Συνδυαστική

Γεννήτριες Συναρτήσεις
Ορισμοί-Ιδιότητες

Συνήθεις Γεννήτριες Συναρτήσεις

- Αναπαράσταση ακολουθιών:
  - Με γενικό (ή «κλειστό») τύπο $α_n$.
  - Αναδρομική σχέση.
  - Κωδικοποίηση σε δυναμοσειρά μιας (πραγματικής) μεταβλητής x.
- Γεννήτρια Συνάρτηση (ΓΣ) A(x) ακολουθίας **α**=$α_0$, $α_1$, $α_2$,… ορίζεται η δυναμοσειρά $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$
- Παρατηρήσεις
  - Συντελεστής του x^n αντιστοιχεί σε n-οστό όρο ακολουθίας **α**.
  - Αν η A(x) συγκλίνει για $x=x_0$ τότε συγκλίνει για κάθε x με $|x|<|x_0|$
  - Η ακτίνα σύγκλισης της σειράς R δίνεται από τον τύπο $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$
  - Επιλέγουμε λοιπόν διάστημα τιμών x ώστε η σειρά να συγκλίνει (**πάντα**!).
  - Έτσι θεωρούμε ότι A(x) άπειρα παραγωγίσιμη (αναλυτική). Παραγωγίζουμε/ολοκληρώνουμε την A(x) ως πεπερασμένο άθροισμα και η ακτίνα σύγκλισης της καινούργιας σειράς είναι η παλιά ακτίνα σύγκλισης.

Συνήθεις Γεννήτριες Συναρτήσεις (συνέχεια)

- Σημαντικές Παρατηρήσεις:
  - Κάθε ακολουθία **α** αντιστοιχεί σε μοναδική ΓΣ *A(x)*.
  - Η ΓΣ *A(x)* αντιστοιχεί σε μοναδική ακολουθία: $\alpha_n = \frac{1}{n!} A^{(n)}(0)$
- Πως δουλεύουμε:

Συνήθεις Γεννήτριες Συναρτήσεις - Παραδείγματα

- ΓΣ ακολουθίας 1, 1, 1, 1, ... : $1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots=1/(1-x)$ (για $|x|<1$)
- ΓΣ ακολουθίας $\alpha_n = b\,\lambda^n$, n=0,1,2,… : $b/(1-\lambda x)$ (για $|\lambda x|<1$)
- ΓΣ για πεπερασμένες ακολουθίες (υπόλοιποι όροι θεωρούνται 0).
  - ΓΣ ακολουθίας 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5: $x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6$
  - ΓΣ ακολουθίας $\alpha_k = C(n, k)$: $(1+x)^n, k = 0,1,2, \ldots$
- ΓΣ ακολουθίας $\alpha_n = n+1$, n=0,1,2,… :
- Ξεκινάμε από την $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \iff$ (παραγωγίζουμε σαν άθροισμα)

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' \iff \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

  - Άρα η ΓΣ της $\alpha_n=n+1$ είναι η $A(x) = 1/(1-x)^2$
- ΓΣ ακολουθίας $\beta_n = n$: $B(x) = x/(1-x)^2$
- Ακολουθία που αντιστοιχεί σε ΓΣ $A(x) = 5/(1-4x)$: $\alpha_n = 5 \cdot 4^n$, n=0,1,2,…

Ιδιότητες των γεννητριών συναρτήσεων

- **Γραμμική ιδιότητα**: Αν κ, λ σταθερές και $A(x)$ και $B(x)$ οι γεννήτριες συναρτήσεις των ακολουθιών α_n και β_n αντίστοιχα, τότε η ακολουθία $\delta_n = \kappa\, \alpha_n + \lambda\, \beta_n$ έχει ΓΣ συνάρτηση την $\Delta(x) = \kappa A(x) + \lambda B(x)$.
  - **Απόδειξη:** $\Delta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\kappa a_n + \lambda \beta_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \kappa a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda \beta_n x^n = \kappa A(x) + \lambda B(x)$

- **Ιδιότητα της ολίσθησης (δεξιά)**: Αν $A(x)$ η ΓΣ της ακολουθίας α_n, τότε η ΓΣ της ακολουθίας

$$\beta_n = \begin{cases} 0, \ \text{για}\ n = 0,1,2, \dots k-1 \\ \alpha_{n-k}\ \text{για}\ n = k, k+1, \dots \end{cases}$$

είναι η συνάρτηση $x^k A(x)$.
  - **Απόδειξη:** $\mathrm{B(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n = \sum_{n=0}^{k-1} \beta_n x^n + \sum_{n=k}^{\infty} \beta_n x^n = 0 + \sum_{n=k}^{\infty} \alpha_{n-k} x^n$. Θέτουμε $l = n - k$ οπότε έχουμε $\sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l x^{l+k} = x^k \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l x^l = x^k A(x)$.

Ιδιότητες των γεννητριών συναρτήσεων (συνέχεια)

- **Ιδιότητα της ολίσθησης (αριστερά)**: Η ακολουθία $\delta_n = a_{n+k}$, n=0,1,2,… έχει ΓΣ την $\Delta(x) = \left[A(x) - \sum_{n=0}^{k-1} \alpha_n x^n\right] x^{-k}$
  - **Απόδειξη:** $\Delta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} x^n = x^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} x^{n+k}$. Θέτουμε $l = n + k$ οπότε έχουμε $x^{-k} \sum_{l=k}^{\infty} a_l x^l = x^{-k}\left[\sum_{l=k}^{\infty} a_l x^l + \sum_{n=0}^{k-1} \alpha_n x^n - \sum_{n=0}^{k-1} \alpha_n x^n\right] = x^{-k}\left[\sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l x^l - \sum_{n=0}^{k-1} \alpha_n x^n\right] = x^{-k}\left[A(x) - \sum_{n=0}^{k-1} \alpha_n x^n\right]$.
- **Ιδιότητα μερικών αθροισμάτων**: Αν $A(x)$ η ΓΣ της ακολουθίας α_n και η ακολουθία β_n ορίζεται σαν $\beta_n = \sum_{r=0}^{n} \alpha_r$, τότε η ΓΣ της β_n είναι $B(x) = A(x)/(1-x)$.
  - **Απόδειξη:** Ισχύει ότι $\alpha_n = \beta_n - \beta_{n-1}$ για n=1,2,… Άρα:
  - $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{n-1} x^n$. Όμως $\alpha_0 = \beta_0$ και συνεπώς
  - $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{n-1} x^n$. Το τελευταίο άθροισμα όμως είναι η ακολουθία β_n ολισθημένη 1 θέση. Η ιδιότητα ολίσθησης δίνει:
  - $A(x) = B(x) - xB(x)$ από όπου έχουμε το ζητούμενο.

Ιδιότητες των γεννητριών συναρτήσεων

- **Ιδιότητα της κλίμακας (i)**: Αν $A(x)$ η ΓΣ της ακολουθίας α_n, τότε η ακολουθία $\beta_n = n\alpha_n$, n=0,1,2,… έχει ΓΣ την $B(x) = xA'(x)$.

  - **Απόδειξη:** $\mathrm{B(x)} =$ $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x^n)' \, x = x \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x^n)' =$
  - $x(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n)' = xA'(x)$

- **Ιδιότητα της κλίμακας (ii)** Αν $A(x)$ η ΓΣ της ακολουθίας α_n, η ακολουθία $\delta_n = \alpha_n/(n+1)$ έχει ΓΣ $\Delta(x) = \frac{1}{x}\int_0^x A(t)dt$.

  - **Απόδειξη:** $\Delta(\mathrm{x}) =$ $\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n+1} x^n = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^x t^n dt = \frac{1}{x}\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^n \, dt = \frac{1}{x}\int_0^x A(t)dt$

Ιδιότητες των γεννητριών συναρτήσεων (συνέχεια)

- **Ιδιότητα της συνέλιξης**: Η ακολουθία $\delta_n = \sum_{r=0}^{n} \alpha_r \beta_{n-r}$ ονομάζεται συνέλιξη των ακολουθιών α_n και β_n (την συμβολίζουμε με $\alpha_n * \beta_n$) και έχει ΓΣ $\Delta(x) = A(x)B(x)$ όπου $A(x)$ και $B(x)$ οι ΓΣ των ακολουθιών α_n και β_n αντίστοιχα.
  - Απόδειξη: Το δεύτερο μέλος είναι $A(x)B(x) = (\alpha_0 + \alpha_1 x + a_2 x^2 + \cdots)(\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots) = \alpha_0\beta_0 + (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0)x + (a_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0)x^2 + \cdots$
  - Όμως αυτή είναι η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας δ_n.
- **Παραδείγματα.** Ποια είναι η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας **α**=2, 5, 13, 35,…,2^n+3^n,…;
  - Έχουμε ότι $\alpha_n=2^n+3^n$, n=0,1,2,3,… . Άρα η A(x) είναι το άθροισμα των γεννητριών των ακολουθιών $\beta_n=2^n$ και $\gamma_n=3^n$, n=1,2,3,… Όμως B(x)=1/(1-2x) και Γ(x)=1/(1-3x). Άρα A(x)=1/(1-2x)+1/(1-3x)=(2-5x)/(1-5x+6x^2)
- Ποια είναι η ΓΣ της ακολουθίας $\alpha_n=n(n+1)/2$, n=0,1,2,…; Ποια της $\gamma_n=n^2$;
  - Παρατηρούμε ότι $\alpha_n=1+2+3+\cdots+n$. Αν β η ακολουθία $\beta_n=n$ τότε $\alpha_n = \sum_{r=0}^{n} \beta_r$. Συνεπώς $A(x) = B(x)/(1-x) = x/(1-x)^3$
  - Ισχύει ότι A(x)=Γ(n)/2+Β(n)/2. Λύνοντας $\Gamma(x)=x(1+x)/(1-x)^3$