Συνδυαστική

Απαρίθμηση χωρίς μέτρηση

Πολλαπλασιαστική και Προσθετική Αρχή

Μεταθέσεις-Διατάξεις

Εισαγωγή
Το Αντικείμενο της Συνδυαστικής

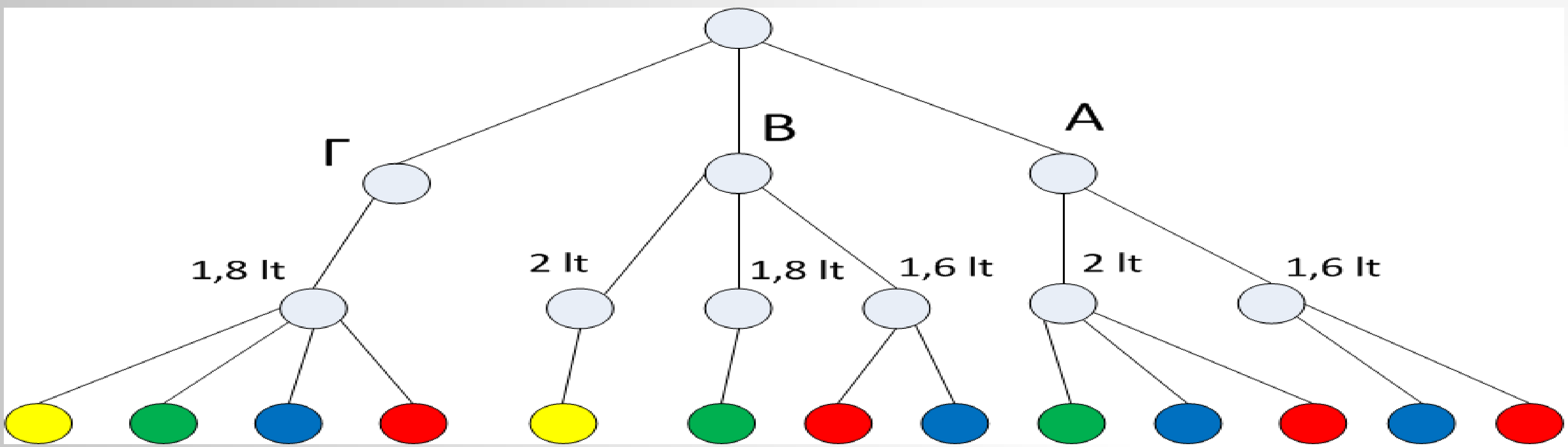
- Η εύρεση του πληθαρίθμου συνόλων ή υποσυνόλων τους με συγκεκριμένες ιδιότητες
- Αυτή μπορεί να γίνει με πλήρη καταγραφή των στοιχείων των συνόλων όταν οι πληθάριθμοι τους είναι μικροί
- Η συνδυαστική περιλαμβάνει μεθόδους απαρίθμησης χωρίς την πλήρη καταγραφή των στοιχείων των συνόλων. Απαραίτητες όταν οι πληθάριθμοι είναι μεγάλοι.
- Θα μελετήσουμε ορισμένα βασικά προβλήματα απαρίθμησης
- Συνήθως μιλάμε για «ενδεχόμενα», «αποτελέσματα πειράματος», «αριθμός επιλογών» κλπ.
- Ένα πραγματικό πρόβλημα συνήθως δεν εντάσσεται σε ένα από τα τυποποιημένα προβλήματα , αλλά είναι συνδυασμός τους. Η δυσκολία είναι να τα αναγνωρίσουμε και να τα συνδυάσουμε σωστά.

Η απευθείας απαρίθμηση

- Εφαρμόζεται μόνο όταν των πλήθος των στοιχείων του συνόλου είναι μικρό.
- **Παράδειγμα.** Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε στη σειρά 3 διαφορετικά βιβλία σε ένα ράφι;
- Σε ένα τέτοιο πρόβλημα είναι κρίσιμο να καθορίσουμε σαφώς τι σημαίνει «διαφορετικός τρόπος» (ή εξαγόμενο πειράματος κλπ). Δηλαδή να καθορίσουμε με σαφήνεια τα στοιχεία του συνόλου που απαριθμούμε.
- Έτσι εδώ θεωρούμε διαφορετικούς δύο τρόπους αν καθώς βλέπουμε το ράφι από αριστερά προς τα δεξιά, ένα τουλάχιστον βιβλίο βρίσκεται σε διαφορετική θέση.
- Έτσι εδώ στην $1^{η}$ θέση μπορούμε να έχουμε το μπλε βιβλίο οπότε στην $2^{η}$ το κόκκινο και στην $3^{η}$ το πράσινο ή ανάποδα (2 τρόποι). Το κόκκινο στην $1^{η}$ οπότε τα άλλα 2 με 2 τρόπους. Και άλλους 2 με το πράσινο στην $1^{η}$. Σύνολο 6

Τα δενδροδιαγράμματα

- Όταν για μια επιλογή υπάρχουν πολλές άλλες και για κάθε μία από αυτές υπάρχει αριθμός άλλων επιλογών, τότε είναι εύκολο να παραληφθούν ή να διπλομετρηθούν κάποια ενδεχόμενα. Η διαδικασία της απαρίθμησης μπορεί να διευκολυνθεί με τα **δενδροδιαγράμματα**.
- Π.χ. Μία αντιπροσωπεία αυτοκινήτων διαθέτει τρία μοντέλα τα Α, Β και Γ. Το Α πωλείται με κινητήρες 1,6 lt και σε 2 χρώματα ή 2 lt και σε 3 χρώματα, το Β με κινητήρες 1,6 lt και 2 χρώματα ή 1,8 lt και 2 lt με 1 χρώμα και το Γ μόνο με κινητήρα 1,8 lt και 4 χρώματα. Πόσες επιλογές έχει ένας υποψήφιος αγοραστής;



Κανόνας του Αθροίσματος (Προσθετική Αρχή)

- Έστω ενδεχόμενο A που μπορεί να συμβεί με n τρόπους και ενδεχόμενο B που μπορεί να συμβεί με m τρόπους.
- Αμοιβαία αποκλειόμενα ενδεχόμενα: Τα ενδεχόμενα A και B δεν μπορούν να συμβούν ταυτόχρονα, κανένα αποτέλεσμα του A δεν μπορεί να αποτελεί και αποτέλεσμα του B και αντίστροφα.
- **Κανόνας αθροίσματος**: Αν τα ενδεχόμενα A και B είναι αμοιβαία αποκλειόμενα, τότε η πραγματοποίηση κάποιου από αυτά μπορεί να συμβεί με n+m τρόπους.
  - $|A \cup B| = |A|+|B|$ αν $A \cap B=\emptyset$
- Ο κανόνας αθροίσματος γενικεύεται για περισσότερα από δύο αμοιβαία αποκλειόμενα ενδεχόμενα.
- Αν τα ενδεχόμενα A και B δεν είναι αμοιβαία αποκλειόμενα, ισχύει η αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού:
  - $|A \cup B| = |A|+|B| - |A \cap B|$

Κανόνας του αθροίσματος (συνέχεια…)

- Ο κανόνας του αθροίσματος στην ορολογία της θεωρίας συνόλων
- Έστω A_1, A_2,…,A_k, $k \geq 2$ πεπερασμένα σύνολα **ανά δύο ξένα μεταξύ τους**, δηλαδή $A_i \cap A_j = \emptyset$ για $i,j=1,2,\ldots,k$ με $i \neq j$. Τότε:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_k|$$

- **Παραδείγματα.**
- Πόσες είναι οι επιλογές ενός φοιτητή για μεταπτυχιακές σπουδές αν τον έχουν κάνει δεκτό 3 πανεπιστήμια στην Αγγλία, 2 στις Η.Π.Α. και 2 στην Ελλάδα
  - 3+2+2=7
- Με πόσους τρόπους μπορούμε να πάμε από την Αθήνα στην Θεσσαλονίκη αν υπάρχουν 5 δρομολόγια λεωφορείων, 3 αεροπορικά και 2 σιδηροδρομικά;
  - 5+3+2=10

Ο κανόνας του γινομένου (η πολλαπλασιαστική αρχή)

- Έστω ενδεχόμενο Α που μπορεί να συμβεί με n τρόπους και ενδεχόμενο Β που μπορεί να συμβεί με m τρόπους.

- Ανεξάρτητα ενδεχόμενα: το αποτέλεσμα του Α δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα του Β, και αντίστροφα.

- **Κανόνας γινομένου:** Αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι **ανεξάρτητα**, τότε ο συνδυασμός των Α **και** Β (δηλαδή ζεύγος αποτελεσμάτων του Α και του Β) μπορεί να συμβεί με $n \times m$ τρόπους.

- Ο κανόνας γινομένου γενικεύεται για περισσότερα από δύο ανεξάρτητα ενδεχόμενα.

Η πολλαπλασιαστική αρχή (συνέχεια…)

- Η πολλαπλασιαστική αρχή στην ορολογία της θεωρίας συνόλων.
- Έστω A_1, A_2,…,A_k, $k \geq 2$ οποιαδήποτε πεπερασμένα σύνολα και $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$, το καρτεσιανό τους γινόμενο. Τότε

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k| = |A_1| \times |A_2| \times \cdots \times |A_k|$$

- Παραδείγματα: Ένας υποψήφιος αγοραστής αυτοκινήτου έχει να επιλέξει ανάμεσα σε 5 διαφορετικά μοντέλα, και κάθε μοντέλο προσφέρεται σε 4 διαφορετικά χρώματα. Η επιλογή μοντέλου και χρώματος είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα και επομένως οι συνολικές επιλογές που έχει ο αγοραστής είναι 4x5=20.
- Αποτελέσματα όταν ρίχνουμε δύο **διαφορετικά** ζάρια:
  - 6 x 6 = 36 διαφορετικά αποτελέσματα.

Παραδείγματα

- Σε μια φρουτιέρα υπάρχουν 5 πανομοιότυπα πορτοκάλια και 6 πανομοιότυπα μήλα. Πόσες διαφορετικές επιλογές φρούτων μπορεί να κάνει ένα παιδί από την φρουτιέρα;
  - Τι διαφοροποιεί μια επιλογή; **Ο αριθμός** των φρούτων από κάθε είδος που επιλέγονται. Είναι 6 για τα πορτοκάλια και 7 για τα μήλα. Σύνολο $6 \times 7 = 42$
- Πλήθος διαφορετικών πινακίδων αυτοκινήτων (3 γράμματα και 4 ψηφία) δεδομένου ότι επιτρέπονται μόνο 14 γράμματα (όσα έχουν ίδια κεφαλαία γραφή με αντίστοιχα λατινικά) και το πρώτο από τα τέσσερα αριθμητικά ψηφία της πινακίδας είναι διαφορετικό του 0:
  - $14 \times 14 \times 14 \times 9 \times 10 \times 10 \times 10 = 24696000$
- Πλήθος διαφορετικών στηλών Προ-Πο:
  - 3^{13} διαφορετικά αποτελέσματα.

Παραδείγματα (συνέχεια…)

- Ένας υποψήφιος αγοραστής αυτοκινήτου επισκέπτεται δύο εκθέσεις: Η πρώτη του προσφέρει 5 διαφορετικά μοντέλα σε 4 διαφορετικά χρώματα το καθένα και η δεύτερη 3 διαφορετικά μοντέλα σε 6 διαφορετικά χρώματα το καθένα. Οι επιλογές του αγοραστή είναι:
  - 5x4+3x6=38
- Πόσοι 5-ψηφιοι αριθμοί υπάρχουν; (Το 0 είναι αποδεκτό σε κάθε θέση.)
  - 10^5
- Πόσοι από αυτούς είναι άρτιοι; Πόσοι διαιρούνται με το 5;
  - Οι άρτιοι έχουν 5 επιλογές για το τελευταίο ψηφίο. Άρα $10^4\times5$
  - Αυτοί που διαιρούνται με το 5 έχουν 2 επιλογές για το τελευταίο ψηφίο. Άρα $10^4\times2$
- Πόσοι περιέχουν 1 μόνο εμφάνιση του 3;
  - Επιλέγουμε την θέση του 3 με 5 τρόπους. Στην συνέχεια οι υπόλοιπες 4 θέσεις συμπληρώνονται από επιλογή από 9 ψηφία. Άρα 5×9^4.

Παραδείγματα (συνέχεια…)

- Πλήθος passwords μήκους 2 από A, B, C και 0, 1, 2 με τουλάχιστον ένα ψηφίο.
  - Αν αγνοήσουμε το περιορισμό, είναι 6^2. Όμως μετρήσαμε και όσες έχουν μόνο γράμματα. Αφαιρώντας τες παίρνουμε $6^2 - 3^2 = 27$.
- Πλήθος δυαδικών συμβ/ρών μήκους 8 που είτε αρχίζουν από 1 είτε τελειώνουν σε 00:
  - Όσες αρχίζουν από 1 είναι 2^7. Όσες τελειώνουν σε 00 είναι 2^6. Αφαιρούμε αυτές που διπλομετρήσαμε που είναι 2^5. Τελικά: $2^7 + 2^6 - 2^5 = 160$.
- Μία τράπουλα έχει 52 χαρτιά σε 4 «χρώματα» (καρώ, κούπα, μπαστούνι, σπαθί) με 13 χαρτιά το καθένα (10 ψηφία και οι φιγούρες βαλές, ντάμα, ρήγας).
- Πόσοι τρόποι επιλογής δύο διαδοχικών χαρτιών από μια τράπουλα υπάρχουν έτσι ώστε:
  - Το πρώτο να είναι άσσος και το δεύτερο όχι ντάμα;
    - $4 \times (51-4)$
  - Το πρώτο σπαθί και το δεύτερο όχι ντάμα;
    - $12 \times (51-4) + 1 \times (51-3)$

Μεταθέσεις

- Έστω σύνολο Α={$α_1$,$α_2$,…$α_n$} n αντικειμένων. Μία διάταξή τους (δηλαδή η επιβολή κάποιας σειράς μεταξύ τους) ονομάζεται *μετάθεση* των στοιχείων του Α.
- Πόσες είναι οι διαφορετικές μεταθέσεις των στοιχείων του Α;
- Μία μετάθεση δημιουργείται σε n βήματα. Στο 1ο βήμα επιλέγουμε από τα n στοιχεία του Α το 1ο στοιχείο της μετάθεσης. Οι δυνατότητες είναι n. Στο 2ο βήμα από τα εναπομείναντα στοιχεία του Α επιλέγουμε το 2ο στοιχείο της μετάθεσης. Οι δυνατότητες είναι n-1. Για το 3ο οι δυνατότητες είναι n-2 κλπ., μέχρι το τελευταίο όπου υπάρχει 1 μόνο δυνατότητα. Η πολλαπλασιαστική αρχή δίνει:
- Πλήθος μεταθέσεων n αντικειμένων=$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1 = n!$
- **Παράδειγμα.** Με πόσους τρόπους μπορούν 100 φοιτητές να καθίσουν σε ένα αμφιθέατρο 100 θέσεων;
  - Κάθε κάθισμα του αμφιθεάτρου προσδιορίζει την θέση του φοιτητή που κάθεται σε αυτό σε μία μετάθεση. Άρα ζητάμε το αριθμό των μεταθέσεων 100 αντικειμένων. Είναι 100!

Διατάξεις

- Έστω σύνολο $A=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n\}$ n αντικειμένων. Μία *διάταξη των n στοιχείων του συνόλου ανά k*, είναι μια διατεταγμένη k-αδα από διαφορετικά στοιχεία του Α.
- Το πλήθος των διαφορετικών διατάξεων των στοιχείων ενός n-μελους συνόλου ανά k συμβολίζεται με $(n)_k$ ή $P(n,k)$ (P από τον αγγλικό όρο permutation).
- Μία διάταξη των *n* ανά *k* δημιουργείται σε *k* βήματα. Στο 1ο βήμα επιλέγουμε από τα n στοιχεία του Α το 1ο στοιχείο της διάταξης. Οι δυνατότητες είναι *n*. Στο 2ο βήμα από τα εναπομείναντα στοιχεία του Α επιλέγουμε το 2ο στοιχείο της διάταξης. Οι δυνατότητες είναι *n*-1. Συνεχίζουμε έτσι μέχρι την επιλογή του *k*-οστου (και τελευταίου) στοιχείου της διάταξης όπου οι επιλογές είναι (*n*-*k*+1). Η πολλαπλασιαστική αρχή δίνει:
- Πλήθος διατάξεων *n* αντικειμένων ανά $k=(n)_k= n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-k+1)$
- Παρατηρήσεις
  - Όταν $k=n$ τότε έχουμε πρόβλημα μεταθέσεων n αντικειμένων. $(n)_n=n!$
  - $(n)_k=n!/(n-k)!$

Διατάξεις – Μεταθέσεις (παραδείγματα)

- Τρόποι πλήρωσης 4 (διαφορετικών) θέσεων εργασίας, αν έχουμε 30 υποψήφιους:
  - Αριθμούμε τις θέσεις εργασίας και επιλέγουμε 4 από τους 30 υποψήφιους. Δηλαδή $(30)_4$=30!/26!
- Πλήθος συμβολοσειρών μήκους 10 με όλα τα σύμβολα διαφορετικά, χρησιμοποιώντας κεφαλαίους Ελληνικούς χαρακτήρες:
  - Επιλέγουμε τα 10 γράμματα από τα 24 και τα διατάσσουμε. $(24)_{10}$ =24!/14!
- Πλήθος συμβολοσειρών μήκους 24 με όλα τα σύμβολα διαφορετικά, χρησιμοποιώντας κεφαλαίους Ελληνικούς χαρακτήρες:
  - Μεταθέσεις των 24 γραμμάτων. $(24)_{24}$ =24!
- Το προηγούμενο ερώτημα με την επιπλέον απαίτηση το Ω να εμφανίζεται μετά από τα Χ,Ψ,Ζ:
  - Επιλέγουμε τις 20 θέσεις όλων των γραμμάτων εκτός των Χ, Ψ,Ζ, Ω και τις διατάσσουμε. Στις 4 που απομένουν το Ω μπαίνει τελευταίο ενώ τα Χ,Ψ,Ζ μπαίνουν στις 3 που μένουν με 3! τρόπους. Ο κανόνας του γινομένου δίνει $(24)_{20}$ x 3!