Συνδυαστική

Συνδυασμοί.

Μεταθέσεις ομάδων όμοιων αντικειμένων.

Διατάξεις και Συνδυασμοί με επανάληψη

Συνδυασμοί

- Έστω σύνολο A={$α_1$,$α_2$,…$α_n$} n αντικειμένων. Ένας *συνδυασμός των n στοιχείων του συνόλου ανά k* είναι μία επιλογή k στοιχείων του A (χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά).
- **Ισοδύναμα**: Είναι ένα k-μελες υποσύνολο του A.
- Το πλήθος των διαφορετικών συνδυασμών των στοιχείων ενός n-μελους συνόλου ανά k συμβολίζεται με $\binom{n}{k}$ (και λέγεται διωνυμικός συντελεστής) ή C(*n,k*) (C από τον αγγλικό όρο combination).
- **Συνδυασμοί C(n, k):** Διαμερίζουμε το σύνολο των διατάξεων n αντικειμένων ανά k σε σύνολα όπου κάθε ένα περιλαμβάνει τις διατάξεις με το ίδιο υποσύνολο k στοιχείων του A. Κάθε σύνολο περιλαμβάνει k! διατάξεις. Άρα το πλήθος των συνόλων της διαμέρισης είναι $(n)_k$/k!. Συνεπώς:

$$C(n,k)=\binom{n}{k}=\frac{(n)_k}{k!}=\frac{n!}{(n-k)!k!}=\binom{n}{n-k}=C(n,n-k)$$

Συνδυασμοί (παραδείγματα)

- Πλήθος υποσυνόλων με k στοιχεία από σύνολο n στοιχείων:
  - C(n, k)=$\binom{n}{k}$
- Τρόποι στελέχωσης 5μελούς κοινοβουλευτικής επιτροπής, όπου μέλη ισότιμα:
  - C(300, 5)
- Πλήθος δυαδικών συμβ/ρών μήκους 32 με (ακριβώς) επτά 1:
  - C(32, 7)
- Τρόποι συμπλήρωσης στήλης ΤΖΟΚΕΡ
  - C(45, 5)x20
- Διαφορετικές 5-αδες χαρτιών από μια τράπουλα με 52 χαρτιά
  - C(52,5)
- Μια επιτροπή επιλέγεται από 7 γυναίκες και 4 άνδρες. Πόσες επιτροπές μπορούν να γίνουν όταν:
  - Η επιτροπή είναι 5-μελής από 3 γυναίκες και 2 άνδρες.
  - C(7,3)*C(4,2)
  - Έχει αυθαίρετο αριθμό μελών αλλά ίσο αριθμό ανδρών και γυναικών.

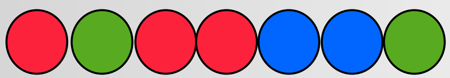
    C(7,1)*C(4,1)+C(7,2)*C(4,2)+C(7,3)*C(4,3)+C(7,4)*C(4,4)

Μερικές ιδιότητες του διωνυμικού συντελεστή

- Ο αριθμός των υποσυνόλων ενός συνόλου με n στοιχεία είναι 2^n
- Επαγωγή στο n.
  - **Βάση** της επαγωγής για n=0. Σύνολο με 0 στοιχεία έχει $2^0=1$ υποσύνολο. Ισχύει (είναι το κενό σύνολο που έχει 1 υποσύνολο, τον εαυτό του).
  - **Υπόθεση**. Έστω ότι για n>0 ένα σύνολο με n στοιχεία έχει 2^n υποσύνολα.
  - **Βήμα**. Έστω Α σύνολο με n+1 στοιχεία. Έστω α ∈Α. Τα υποσύνολα του Α διαμερίζονται σε αυτά που δεν περιλαμβάνουν το α και σε αυτά που το περιλαμβάνουν. Τα πρώτα είναι τα υποσύνολα του Α-{α} που έχει n στοιχεία και άρα (ΕΥ) είναι 2^n υποσύνολα. Τα δεύτερα κατασκευάζονται από τα πρώτα με την προσθήκη του α. Άρα είναι επίσης 2^n. Συνολικά τα υποσύνολα του Α είναι $2^n+2^n=2^{n+1}$. Ό.ε.δ.
- Πόρισμα: $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$
  - $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$
  - $\binom{n}{k}=\frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k}$ για $1\leq k<n$
  - $n\binom{n}{k}=(k+1)\binom{n}{k+1}+k\binom{n}{k}=k\binom{n+1}{k+1}+\binom{n}{k+1}$

Μεταθέσεις ομάδων όμοιων αντικειμένων

- Έστω ότι έχουμε 3 μπάλες κόκκινου χρώματος, 2 μπάλες πράσινου χρώματος και 2 μπάλες μπλε χρώματος.
- Αναζητούμε τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε και τις 7 μπάλες σε μια σειρά. Είναι πρόβλημα μεταθέσεων όπου όμως τα αντικείμενα χωρίζονται σε ομάδες μη διακεκριμένων αντικειμένων.
  - Ένας από τους τρόπους φαίνεται στη συνέχεια:



  - Επιλέγουμε τις 3 θέσεις των κόκκινων μπαλών από τις 7 συνολικά θέσεις. Από τις υπόλοιπες 5 επιλέγουμε τις 2 των μπλε. Οι πράσινες στην συνέχεια τοποθετούνται με 1 μόνο τρόπο. Εφαρμογή τύπου συνδυασμών και κανόνα γινομένου:

$$C(7,3) \times C(4,2) \times C(2,2) = \frac{7!}{3!2!2!}$$

Μεταθέσεις με Ομάδες (Γενίκευση-Παραδείγματα)

- Έστω n αντικείμενα που απαρτίζουν k ομάδες όμοιων αντικειμένων με πληθάριθμους $n_1, n_2, \ldots, n_k$ αντίστοιχα. Πρέπει να ισχύει $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$
- **Μεταθέσεις ομάδων όμοιων αντικειμένων**: Το πλήθος των διαφορετικών τρόπων τοποθέτησης του συνόλου των αντικειμένων σε μια σειρά:

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}{n_k} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{n_1}!\,\boldsymbol{n_2}!\cdots\boldsymbol{n_k}!}$$

- Πλήθος συμβολοσειρών μήκους 24 από 7Α, 8Β, 5Γ και 4Δ:
  - Αν πρώτο και τελευταίο γράμμα είναι Α: 22!/(5!8!5!4!)
  - Αν δεν πρέπει να εμφανίζεται η συμβολοσειρά ΔΔΔΔ: 24!/(7!8!5!4!) – 21!/(7!8!5!1!)
- Τρόποι τακτοποίησης 10 ατόμων σε 4 διακεκριμένες καμπίνες: 4κλινη, 3κλινη, 2κλινη, 1κλινη.
  - Μεταθέσεις 4 Α, 3 Β, 2 Γ, 1 Δ (εισιτηρίων) σε 10 διακεκριμένες θέσεις (άτομα).
  - Μεταθέσεις με ομάδες αντικειμένων: 10!/(4!3!2!1!).

Διατάξεις με επανάληψη

- Έστω σύνολο $A=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n\}$ n αντικειμένων. Μία *διάταξη των n στοιχείων του συνόλου ανά k με επανάληψη,* είναι μία διατεταγμένη *k*-αδα από στοιχεία του A τα οποία όμως *δεν είναι αναγκαίο* να είναι διαφορετικά.
- **Εναλλακτικά**, μία διάταξη *n* ανά *k* με επανάληψη, δημιουργείται σε *k* βήματα. Στο 1^o βήμα επιλέγουμε από τα n στοιχεία του A το 1^o στοιχείο της διάταξης. Οι δυνατότητες είναι *n*. Στην συνέχεια **καταγράφουμε** το στοιχείο που επιλέξαμε και το **επανατοποθετούμε** πίσω στο σύνολο. Στο 2^o βήμα επιλέγουμε πάλι από τα *n* στοιχεία του A το 2^o στοιχείο της διάταξης. Οι δυνατότητες είναι πάλι *n*. Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία για k βήματα. Ο κανόνας του γινομένου δίνει:
- $n \times n \times \cdots \times n = n^k$
  - Πλήθος πενταψήφιων δεκαδικών συμβολοσειρών: 10^5
  - Πλήθος τετραψήφιων δεκαδικών αριθμών (που δεν αρχίζουν από 0): $9\times10\times10\times10 = 9000$.
  - Πλήθος διαφορετικών υποσυνόλων ενός συνόλου A: $2^{|A|}$ ($|A|$ στοιχεία σε 2 «υποδοχές»: ανήκει – δεν ανήκει στο υποσύνολο).

Συνδυασμοί με επανάληψη

- Έστω σύνολο Α={$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$} n αντικειμένων. Ένας *συνδυασμός των n στοιχείων του συνόλου ανά k* με επανάληψη, είναι μία επιλογή k στοιχείων του Α (χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά) και όπου δεν είναι αναγκαίο να είναι όλα τα στοιχεία διαφορετικά.
- **Ισοδύναμα**: Επιλέγουμε ένα στοιχείο του Α, το **καταγράφουμε** και το επανατοποθετούμε. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία k φορές. Α**γνοούμε την σειρά** που καταγράφηκαν τα k στοιχεία. Μόνο **ποια** στοιχεία επιλέχθηκαν και **πόσες φορές** το κάθε ένα, έχει σημασία.
- Παραδείγματα.
  - Ρίψη 2 όμοιων ζαριών. Α ={1,2,3,4,5,6} και επιλέγουμε 2 στοιχεία του με επανάληψη. Το 3 π.χ. μπορεί να εμφανιστεί και τις 2 φορές.
  - Διανομή 10 όμοιων μπαλών σε 3 παιδιά. Α είναι το σύνολο των 3 παιδιών και επιλέγουμε 10 από αυτά με επανάληψη. Στην 10-αδα ένα παιδί εμφανίζεται από 0 έως και 10 φορές.

Συνδυασμοί με επανάληψη (συνέχεια…)_

- **Παρατήρηση**. Ένας συνδυασμός ενός συνόλου Α n στοιχείων ανά k με επανάληψη, είναι ισοδύναμος με την τοποθέτηση k πανομοιότυπων μπαλών σε n διακεκριμένες «υποδοχές».
- Κάθε υποδοχή αντιστοιχεί σε ένα στοιχείο του Α και το πόσες μπάλες τοποθετήθηκαν σε κάθε υποδοχή μας υποδηλώνει πόσες φορές επιλέχτηκε το αντίστοιχο στοιχείο. (Από 0 έως και k.)
- Παράδειγμα όπου το $1^{ο}$ παιδί πήρε 5 μπάλες, το $2^{ο}$, 2 και το $3^{ο}$ 3 μπάλες.

Πρώτο Παιδί	Δεύτερο παιδί	Τρίτο παιδί
● ● ● ● ●	● ●	● ● ●

Συνδυασμοί με επανάληψη (συνέχεια…)

- Αντίστοιχη πληροφορία με την προηγούμενη εικόνα παίρνουμε αν παραστήσουμε τις μπάλες με 0 και τα «χωρίσματα» ανάμεσα από κάθε υποδοχή με 1. Η διανομή προηγουμένως παριστάνεται σαν 000001001000.
- Αντίστροφα μια οποιαδήποτε συμβολοσειρά με 10 0 και 2 1 παριστάνει μια διανομή των 10 μπαλών σε 3 παιδιά. Π.χ. η 000110000000 παριστάνει την διανομή όπου το 1^{ο} παιδί πήρε 3 μπάλες, το 2^{ο} καμία και το 3^{ο} 7 μπάλες.
- Άρα υπάρχει 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των διαφορετικών τρόπων διανομής 10 μπαλών σε 3 παιδιά και των συμβολοσειρών μήκους 12 με 10 μηδενικά και 2 άσσους.
- Γενικότερα οι τρόποι διανομής k μη διακεκριμένων μπαλών σε n διακεκριμένες υποδοχές είναι όσοι και οι συμβολοσειρές μήκους n+k-1 με k μηδενικά και n-1 άσσους.

Συνδυασμοί με επανάληψη (συνέχεια…)

- **Συμπέρασμα.** Οι συνδυασμοί με επανάληψη n στοιχείων ανά k είναι όσοι και οι τρόποι διανομής k μη διακεκριμένων μπαλών σε n διακεκριμένες υποδοχές και όσες οι συμβολοσειρές μήκους n+k-1 με k μηδενικά και n-1 άσσους. Δηλαδή:

$$C(n+k-1,k) = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}$$

- **Παραδείγματα**.
  - Διαφορετικά αποτελέσματα από ρίψη 2 όμοιων ζαριών:
    - C(6+2-1,2)=21
  - Διανομή 10 όμοιων μπαλών σε 3 διακεκριμένα παιδιά:
    - C(3+10-1,10)=C(12,10)

Συνδυασμοί με επανάληψη (παραδείγματα)

- Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν 10 διακεκριμένοι φοιτητές σε μια σειρά καθισμάτων ενός αμφιθεάτρου που έχει 40 αριθμημένες θέσεις αν πρέπει οπωσδήποτε ανάμεσα από δύο φοιτητές να υπάρχει τουλάχιστον ένα κενό κάθισμα;
  - Αγνοούμε ότι οι φοιτητές είναι διακεκριμένοι και κατασκευάζουμε μία ακολουθία από 40 καθίσματα όπου καθορίζουμε τις θέσεις των 10 φοιτητών. Τοποθετούμε τα 10 καθίσματα των φοιτητών και ανάμεσα τους τοποθετούμε 9 κενά. Απομένουν 21 που πρέπει να διανεμηθούν χωρίς περιορισμούς στα 9 διαστήματα μεταξύ των φοιτητών και στην αρχή και στο τέλος (11 σύνολο).
  - Πρόκειται για διανομή 21 μη διακεκριμένων σφαιρών σε 11 διακεκριμένες υποδοχές. Οι τρόποι είναι C(21+10-1, 21)=C(31,21).
  - Όμως οι φοιτητές είναι διακεκριμένοι και σε *κάθε* τέτοια τοποθέτηση μπορούν να καθίσουν στις 10 θέσεις τους με 10! τρόπους.
  - Σύνολο: $\binom{31}{21}10! = \frac{31!}{21!}$

Συνδυασμοί με επανάληψη (παραδείγματα)

- **Σημαντική εφαρμογή.** Πόσες είναι οι μη αρνητικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης:

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k,\;\; x_i \geq 0, \text{ακέραιος}\;\; i = 1, \ldots, n}$$

- Οι k μονάδες του 2ου μέλους πρέπει να διανεμηθούν στις n μεταβλητές χωρίς περιορισμούς. Άρα οι λύσεις είναι:
- C(n+k-1,k)
- Αν θέλουμε θετικές ακέραιες λύσεις, δηλαδή $x_i>0$, i=1,…,n (για k≥n) διανέμουμε 1 μονάδα σε κάθε x_i και βρίσκουμε τις μη αρνητικές λύσεις της εξίσωσης:

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k - \;n \;\;\; x_i \geq 0, \text{ακέραιος}\;\; i = 1, \ldots, n}$$

- Όπως παραπάνω είναι
- C(k-1,k-n)