Συνδυαστική

Άλλοι συνδυαστικοί τύποι

Διακριτή Πιθανότητα

Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού

Κυκλικές μεταθέσεις

- Έστω n διακεκριμένα αντικείμενα**. Τρόποι τοποθέτησης όλων των αντικειμένων σε κυκλική διάταξη** αν η αριστερόστροφη κατεύθυνση θεωρείται διαφορετική από τη δεξιόστροφη.
  - Καθώς διαγράφεται ο κύκλος με αρχή π.χ. το στοιχείο $α_1$ θα ξαναβρούμε το $α_1$ αφού συναντήσουμε ανάμεσα τα υπόλοιπα n-1 στοιχεία με κάποια σειρά. Άρα οι τρόποι είναι:

$$(n-1)!$$

  - Τρόποι τοποθέτησης 5 ανθρώπων σε κυκλικό τραπέζι: (5-1)!=4!
  - Διαφορετικοί κύκλοι Hamilton στο πλήρες γράφημα με n κορυφές: Σε μη κατευθυντικό γράφημα δύο κύκλοι θεωρούνται ίδιοι αν *με κάποια* φορά διαγραφής βρίσκουμε με την ίδια σειρά τις ίδιες κορυφές. Άρα οι κύκλοι Hamilton είναι (n-1)!/2.
  - Με πόσους τρόπους κάθονται n αγόρια και n κορίτσια σε ένα κυκλικό τραπέζι έτσι ώστε ανάμεσα από 2 αγόρια να κάθεται ένα κορίτσι;
  - Τοποθετούμε τα αγόρια θέση παρά θέση με (n-1)! τρόπους. Στην συνέχεια επιλέγουμε ένα κορίτσι με n τρόπους και το τοποθετούμε ανάμεσα από 2 αγόρια. Μετά το επόμενο με n-1 τρόπους κλπ. Σύνολο (n-1)!n!.

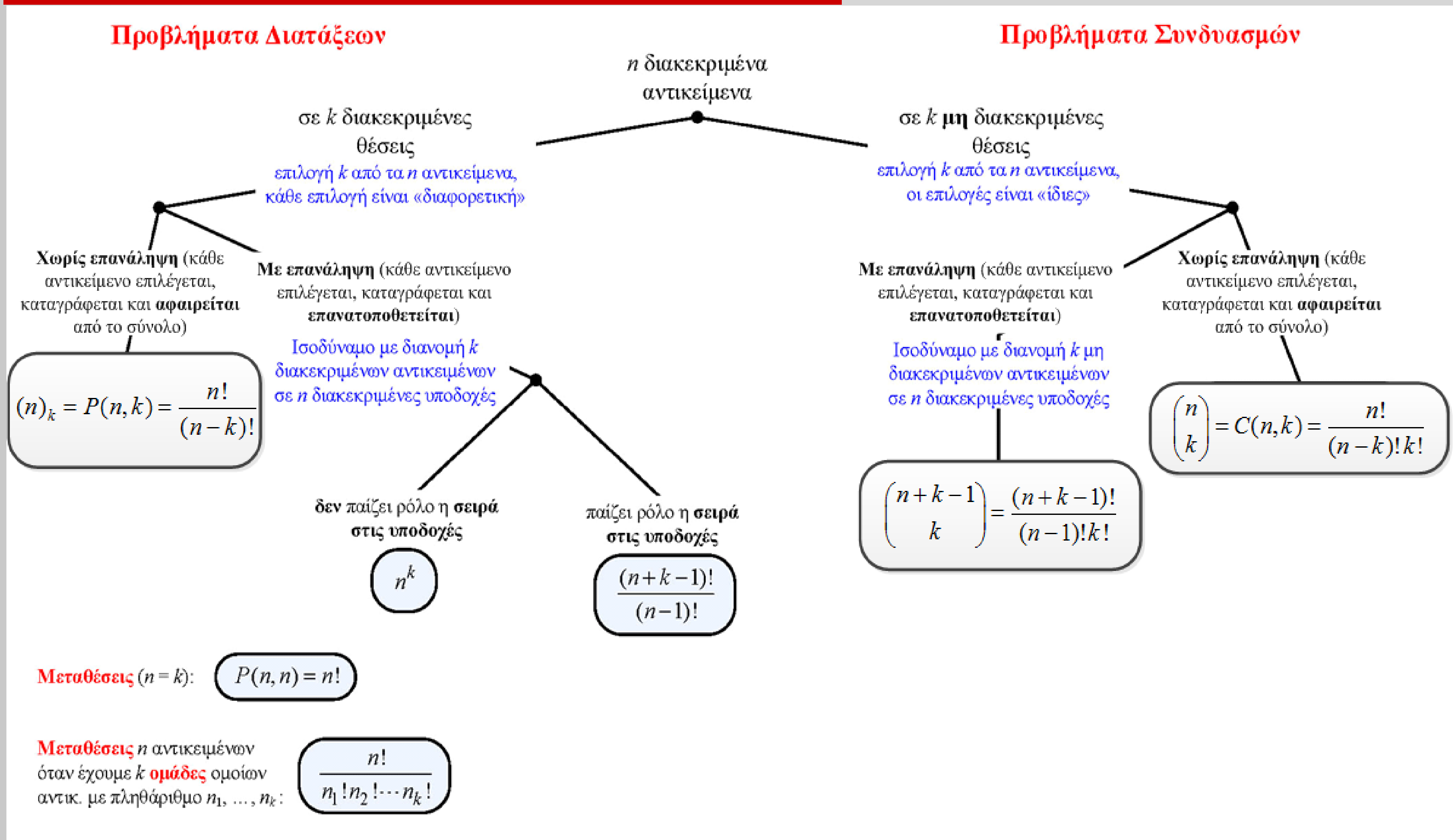
Διακεκριμένα αντικείμενα σε διακεκριμένες υποδοχές

- Διανομή **k διακεκριμένων αντικειμένων σε n διακεκριμένες υποδοχές** (με χωρητικότητα τουλάχιστον όλων των k αντικειμένων σε κάθε υποδοχή), όταν **η σειρά στις υποδοχές έχει σημασία.**
- Αν προς στιγμή αγνοήσουμε ότι τα αντικείμενα είναι διακεκριμένα τότε οι τρόποι διανομής είναι C(n+k-*1*, *k*). Σε *κάθε* τέτοια διανομή μπορούμε να μεταθέσουμε τα αντικείμενα χωρίς να αλλάζουμε τον αριθμό που είναι σε κάθε υποδοχή. Άρα κάθε διανομή από τις C(n+k-1,k) δίνει k! διανομές όπου *ποια* αντικείμενα είναι σε κάθε υποδοχή και με τι *σειρά* έχει σημασία. Συνολικά:

$$(n+k-1)_k = (n+1)(n+2)\cdots(n+k-1) = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}$$

  - Τρόποι τοποθέτησης 5 διαφορετικών βιβλίων σε 3 διακεκριμένα ράφια, αν έχει σημασία η σειρά των βιβλίων στα ράφια: $\frac{(3+5-1)!}{(3-1)!} = \frac{7!}{2!} = 2520$

Οι βασικές περιπτώσεις απαρίθμησης-Ανακεφαλαίωση



Κάποια ακόμη προβλήματα απαρίθμησης

- Αναφέρουμε (απλώς) κάποια ακόμη προβλήματα απαρίθμησης
- Με πόσους τρόπους μπορεί να **διαμεριστεί** ένα σύνολο με *n* στοιχεία σε *k* μη κενά υποσύνολα; Συμβολίζουμε τον αριθμό αυτό με S(*n,k*) και ονομάζεται **αριθμός Stirling δευτέρου είδους**.
  - Ισοδύναμο με την τοποθέτηση *n* διακεκριμένων μπαλών σε *k* μη διακεκριμένες υποδοχές.
- Πόσες είναι όλες οι διαμερίσεις ενός συνόλου με *n* στοιχεία σε μη κενά σύνολα; Συμβολίζουμε τον αριθμό αυτό με B(n) και ονομάζεται **n-οστος αριθμός Bell**. Προφανώς $B(n) = \sum_{i=0}^{n} S(n,i)$.
- Πόσες διαιρέσεις του φυσικού *n* σε ακριβώς *k* μη μηδενικούς φυσικούς υπάρχουν; Ο αριθμός αυτός συμβολίζεται με $p_k(n)$.
  - Ισοδύναμο με την τοποθέτηση n μη διακεκριμένων μπαλών σε k μη διακεκριμένες υποδοχές.
  - Ο αριθμός όλων των διαιρέσεων του n συμβολίζεται με $p(n)$.

Διακριτή Πιθανότητα

- **Δειγματικός χώρος** (ή **δειγματοχώρος**) ενός πειράματος τύχης είναι το σύνολο των αποτελεσμάτων που μπορούν να εμφανιστούν σε μία εκτέλεση του. Θα μας απασχολήσουν μόνο πεπερασμένοι δειγματικοί χώροι.
  - Δειγματοχώρος της ρίψης ενός ζαριού $\Omega_1=\{1,2,3,4,5,6\}$
  - Δειγματοχώρος της ρίψης ενός νομίσματος 2 φορές $\Omega_2=\{ КК, КГ, ГК, ГГ\}$
- Τα στοιχεία του δειγματοχώρου ονομάζονται **στοιχειώδη ενδεχόμενα**
- Ένα υποσύνολο ενός δειγματικού χώρου είναι ένα **ενδεχόμενο**.
  - Ενδεχόμενο «η ρίψη του ζαριού είναι άρτιος αριθμός» $A=\{2,4,6\}\subseteq\Omega_1$
- Ένα ενδεχόμενο **πραγματοποιείται** αν το αποτέλεσμα του πειράματος τύχης είναι στοιχειώδες ενδεχόμενο που περιλαμβάνεται στο ενδεχόμενο.
  - Αν η ρίψη του ζαριού φέρει 4 τότε το ενδεχόμενο A πραγματοποιήθηκε.
- Τα στοιχειώδη ενδεχόμενα που περιλαμβάνονται σε ένα ενδεχόμενο A λέγονται **ευνοϊκά** ενδεχόμενα ή αποτελέσματα του πειράματος για το ενδεχόμενο A.
  - Τα ευνοϊκά αποτελέσματα για το A είναι τα 2,4,6.

Διακριτή Πιθανότητα (συνέχεια…)

- Αν μετά από πολλές επαναλήψεις ενός πειράματος όλα τα δυνατά αποτελέσματα εμφανίζονται με την ίδια σχετική συχνότητα τότε λέμε ότι είναι **ισοπίθανα**. (Προσοχή! Πρόκειται για εμπειρικό ορισμό.)
- Ορίζουμε μια συνάρτηση *P* που ονομάζουμε **συνάρτηση πιθανότητας,** από το δυναμοσύνολο ενός δειγματοχώρου Ω στο [0,1] έτσι ώστε αν $A \subseteq \Omega$

$$P(A) = \frac{\text{αριθμός ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το A}}{\text{αριθμός αποτελεσμάτων στον Ω}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

- Παρατηρήσεις. Έστω $N=|\Omega|$, $\omega \in \Omega$ και $A, B \subseteq \Omega$.
  - $P(\{\omega\}) = \frac{1}{N}$
  - $P(\emptyset) = 0$ (το ∅ λέγεται και **αδύνατο** ενδεχόμενο)
  - $\sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = P(\Omega) = 1$ (το Ω λέγεται και **βέβαιο** ενδεχόμενο)
  - $0 \leq P(A) \leq 1$
  - Αν $A \cap B = \emptyset$, τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
  - Αν $A \cap B = \emptyset$ και $A \cup B = \Omega$, τότε $P(A) = 1 - P(B)$

Διακριτή Πιθανότητα (παραδείγματα)

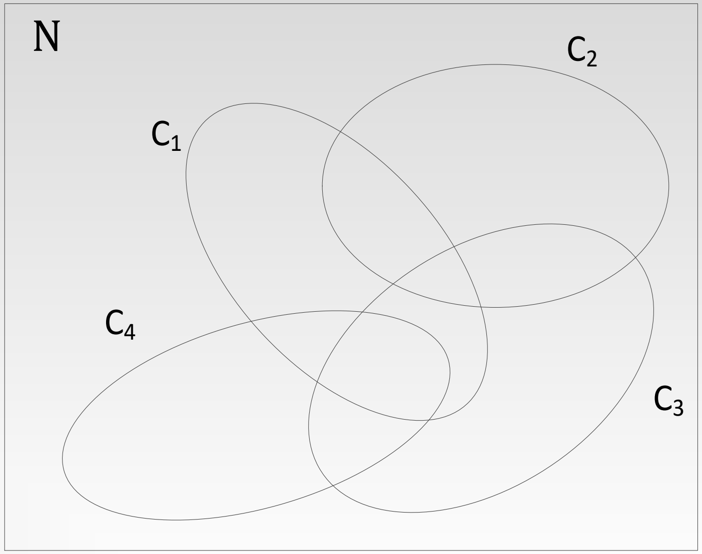
- Ρίψη 2 ζαριών. Δειγματοχώρος: Όλα τα 36 ζεύγη αριθμών από το 1 ως το 6.
  - Πιθανότητα για 6άρες στο τάβλι: 1/36.
  - Πιθανότητα για 6-5 στο τάβλι: 2/36.
  - Πιθανότητα για ίδιο αποτέλεσμα στα 2 ζάρια: 6/36 = 1/6.
- Ένα παιδί παίζει με (διαφορετικούς) κύβους που κάθε ένας έχει ένα ψηφίο από 1 έως 9 και με τυχαίο τρόπο σχηματίζει ένα τετραψήφιο αριθμό.
  - Ποια η πιθανότητα να σχηματιστεί ο αριθμός 7236;
    - Δειγματοχώρος Ω: όλοι οι αριθμοί με 4 διαφορετικά ψηφία 1..9. Προφανώς $|\Omega|=(9)_4=9!/5!=6*7*8*9=3024$
    - Ευνοϊκά αποτελέσματα: 1.
    - Άρα P=1/3024
  - Ποια η πιθανότητα να σχηματίσει αριθμό μικρότερο του 5000;
    - Δειγματοχώρος Ω: όπως και πριν
    - Ευνοϊκά αποτελέσματα: στο 1^{o} ψηφίο πρέπει να υπάρχει 1 ή 2 ή 3 ή 4 (4 επιλογές). Στα υπόλοιπα οι επιλογές είναι $(8)_3=6*7*8$. Σύνολο 4*6*7*8
    - Άρα P= 4*6*7*8/(6*7*8*9)=4/9

Παραδείγματα (συνέχεια…)

- Σε ένα ντουλάπι υπάρχουν 10 διαφορετικά ζευγάρια παπουτσιών. Αν επιλέξουμε τυχαία 8 παπούτσια, ποιά η πιθανότητα (i) να μην επιλέξουμε κανένα ζευγάρι παπουτσιών και (ii) ποιά η πιθανότητα να επιλέξουμε ένα ακριβώς ζευγάρι παπουτσιών;
  - Δειγματοχώρος: όλες οι επιλογές 8 παπουτσιών από τα 20. Άρα $|\Omega| = \binom{20}{8}$=125970
  - A: το ενδεχόμενο τα 8 παπούτσια να μην περιλαμβάνουν κανένα ζευγάρι
  - B: το ενδεχόμενο τα 8 παπούτσια να περιλαμβάνουν ακριβώς ένα ζευγάρι
  - Για το A: επιλέγουμε ένα παπούτσι (20 επιλογές), μετά ένα από άλλο ζεύγος (18 επιλογές), μετά ένα από τρίτο ζεύγος (16 επιλογές) κ.ο.κ. Όμως ο τρόπος αυτός υποθέτει διάταξη στην επιλογή. Πρέπει να διαιρεθεί συνεπώς με το 8! Άρα |A|=20×18×16×14×12×10×8×6/8!=**11520**
    - Άλλος τρόπος: Επιλέγουμε *k* αριστερά παπούτσια και 8-*k* από τα 10-*k* δεξιά για *k*=0,…,8
    - $\sum_{k=0}^{8}\binom{10}{k}\binom{10-k}{8-k} = \sum_{k=0}^{8}\frac{10!}{k!(8-k)!2!} = \sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}\frac{9\cdot 10}{2} = \frac{9\cdot 10}{2}2^8 = \mathbf{11520}$
  - Τελικά $P(A) = \frac{11520}{125970} = \mathbf{0.091}$
  - Αντίστοιχα στο (ii) επιλέγουμε το ζευγάρι (10 επιλογές), μετά το 3$^{\text{ο}}$ παπούτσι (18 επιλογές) κ.ο.κ. και στο τέλος διαιρούμε με 6! Συνεπώς |B|=10×18×16×14×12×10×8/6!=**53760**
  - Τελικά $P(B) = \frac{53760}{125970} = \mathbf{0.426}$

Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού

- Έστω σύνολο N. Κάθε στοιχείο του μπορεί να έχει ή όχι μία ή περισσότερες ιδιότητες $I_1, I_2,\ldots,I_t$.
- Έστω $C_1, C_2, \ldots, C_t$ τα αντίστοιχα υποσύνολα στοιχείων που έχουν την ιδιότητα.
- Έστω $\overline{C_1}, \overline{C_2}, \ldots, \overline{C_t}$ τα υποσύνολα που **δεν** έχουν την αντίστοιχη ιδιότητα.
- Συμβολίζουμε με C_iC_j την τομή των συνόλων C_i και C_j δηλαδή τα στοιχεία που έχουν και την ιδιότητα I_1 και την I_2.



- Ο αριθμός των στοιχείων που **δεν έχουν καμία από τις ιδιότητες $I_1, I_2,\ldots,I_t$** δίνεται από την **Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού**:

$$|\overline{C}_1\overline{C}_2\cdots\overline{C}_t| = |N| - |C_1| - \cdots - |C_t| + |C_1C_2| + \cdots + |C_{t-1}C_t| - |C_1C_2C_3| - |C_1C_2C_4| - \cdots + (-1)^t |C_1C_2\cdots C_t|$$
$$= N - \sum_{1\le i\le t} |C_i| + \sum_{i_1<i_2} |C_{i_1}C_{i_2}| - \sum_{i_1<i_2<i_3} |C_{i_1}C_{i_2}C_{i_3}| + \cdots + (-1)^t |C_1C_2\cdots C_t|$$

Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού (συνέχεια)

- **Απόδειξη:** Έστω x ϵ N.
  - Αν το x δεν έχει καμία από τις ιδιότητες $I_1, I_2, \ldots, I_t$ τότε ανήκει στα σύνολα $\overline{C_1}, \overline{C_2}, \ldots$ και μετριέται μία φορά στο αριστερό μέλος. Στο δεξί περιλαμβάνεται μόνο στο N γιατί όλοι οι άλλοι προσθετέοι αφορούν σύνολα με μία τουλάχιστον ιδιότητα. Άρα και στο δεξί μετριέται μόνο μία φορά (στο |N|).
  - Αν το x έχει ακριβώς *r* από τις ιδιότητες $I_1, I_2, \ldots, I_t$ $1 \le r \le t$ τότε δεν ανήκει στο αριστερό σύνολο και δεν μετριέται καμία φορά στο αριστερό μέλος. Στο δεξί ανήκει στα αντίστοιχα σύνολα (και σε κάθε συνδυασμό τομών τους) αλλά σε καμία τομή με άλλο σύνολο άλλης ιδιότητας. Άρα στο δεξί μέλος μετριέται σε κάθε συνδυασμό τομών που περιλαμβάνουν οποιαδήποτε ομάδα από τα *r* σύνολα C των αντίστοιχων ιδιοτήτων (και κανένα άλλο σύνολο). Δηλαδή:

$$1 - r + \binom{r}{2} - \cdots \qquad \binom{r}{r} = (1-1)^r = 0$$

- Επομένως τα δύο μέλη είναι ίσα.

Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού (παραδείγματα)

- Ανάμεσα σε 250 φοιτητές, 148 επέλεξαν μαθηματικά, 146 φυσική και 115 χημεία. Μαθηματικά και φυσική επέλεξαν 81 φοιτητές, μαθηματικά και χημεία 72 και φυσική και χημεία 75. Και τα 3 μαθήματα επέλεξαν 47 φοιτητές. Πόσοι φοιτητές δεν επέλεξαν κανένα από τα 3 μαθήματα; Πόσοι επέλεξαν μόνο μαθηματικά και πόσοι μόνο ένα μάθημα;
- Συμβολίζουμε τα αντίστοιχα σύνολα με μ, φ, χ. Άρα $|\mu|=148$, $|\varphi|=146$, $|\chi|=115$, $|\mu\varphi|=81$, $|\mu\chi|=72$, $|\varphi\chi|=75$, $|\mu\varphi\chi|=47$. Η αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού δίνει:
- $|\overline{\mu}\overline{\varphi}\overline{\chi}|=N-|\mu|-|\varphi|-|\chi|+|\mu\varphi|+|\mu\chi|+|\varphi\chi|-|\mu\varphi\chi|=250-148-146-115+81+72+75-47=\mathbf{22}$
- Επίσης ισχύει $|\overline{\varphi}\overline{\chi}|=N-|\varphi|-|\chi|+|\varphi\chi|=250-146-115+75=64$
  - Άρα μόνο μαθηματικά επέλεξαν 64-22=**42**
- Ισχύει $|\overline{\mu}\overline{\chi}|=N-|\mu|-|\chi|+|\mu\chi|=250-148-115+72=59$
  - Άρα μόνο φυσική επέλεξαν 59-22=37
- $|\overline{\mu}\overline{\varphi}|=N-|\mu|-|\varphi|+|\mu\varphi|=250-148-146+81=37$
  - Άρα μόνο χημεία επέλεξαν 37-22=15
- Μόνο ένα μάθημα επέλεξαν 42+37+15=**94**

Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού (παραδείγματα, συνέχεια)

- Αριθμός Stirling δευτέρου είδους ($S(n, k)$ ή και $\left\{ {n \atop k} \right\}$) = Αριθμός τρόπων που διαμερίζεται ένα σύνολο n στοιχείων σε k μη κενά, μη διακεκριμένα υποσύνολα.
  «Μη διακεκριμένα» σημαίνει ότι κάθε υποσύνολο είναι ανώνυμο και χαρακτηρίζεται μόνο από τα στοιχεία που περιλαμβάνει.
- Υπολογισμός. Αρχικά αριθμούμε τα k υποσύνολα από το 1 έως το k. Αν δεν υπήρχε η απαίτηση να είναι μη κενά, οι τρόποι θα ήταν προφανώς k^n. Έστω $c_i, 1 \le i \le k$ το σύνολο των διαμερίσεων όπου το i υποσύνολο είναι κενό. Προφανώς $|c_i| = (k-1)^n$, $|c_i c_j| = (k-2)^n, i \neq j$ κλπ. Από την αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού έχουμε:
- $|\overline{c_1}\,\overline{c_2} \cdots \overline{c_k}| = k^n - k \cdot (k-1)^n + \binom{k}{2}(k-2)^n - \cdots + (-1)^k \binom{k}{k}(k-k)^n =$ $\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n = (\text{θέτουμε } j = k-i) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n$
- Επειδή όμως τα σύνολα δεν είναι διακεκριμένα έχουμε τελικά:

$$S(n,k) = \left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n$$