Συνδυαστική

Το Γενικευμένο Διωνυμικό Θεώρημα

Αντιστροφή Γεννήτριας Συνάρτησης

Ο γενικευμένος διωνυμικός συντελεστής

- Για κάθε ***πραγματικό αριθμό*** x και μη αρνητικό ακέραιο k ορίζουμε σαν

  $\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}{k!} = \frac{(x)_k}{k!}$. Ορίζουμε όταν k=0 $\binom{x}{k} = 1$.

  - Παρατηρήσεις: Η ποσότητα $(x)_k$ ονομάζεται καθοδικό παραγοντικό k τάξης.
  - Όταν x ακέραιος τότε$(x)_k = 0$ για k>x. Ομοίως $\binom{x}{k} = 0$ για k>x

- Η ποσότητα $\binom{x}{k}$ ονομάζεται γενικευμένος διωνυμικός συντελεστής

- Ισχύει ότι $\binom{-n}{k} = (-1)^k\binom{n+k-1}{k}$

  - **Απόδειξη:** $\binom{-n}{k} = \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!} = (-1)^k\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)}{k!} =$ $(-1)^k\binom{n+k-1}{k}$

Ο γενικευμένος διωνυμικός συντελεστής (παραδείγματα)

- Να δειχθεί ότι $\binom{-\frac{1}{2}}{k} = (-1)^k 2^{-2k}\binom{2k}{k}$ για k θετικό ακέραιο.
  - $\binom{-\frac{1}{2}}{k} = (-1)^k\binom{\frac{1}{2}+k-1}{k} = (-1)^k\binom{k-\frac{1}{2}}{k} = (-1)^k\frac{(k-\frac{1}{2})(k-\frac{3}{2})\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}{k!} =$
    $(-1)^k 2^{-k}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{k!} = (-1)^k 2^{-k}\,\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots 2k}{2\cdot 4\cdots 2k\cdot k!} = (-1)^k 2^{-k}\,\frac{(2k)!}{2^k\cdot k!\cdot k!} = (-1)^k 2^{-(2k)}\binom{2k}{k}$

- Για x πραγματικό και k θετικό ακέραιο ισχύουν οι σχέσεις
  - $k\binom{x}{k} = x\binom{x-1}{k-1}, \mathrm{k} > 1$
  - $\binom{x}{k} = \frac{x-k+1}{k}\binom{x}{k-1}, k \geq 1$
  - $\binom{x}{k} = \frac{x}{x-k}\binom{x-1}{k}, k \geq 0 \text{ και } \mathrm{x} \neq k$
  - $\binom{x}{k}\binom{k}{r} = \binom{x}{r}\binom{x-r}{k-r}, r \leq k$
  - $x\binom{x}{k} = (k+1)\binom{x}{k+1} + k\binom{x}{k} = k\binom{x+1}{k+1} + \binom{x}{k+1}$

Το γενικευμένο διωνυμικό θεώρημα

- Αν x,y με |x|<|y| είναι πραγματικοί αριθμοί και r πραγματικός, ισχύει το **Γενικευμένο Διωνυμικό Θεώρημα**:
- $(x+y)^r = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{r}{k}x^k y^{r-k}$ (προσοχή στο ότι η άθροιση γίνεται μέχρι το ∞)
- **Πόρισμα:** Αν |x|<1 και s πραγματικοί αριθμοί τότε ισχύει:
- $\frac{1}{(1-x)^s} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{s+k-1}{k}x^k$
- Παραδείγματα. Ποιος είναι ο συντελεστής του x^8 στην παράσταση $(3x^2+5)^{15}$;
  - $(3x^2+5)^{15} = \sum_{k=0}^{15}\binom{15}{k}(3x^2)^k 5^{15-k} = \sum_{k=0}^{15}\binom{15}{k}3^k 5^{15-k}x^{2k}$. Ο συντελεστής βρίσκεται όταν έχουμε k=4 και είναι $\binom{15}{4}3^4 5^{11}$.
- Ποιος είναι ο συντελεστής του x^8 στην παράσταση $(x+\frac{1}{x})^{14}$;
  - $(x+\frac{1}{x})^{14} = \sum_{k=0}^{14}\binom{14}{k}x^k\frac{1}{x^{14-k}} = \sum_{k=0}^{14}\binom{14}{k}x^{2k-14}$. Πρέπει το k να ικανοποιεί 2k-14=8 ή k=11. Άρα ο συντελεστής είναι $\binom{14}{11}$

Εύρεση της ακολουθίας από την ΓΣ

- Το γενικευμένο διωνυμικό θεώρημα βοηθά στην εύρεση της ακολουθίας που αντιστοιχεί σε δοθείσα ΓΣ.
- ΓΣ της μορφής $A(x) = \frac{b}{1-\lambda x}$ αντιστοιχούν σε ακολουθίες της μορφής $\alpha_n = b\lambda^n, n = 0,1,2,\ldots$
- ΓΣ της μορφής $A(x) = b/(1-\lambda x)^k$ (k πραγματικός)
- Έχουμε $A(x) = b(1-\lambda x)^{-k} = b\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-k}{n}(-1)^n\lambda^n x^n = b\sum_{n=0}^{\infty}\binom{k+n-1}{n}\lambda^n x^n$
- Άρα $\boldsymbol{\alpha_n = b\lambda^n\binom{k+n-1}{n} = b\lambda^n \frac{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)\cdots(k+n-1)}{n!}, n = 0,1,2,\ldots}$
- **Παράδειγμα:** Η ακολουθία που αντιστοιχεί στην ΓΣ $(1-4x)^{-1/2}$ είναι η $a_n = 4^n\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}}{n!} = \frac{2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!} = \frac{2^n\cdot n!\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!\cdot n!} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!\cdot n!} = \frac{(2n)!}{n!\cdot n!} = \binom{2n}{n}, n = 0,1,2,\ldots$

Εύρεση της ακολουθίας από την ΓΣ (συνέχεια)

- Ρητές συναρτήσεις, δηλ. ΓΣ της μορφής $A(x) = P(x)/Q(x)$ όπου $P(x)$ και $Q(x)$ πολυώνυμα.
- Αν έχουμε βρει την ακολουθία της $1/Q(x)$ τότε χρησιμοποιούμε την ιδιότητα της ολίσθησης και την γραμμική ιδιότητα για να βρούμε την ακολουθία της $A(x)$.
- Παράδειγμα $A(x) = \frac{2x^2-5x+4}{1-3x}$. Έχουμε $A(x) = 2\frac{x^2}{1-3x} - 5\frac{x}{1-3x} + \frac{4}{1-3x}$
  - Η ακολουθία της $\frac{1}{1-3x}$ είναι η $q_n = 3^n, n = 0,1,2, \ldots$
  - Η ακολουθία της $\frac{x^2}{1-3x}$ είναι η 0, 0, 1, 3, 3^2, 3^3,… (κανόνας ολίσθησης, 2 θέσεις)
  - Η ακολουθία της $\frac{x}{1-3x}$ είναι η 0, 1, 3, 3^2, 3^3, … (κανόνας ολίσθησης, 1 θέση)
  - Άρα η ακολουθία της $A(x)$ είναι η 4, $-5+4\cdot 3$, $2-5\cdot 3+4\cdot 3^2$, $2\cdot 3-5\cdot 3^2+4\cdot 3^3$, …
  - Αλλιώς: 4, 7, 23, … Γενικά $\alpha_0=4$, $\alpha_1=7$ και $\alpha_n=2\cdot 3^{n-2}-5\cdot 3^{n-1}+4\cdot 3^n$ για n=2,3,4,…

Εύρεση της ακολουθίας από την ΓΣ (συνέχεια)

- Όταν ο παρονομαστής Q(x) είναι γενικό πολυώνυμο του x κάνουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα.
- Θα περιοριστούμε στις περιπτώσεις που το Q(x) έχει πραγματικές ρίζες
- Έστω $A(x) = \frac{1}{x^2+x-2}$. Ποιά ακολουθία έχει ΓΣ την $A(x)$;
- Βρίσκουμε τις ρίζες του παρονομαστή: $x^2 + x - 2 = 0$. Είναι: $\rho_1 = 1, \rho_2 = -2$
- Άρα $\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$. Θέτουμε το κλάσμα στην μορφή $\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$. Πολλαπλασιάζοντας με $x - 1$ και θέτοντας x=1 παίρνουμε A=1/3. Πολλαπλασιάζοντας με $x + 2$ και θέτοντας x=-2 παίρνουμε B=-1/3
- Άρα $\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)x}$ (ώστε οι παρονομαστές να είναι της μορφής (1-λx))

Εύρεση της ακολουθίας από την ΓΣ (συνέχεια)

- Έχουμε λοιπόν ότι:
  - Η ακολουθία της $\frac{1}{1-x}$ είναι η $1, n = 0,1,2, \ldots$
  - Η ακολουθία της $\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)x}$ είναι η $\left(-\frac{1}{2}\right)^n, n = 0,1,2, \ldots$
- Άρα η ακολουθία της A(x) είναι $-\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n, n = 0,1,2, \ldots$
- Προσοχή όταν η πολλαπλότητα μιας ρίζας είναι μεγαλύτερη του 1.
- Παράδειγμα: Ποιά ακολουθία έχει ΓΣ την $A(x) = \frac{1}{x^3-3x-2}$;
  - Οι ρίζες είναι οι $\rho_1 = 2$ και $\rho_2 = -1$ με πολλαπλότητα 2
- Η ανάλυση σε απλά κλάσματα απαιτεί $\frac{1}{x^3-3x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$
  - Βρίσκουμε $A = \frac{1}{9},\ B = -\frac{1}{9}$ και $C = -\frac{1}{3}$
  - Άρα $A(x) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{x-2} - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x+1)^2}$

Εύρεση της ακολουθίας από την ΓΣ (συνέχεια)

- Η ΓΣ $\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)x}$ αντιστοιχεί στην ακολουθία $-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n, n = 0,1,2, \ldots$
- Η ΓΣ $\frac{1}{x+1} = \frac{1}{1-(-1)\cdot x}$ αντιστοιχεί στην ακολουθία $(-1)^n, n = 0,1,2, \ldots$
- Η ΓΣ $\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(1-(-1)\cdot x)^2}$ αντιστοιχεί στην ακολουθία $(-1)^n\binom{n+1}{n} = (-1)^n(n+1), n = 0,1,2, \ldots$
- Άρα η ακολουθία της A(x) είναι η:
- $-\frac{1}{18} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{9}(-1)^n - \frac{1}{3}(-1)^n(n+1), n = 0,1,2, \ldots$