυφών, συνεκτικότητα, κύκλοι Euler, Hamilton κλπ.), διατηρούνται στον ισομορφισμό. (Αναλλοίωτες ιδιότητες.)
  - Άρα μπορεί να δειχθεί ότι δύο γραφήματα ΔΕΝ είναι ισομορφικά αν βρεθεί μια αναλλοίωτη ιδιότητα που δεν είναι διατηρείται στα δύο γραφήματα.
  - Για να δειχθεί όμως ότι ΕΙΝΑΙ ισομορφικά, πρέπει να βρεθεί η αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία του ορισμού, πράγμα στην γενικότητά του υπολογιστικά δύσκολο. Δεν υπάρχει καλός χαρακτηρισμός για τον ισομορφισμό.

Ισομορφισμός γραφημάτων (συνέχεια…)

- Ο ισομορφισμός είναι σχέση ισοδυναμίας (απόδειξη).
- **Χρήσιμη παρατήρηση.** Αν δύο γραφήματα είναι ισομορφικά τότε και τα συμπληρωματικά τους είναι επίσης ισομορφικά (αποδείξτε το) και πολλές φορές είναι ευκολότερο να ελέγξουμε τα συμπληρωματικά (όταν τα δοθέντα έχουν πολλές ακμές).
- **Παράδειγμα**. Είναι τα παρακάτω γραφήματα ισομορφικά;

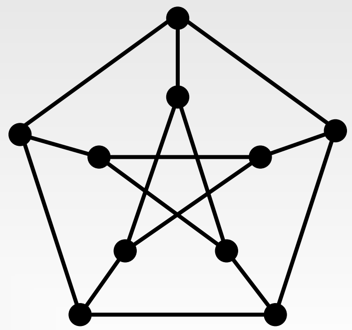


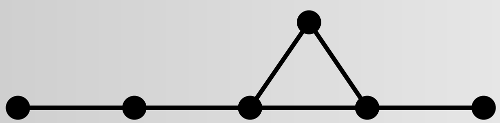


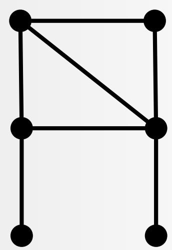
- Βρίσκουμε τα συμπληρωματικά τους (οι 6 κορυφές μαζί με τις κόκκινες ακμές). Είναι και τα δύο το P_3 και δύο απομονωμένες κορυφές. Προφανώς είναι ισομορφικά. Άρα και τα αρχικά είναι.

Αυτομορφισμοί

- Είναι ισομορφισμοί ενός γραφήματος με τον εαυτό του.
- Πάντα υπάρχει ο ταυτοτικός ισομορφισμός. Το πλήθος των διαφορετικών αυτομορφισμών εκφράζει πόσο «συμμετρικό» είναι το γράφημα.
- **Παραδείγματα**.
  - Ο κύκλος C_n έχει 2n αυτομορφισμούς.
  - Η κλίκα K_n έχει n! αυτομορφισμούς.
  - Το μονοπάτι P_n έχει 2.
  - Το γράφημα Petersen έχει 120.
  - Κάποια γραφήματα δεν έχουν κανένα αυτομορφισμό (πλην του ταυτοτικού).

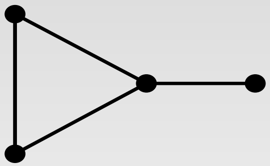






Μέτρηση ισόμορφων υπογραφημάτων

- Πόσα υπογραφήματα ισομορφικά με το παρακάτω υπάρχουν στο K_{20} αν όλες του οι κορυφές είναι διακεκριμένες;



- Επιλέγουμε με 20 τρόπους την κορυφή βαθμού 1.

Επιλέγουμε στη συνέχεια με C(19,3) το «τρίγωνο». Στη συνέχεια υπάρχουν 3 επιλογές για την κορυφή βαθμού 3. Σύνολο 10×17×18×19.

- Πόσους κύκλους μήκους 6 έχει το $K_{n,m}$ όπου όλες οι κορυφές είναι διακεκριμένες;
- Ένας κύκλος αποτελείται από 3 κορυφές του κάθε μέρους εναλλασσόμενες. Υπάρχουν 6 κύκλοι με αυτές τις κορυφές και C(n,3) × C(m,3) επιλογές των κορυφών. Σύνολο 6×C(n,3) ×C(m,3).