Αποτιμήσεις

Η σημασιολογική προσέγγιση της Προτασιακής Λογικής

Η χρήση των συνδέσμων

- Οι σύνδεσμοι μετέχουν σε σύνθετους τύπους με τρόπο που τυποποιούν την χρήση τους στην φυσική γλώσσα. Π.χ.
  - p: Η διατροφή σου είναι καλή
  - q: Γυμνάζεσαι καλά
  - r: Είσαι υγιής
- Δεν είναι αλήθεια ότι αν η διατροφή σου είναι καλή και γυμνάζεσαι καλά, τότε είσαι υγιής.

$$\neg((p \wedge q) \rightarrow r)$$

- Αν δεν είσαι υγιής τότε, είτε η διατροφή σου είναι καλή αλλά δεν γυμνάζεσαι καλά, είτε, η διατροφή σου δεν είναι καλή αλλά γυμνάζεσαι καλά.

$$(\neg r) \rightarrow ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q))$$

Ερμηνεία των τύπων της ΠΛ

- Στην μελέτη των τύπων της προτασιακής λογικής ακολουθούνται δύο προσεγγίσεις:
  - **Σημασιολογική προσέγγιση.** Είναι η απόδοση τιμής αληθείας στους τύπους και η εκτίμηση της εγκυρότητας τους μέσω της τιμής αληθείας τους.
  - **Συντακτική προσέγγιση.** Είναι η παραγωγή των έγκυρων τύπων μέσω μιας διαδικασίας «τυπικής απόδειξης» που έχει να κάνει με την μορφή των τύπων.

- Το **Θεώρημα Εγκυρότητας και Πληρότητας** της Προτασιακής Λογικής λέει ότι το σύνολο των έγκυρων τύπων που προκύπτουν από την σημασιολογική προσέγγιση ταυτίζεται με το σύνολο των έγκυρων τύπων που προκύπτουν από την συντακτική προσέγγιση.

Σημασιολογική Προσέγγιση-
Η Αποτίμηση

- Η **σημασιολογική προσέγγιση** είναι ένας μηχανισμός απόδοσης **τιμής αληθείας** σε ένα τύπο.
- Στη βάση του μηχανισμού αυτού βρίσκεται μια συνάρτηση που ονομάζεται **αποτίμηση**.
- **Αποτίμηση** ή **εκτίμηση** α, ονομάζεται κάθε συνάρτηση της μορφής:

  $$\alpha\text{: } M(\Gamma_0) \rightarrow \{A, \Psi\}$$

  όπου τα **Α,Ψ** αντιστοιχούν στις τιμές αληθείας **Αληθής**, **Ψευδής**, αντίστοιχα.

  Παράδειγμα. Μια αποτίμηση α αποδίδει στις προτασιακές μεταβλητές p, q, r, τις τιμές αληθείας Α, Ψ και Ψ, αντίστοιχα. Δηλαδή

  $$\alpha(p) = A,\ \alpha(q) = \Psi,\ \alpha(r) = \Psi$$

- **Σημείωση**. Κάποιες φορές αντί για το {Α,Ψ} χρησιμοποιείται το σύνολο {1,0} ή το {T,F} .

Αποτιμήσεις (συνέχεια…)

- Δεδομένης μια αποτίμησης α, ορίζουμε την **επέκταση** της

$$\alpha': T(\Gamma_0) \to \{A, \Psi\},$$

για την οποία $\alpha'(\varphi) = \alpha(\varphi)$ αν $\varphi \in M(\Gamma_0)$, ενώ ορίζεται αναδρομικά για τύπους της μορφής $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \to \psi$ και $\varphi \leftrightarrow \psi$, από τον **πίνακα αληθείας** των συνδέσμων:

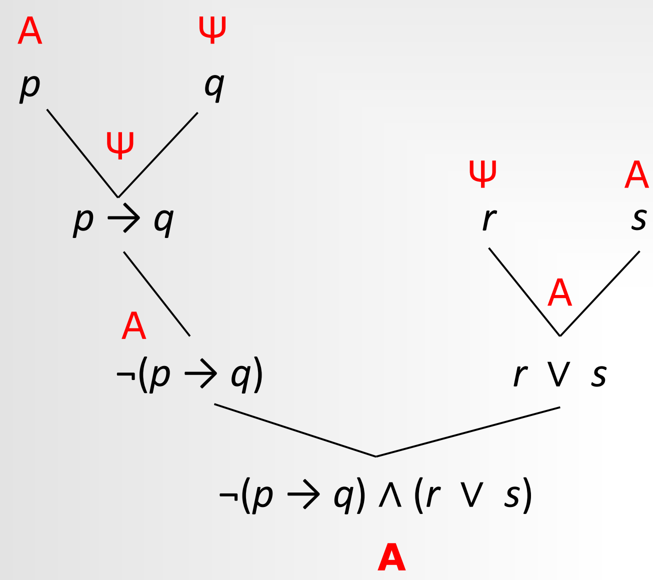
$\alpha'(\varphi)$	$\alpha'(\psi)$	$\alpha'(\neg\varphi)$	$\alpha'(\varphi \wedge \psi)$	$\alpha'(\varphi \vee \psi)$	$\alpha'(\varphi \to \psi)$	$\alpha'(\varphi \leftrightarrow \psi)$
Α	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Α

- Η **επέκταση** μιας αποτίμησης με βάση τους παραπάνω κανόνες αποδεικνύεται ότι είναι μια **μοναδική συνάρτηση** που αποδίδει μια τιμή από το {Α,Ψ} στον ίδιο τον τύπο.

Αποτιμήσεις (συνέχεια…)

- Στην πράξη η αποτίμηση της τιμής αληθείας ενός τύπου εφαρμόζεται σταδιακά, ξεκινώντας από τις προτασιακές μεταβλητές και εφαρμόζοντας τον πίνακα αληθείας στο δενδροδιάγραμμα του τύπου.

Παράδειγμα. Έστω $\alpha(p) = \alpha(s) =$ Α και $\alpha(q) = \alpha(r) =$ Ψ. Για τον $\neg(p \to q) \land (r \lor s)$ έχουμε:



Αποτιμήσεις (συνέχεια…)

- Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε για συντομία να εφαρμόσουμε την παρακάτω τεχνική γραφής:

Παράδειγμα. Έστω $\alpha(p) = \alpha(s) =$ Α και $\alpha(q) = \alpha(r) =$ Ψ. Έχουμε:

$$\neg(p \rightarrow q) \wedge (r \vee s)$$

Α Α Ψ Ψ **Α** Ψ Α Α

- Η ίδια τεχνική μπορεί να εφαρμοστεί αντίστροφα:

Παράδειγμα. Βρείτε μια αποτίμηση που καθιστά τον παρακάτω τύπο ψευδή:

$$((\neg p \wedge q) \wedge \mathrm{r}) \rightarrow \neg q$$

ΑΨΑΑ ΑΑ **Ψ** ΨΑ

Άρα, η μοναδική αποτίμηση που καθιστά τον τύπο ψευδή είναι:

$$\alpha(p) = \Psi,\ \alpha(q) = \alpha(r) = \mathrm{A}$$

- **Προσοχή:** Η αντίστροφη διαδικασία μπορεί να είναι σημαντικά δυσκολότερη από τον υπολογισμό της τιμής της επέκτασης μιας αποτίμησης.

Πίνακας αληθείας

- Μέθοδος για τον υπολογισμό της τιμής ενός τύπου για όλες τις αποτιμήσεις.
- Τύπος που εμπλέκει *n* μεταβλητές έχει πίνακα αληθείας με 2^n γραμμές.
- **Παράδειγμα.** Να δοθεί ο πίνακας αληθείας του τύπου $\neg (p_1 \rightarrow p_2) \vee (\neg p_1 \wedge p_3)$
  - Ο τύπος έχει 3 μεταβλητές άρα ο πίνακας αληθείας του θα έχει 8 γραμμές
  - Πολλές φορές βοηθά να δίνουμε πίνακες αληθείας και για υποτύπους του τελικού τύπου

p_1	p_2	p_3	$\neg p_1$	$p_1 \rightarrow p_2$	$\neg(p_1 \rightarrow p_2)$	$\neg p_1 \wedge p_3$	$\neg(p_1 \rightarrow p_2) \vee (\neg p_1 \wedge p_3)$
Α	Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ
Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Α	Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ

Ταυτολογικές συνεπαγωγές

- Έστω $T \subseteq T(\Gamma_0)$, φ ένας προτασιακός τύπος και μια αποτίμηση α. Θα λέμε ότι:
  - Η αποτίμηση α **ικανοποιεί τον** φ, αν $\alpha'(\varphi) = A$.
  - Η αποτίμηση α **ικανοποιεί το** T, αν $\alpha'(\varphi) = A$ για κάθε $\varphi \in T$.
  - Το T είναι **ικανοποιήσιμο**, αν υπάρχει αποτίμηση α που ικανοποιεί το T.
  - Ο φ είναι **ταυτολογία**, αν για κάθε αποτίμηση α ο φ είναι αληθής.
  - Ο φ είναι **αντίφαση** (ή **αντιλογία**), αν ο $\neg\varphi$ είναι ταυτολογία
  - Το T **συνεπάγεται ταυτολογικά (ή λογικά)** τον φ (συμβολισμός $\boldsymbol{T \vDash \varphi}$), αν κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί το T, ικανοποιεί τον φ. (Προσοχή! $T \vDash \varphi$ σημαίνει ότι όπου το T ικανοποιείται, τότε αναγκαστικά ικανοποιείται και ο φ, όχι αναγκαστικά και το αντίθετο.)
- **Παρατηρήσεις**:
  - Αν $\varphi \in T$, τότε $T \vDash \varphi$.
  - $\emptyset \vDash \varphi$ (για συντομία γράφουμε $\boldsymbol{\vDash \varphi}$) αν-ν ο φ είναι ταυτολογία.
  - Αν το T δεν είναι ικανοποιήσιμο, τότε για κάθε τύπο φ, ισχύει $T \vDash \varphi$.
  - Αν $\varphi \vDash \psi$ και $\psi \vDash \varphi$, τότε λέμε ότι οι τύποι είναι **ταυτολογικά ισοδύναμοι** και γράφουμε $\boldsymbol{\varphi \equiv \psi}$.

Ταυτολογικές συνεπαγωγές (συνέχεια…)

Παράδειγμα. Να δειχθεί ότι ο τύπος $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ είναι ταυτολογία.

p	q	$q \rightarrow p$	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$
Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Α

Αληθής για κάθε αποτίμηση, άρα ταυτολογία.

Εναλλακτικά αναζητούμε αποτίμηση που καθιστά τον τύπο ψευδή:

$$p \rightarrow (q \rightarrow p)$$

$\boxed{\text{Α}}$ **Ψ** Α Ψ $\boxed{\text{Ψ}}$

Αδύνατο! Άρα ταυτολογία

Παράδειγμα. Εξετάστε αν ο τύπος $(p \rightarrow q) \rightarrow p$ είναι ταυτολογία ή αντίφαση.

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow p$
Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Ψ

Τίποτε από τα δύο

Ταυτολογικές συνεπαγωγές (συνέχεια…)

- **Παράδειγμα.** Έστω $T = \{ p_1 \vee \neg p_2 , p_1 \wedge p_2 , p_1 \vee p_3\}$. Εξετάστε αν (i) $T \models \neg p_1 \rightarrow (p_1 \wedge p_2)$ και (ii) $T \models (p_2 \vee p_3) \rightarrow (p_1 \wedge p_3)$

p_1	p_2	p_3	$p_1 \vee \neg p_2$	$p_1 \wedge p_2$	$p_1 \vee p_3$	$\neg p_1 \rightarrow (p_1 \wedge p_2)$	$(p_2 \vee p_3) \rightarrow (p_1 \wedge p_3)$
Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α	Ψ
Α	Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α

- **Άρα:** Το *T* συνεπάγεται ταυτολογικά *τον* $\neg p_1 \rightarrow (p_1 \wedge p_2)$, αλλά το *T δεν* συνεπάγεται ταυτολογικά τον $(p_2 \vee p_3) \rightarrow (p_1 \wedge p_3)$

Ταυτολογικές συνεπαγωγές (συνέχεια…)

- **Θεώρημα Απαγωγής σε Άτοπο** (σημασιολογική εκδοχή). Για κάθε $T \subseteq T(\Gamma_0)$

  $T \vDash \varphi$, *αν-ν* $T \cup \{\neg\varphi\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο

  - Απόδειξη. Αν $T \vDash \varphi$ τότε οι αποτιμήσεις που ικανοποιούν το T ικανοποιούν και τον φ άρα δεν ικανοποιούν τον $\neg\varphi$ και το $T \cup \{\neg\varphi\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο.
  - Αντίστροφα. Αν το $T \cup \{\neg\varphi\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο, τότε οι αποτιμήσεις που ικανοποιούν το T (αν υπάρχουν) δεν μπορούν να ικανοποιούν τον $\neg\varphi$, άρα ικανοποιούν τον φ, άρα $T \vDash \varphi$.

- **Θεώρημα Συμπάγειας της ΠΛ.** Έστω $T \subseteq T(\Gamma_0)$ ένα άπειρο σύνολο προτασιακών τύπων. Αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του T είναι ικανοποιήσιμο, τότε το *T* είναι ικανοποιήσιμο.

Ταυτολογικές συνεπαγωγές (συνέχεια…)

- **Παράδειγμα.** Τρεις ύποπτοι, ο Α, ο Β και ο Γ δίνουν τις εξής καταθέσεις:
  - Ο Α λέει: «*ο Β είναι ένοχος και ο Γ είναι αθώος*»
  - Ο Β λέει: «*αν ο Α είναι ένοχος τότε και ο Γ είναι ένοχος*»
  - Ο Γ λέει: «*είμαι αθώος και τουλάχιστον ένας από τους υπόλοιπους είναι ένοχος*»

1. Μπορούν οι τρεις καταθέσεις να είναι ταυτόχρονα αληθείς ; Αν ναι, τότε ποιος είναι αθώος και ποιος είναι ένοχος ;
2. Αν υποθέσουμε ότι και οι τρεις ύποπτοι είναι αθώοι, ποιος έδωσε ψευδή και ποιος αληθή κατάθεση ;
3. Αν υποθέσουμε ότι ο αθώος λέει την αλήθεια και ο ένοχος λέει ψέματα, τότε ποιος είναι αθώος και ποιος ένοχος;

Ταυτολογικές συνεπαγωγές (συνέχεια…)

Απάντηση: Έστω p, q, r τρεις προτασιακές μεταβλητές οι οποίες δηλώνουν αντίστοιχα «ο Α είναι αθώος», «ο Β είναι αθώος» και «ο Γ είναι αθώος».

Κωδικοποιούμε τις τρεις καταθέσεις των υπόπτων σε προτασιακούς τύπους, που για συντομία θα συμβολίζουμε αντίστοιχα με φ, χ, ψ:

- Κατάθεση του Α: $\varphi = \neg q \wedge r$
- Κατάθεση του Β: $\chi = \neg p \rightarrow \neg r$
- Κατάθεση του Γ: $\psi = \mathrm{r} \wedge (\neg p \vee \neg q)$

p	***q***	***r***	***φ***	***χ***	***ψ***
Α	Α	Α	Ψ	Α	Ψ
Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ
Α	Ψ	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ

Ταυτολογικές συνεπαγωγές (συνέχεια…)

Απάντηση: Έστω *p*, *q*, *r* τρεις προτασιακές μεταβλητές οι οποίες δηλώνουν αντίστοιχα «ο Α είναι αθώος», «ο Β είναι αθώος» και «ο Γ είναι αθώος».

Κωδικοποιούμε τις τρεις καταθέσεις των υπόπτων σε προτασιακούς τύπους, που για συντομία θα συμβολίζουμε αντίστοιχα με φ, χ, ψ:

- Κατάθεση του Α: $\varphi = \neg q \wedge r$
- Κατάθεση του Β: $\chi = \neg p \rightarrow \neg r$
- Κατάθεση του Γ: $\psi = \mathrm{r} \wedge (\neg p \vee \neg q)$

p	*q*	*r*	φ	χ	ψ
Α	Α	Α	Ψ	Α	Ψ
Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ
Α	**Ψ**	**Α**	**Α**	**Α**	**Α**
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ

Ερώτημα 1: Οι τρεις καταθέσεις φ, χ, ψ είναι αληθείς, οπότε οι τιμές των *p*, *q*, *r* δείχνουν ότι οι Α,Γ είναι αθώοι, ενώ ο Β ένοχος.

Ταυτολογικές συνεπαγωγές (συνέχεια…)

Απάντηση: Έστω *p*, *q*, *r* τρεις προτασιακές μεταβλητές οι οποίες δηλώνουν αντίστοιχα «ο Α είναι αθώος», «ο Β είναι αθώος» και «ο Γ είναι αθώος».

Κωδικοποιούμε τις τρεις καταθέσεις των υπόπτων σε προτασιακούς τύπους, που για συντομία θα συμβολίζουμε αντίστοιχα με φ, χ, ψ:

- Κατάθεση του Α: $\varphi = \neg q \land r$
- Κατάθεση του Β: $\chi = \neg p \to \neg r$
- Κατάθεση του Γ: $\psi = r \land (\neg p \lor \neg q)$

p	*q*	*r*	φ	χ	ψ
Α	**Α**	**Α**	**Ψ**	**Α**	**Ψ**
Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ
Α	Ψ	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ

Ερώτημα 2: Οι τρεις ύποπτοι είναι αθώοι, άρα οι τιμές των *p*, *q*, *r* είναι αληθείς. Άρα οι Α, Γ λένε ψέματα, ενώ ο Β αλήθεια.

Ταυτολογικές συνεπαγωγές (συνέχεια…)

Απάντηση: Έστω p, q, r τρεις προτασιακές μεταβλητές οι οποίες δηλώνουν αντίστοιχα «ο Α είναι αθώος», «ο Β είναι αθώος» και «ο Γ είναι αθώος».

Κωδικοποιούμε τις τρεις καταθέσεις των υπόπτων σε προτασιακούς τύπους, που για συντομία θα συμβολίζουμε αντίστοιχα με φ, χ, ψ:

- Κατάθεση του Α: $\varphi = \neg q \wedge r$
- Κατάθεση του Β: $\chi = \neg p \rightarrow \neg r$
- Κατάθεση του Γ: $\psi = r \wedge (\neg p \vee \neg q)$

p	***q***	***r***	***φ***	***χ***	***ψ***
Α	Α	Α	Ψ	Α	Ψ
Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ
Α	Ψ	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	**Α**	**Ψ**	**Ψ**	**Α**	**Ψ**
Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ

Ερώτημα 3:
Εφόσον οι αθώοι λένε αλήθεια, και οι ένοχοι ψέματα, οι τιμές αληθείας των p, q, r, πρέπει να συμπίπτουν με τις τιμές των φ, χ, ψ, αντίστοιχα. Συνεπώς, οι Α, Γ είναι ένοχοι, ενώ ο Β αθώος.

Νόμοι της ΠΛ

- Οι **νόμοι της ΠΛ** είναι μια σειρά από γνωστές ταυτολογικές ισοδυναμίες που χρησιμοποιούνται για τον μετασχηματισμό ενός τύπου σε ένα ταυτολογικά ισοδύναμο του. Οι πιο γνωστοί από αυτούς είναι οι παρακάτω:

$p \wedge q \equiv q \wedge p$,	$p \vee q \equiv q \vee p$	(**Αντιμεταθετικότητα**)
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$,	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	(**Προσεταιριστικότητα**)
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$,	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	(**Επιμεριστικότητα**)
$p \wedge p \equiv p$,	$p \vee p \equiv p$	(**Ταυτοδυναμία**)
$p \wedge (p \vee q) \equiv p$,	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$	(**Απορρόφηση**)
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$,	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	(**Νόμοι De Morgan**)
$\neg\neg p \equiv p$		(**Νόμος διπλής άρνησης**)
$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$		(**Αντ/ση συνεπαγωγής**)
$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$		(**Αντ/ση ισοδυναμίας**)
$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$		(**Αντιθετοαναστροφή**)

Κανονικές Μορφές

- Ένας τύπος είναι σε **κανονική διαζευκτική μορφή** (**ΚΔΜ**), αν είναι της μορφής $\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \ldots \vee \varphi_n$ όπου n ≥ 1 και ϕ_i είναι της μορφής $\vartheta_1 \wedge \vartheta_2 \wedge \ldots \wedge \vartheta_\mathrm{m}$, όπου $m \geq 1$ και τα ϑ_j είναι προτασιακές μεταβλητές ή αρνήσεις προτασιακών μεταβλητών.
- Ένας τύπος είναι σε **κανονική συζευκτική μορφή** (**ΚΣΜ**), αν είναι της μορφής $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_\mathrm{n}$ όπου n ≥ 1 και φ_i είναι της μορφής $\vartheta_1 \vee \vartheta_2 \vee \ldots \vee \vartheta_\mathrm{m}$, όπου $m \geq 1$ και τα ϑ_j είναι προτασιακές μεταβλητές ή αρνήσεις προτασιακών μεταβλητών.
- Αποδεικνύεται ότι:
  - Για κάθε προτασιακό τύπο φ, υπάρχει τύπος φ^* σε ΚΔΜ, τέτοιος ώστε $\varphi \equiv \varphi^*$.
  - Για κάθε προτασιακό τύπο φ, υπάρχει τύπος φ^{**} σε ΚΣΜ, τέτοιος ώστε $\varphi \equiv \varphi^{**}$.
- Η αναγωγή ενός τυχόντος τύπου φ στην ΚΔΜ ή στην ΚΣΜ του μπορεί να επιτευχθεί με κατάλληλη εφαρμογή των νόμων της ΠΛ.

Κανονικές Μορφές (συνέχεια…)

- **Παράδειγμα**. Να βρεθεί η ΚΔΜ και ΚΣΜ του τύπου $(p \to q) \land (r \to \neg q \lor p)$.

$(p \to q) \land (r \to \neg q \lor p) \equiv$	(Αντ/ση Συνεπαγωγής)
$\equiv (\neg p \lor q) \land (r \to \neg q \lor p)$	(Αντ/ση Συνεπαγωγής)
$\equiv (\neg p \lor q) \land (\neg r \lor (\neg q \lor p))$	(**ΚΣΜ**)

Συνεχίζουμε για την εύρεση της ΚΔΜ

$(\neg p \lor q) \land (\neg r \lor (\neg q \lor p)) \equiv$	(Επιμερισμός)
$\equiv (\neg p\land\neg r)\lor(\neg p\land\neg q)\lor(\neg p\land p)\lor(q\land\neg r)\lor(q\land\neg q)\lor(q\land p)$	(Αντίφαση)
$\equiv (\neg p\land\neg r) \lor (\neg p\land\neg q) \lor (q\land\neg r) \lor (q\land\neg q) \lor (q\land p)$	(Αντίφαση)
$\equiv (\neg p\land\neg r) \lor (\neg p\land\neg q) \lor (q\land\neg r) \lor (q\land p)$	(**ΚΔΜ**)

Πλήρη Σύνολα Συνδέσμων

- Ένα σύνολο συνδέσμων *C*, ονομάζεται **πλήρες**, αν-ν κάθε προτασιακός τύπος είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με ένα προτασιακό τύπο που περιέχει μόνο συνδέσμους από το *C*.
- Τα παρακάτω είναι **πλήρη σύνολα συνδέσμων**: {¬, ∧}, {¬, ∨}, {¬, →}
- Επίσης, μπορεί να αποδειχθεί ότι αν ορίσουμε τους συνδέσμους NAND και NOR με τον παρακάτω πίνακα αληθείας:

p	***q***	***p* NAND *q***	***p* NOR *r***
Α	Α	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Α

Τα μονοσύνολα συνδέσμων {NAND}, {NOR} είναι **πλήρη**.

Πλήρη Σύνολα Συνδέσμων

- **Παράδειγμα**. Να δειχθεί ότι το σύνολο συνδέσμων $\{\neg, \vee\}$ είναι πλήρες.

Δείχνουμε επαγωγικά ότι για τύπο φ, υπάρχει $\varphi^* \equiv \varphi$, που χρησιμοποιεί μόνο τους συνδέσμους $\{\neg, \vee\}$.

Βασικό βήμα: Για $\varphi = p \in M(\Gamma_0)$ δεν χρειάζεται να δείξουμε κάτι.

Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι για τυχόντες χ, ψ υπάρχουν ισοδύναμοι τύποι χ^*, ψ^* με τη ζητούμενη ιδιότητα, δηλαδή χρησιμοποιούν μόνο τους συνδέσμους $\{\neg, \vee\}$.

Επαγωγικό βήμα: Εξετάζουμε περιπτώσεις:

- Αν $\varphi = \neg\psi$, λόγω της ε.υ., $\varphi = \neg\psi \equiv \neg\psi^*$
- Αν $\varphi = \psi \vee \chi$, λόγω της ε.υ., $\varphi = \psi \vee \chi \equiv \psi^* \vee \chi^*$
- Αν $\varphi = \psi \wedge \chi$, λόγω της ε.υ., $\varphi = \psi \wedge \chi \equiv \psi^* \wedge \chi^* \equiv \neg (\neg \psi^* \vee \neg \chi^*)$ (νόμος De Morgan)
- Αν $\varphi = \psi \rightarrow \chi$, λόγω της ε.υ., $\varphi = \psi \rightarrow \chi \equiv \psi^* \rightarrow \chi^* \equiv \neg\psi^* \vee \chi^*$
- Αν $\varphi = \psi \leftrightarrow \chi$, λόγω της ε.υ., $\varphi = \psi \leftrightarrow \chi \equiv \psi^* \leftrightarrow \chi^* \equiv (\psi^* \rightarrow \chi^*) \wedge (\chi^* \rightarrow \psi^*) \equiv$
  $\equiv (\neg\psi^* \vee \chi^*) \wedge (\neg\chi^* \vee \psi^*) \equiv \neg(\neg(\neg\psi^* \vee \chi^*) \vee \neg (\neg\chi^* \vee \psi^*))$

Άρα, σε κάθε περίπτωση ο φ έχει ισοδύναμο του που χρησιμοποιεί μόνο τους $\{\neg, \vee\}$.

Σημείωση: Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι το σύνολο $\{\neg, \wedge\}$ είναι πλήρες.

Ασκήσεις

1. Δείξτε, πρώτα με πίνακα αληθείας και μετά με την τεχνική που είδαμε στην σελίδα 7 των διαφανειών (χωρίς πίνακα αληθείας), ότι οι παρακάτω τύποι είναι ταυτολογίες:
   - **(i)** $(p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$
   - **(ii)** $(p \wedge q) \wedge r \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r))$
   - **(iii)** $(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \rightarrow q \vee r$
2. Λύστε την παραπάνω άσκηση, αυτή την φορά χρησιμοποιώντας τις ισοδυναμίες (νόμους) της ΠΛ.
3. Στην παρακάτω άσκηση οι φ και ψ είναι προτασιακοί τύποι ενώ οι p_1 *και* p_2 είναι προτασιακές μεταβλητές. Ελέγξτε αν ισχύουν ή όχι οι παρακάτω δηλώσεις.
   1. $\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \models \varphi$
   2. $\psi \wedge \neg\psi \models \varphi$
   3. $\varphi \models \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$
   4. $\varphi \models \psi \wedge \neg\psi$
   5. Ο προτασιακός τύπος $(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (\neg p_1 \wedge \neg p_2)$ είναι αντίφαση.
   6. Ο προτασιακός τύπος $(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (\neg p_2 \rightarrow \neg p_1)$ είναι ταυτολογία.
   7. $(p_1 \wedge \neg p_1) \rightarrow p_2 \models p_2$
   8. $p_1 \wedge \neg p_1 \models p_2 \wedge \neg p_2$