Συνδυαστική

Η χρήση των γεννητριών συναρτήσεων στην Συνδυαστική

Η χρήση των ΓΣ στην Συνδυαστική (παράδειγμα)

- Έχουμε στην διάθεση μας «πολλές» κόκκινες, πράσινες και μπλε μπάλες. Με πόσους τρόπους μπορούμε να δώσουμε 12 μπάλες σε ένα παιδί έτσι ώστε οι κόκκινες να είναι τουλάχιστον 4 ($4 \leq κ$), οι πράσινες από 2 έως και 5 ($2 \leq π \leq 5$) και οι μπλε το πολύ 8 ($μ \leq 8$);
  - Ας εξετάσουμε το πολυώνυμο:
  - $A(x) = (x^4 + x^5 + \cdots + x^{12})(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(1 + x + \cdots + x^8)$
  - Έστω ότι κάναμε τις πράξεις. Πώς μπορεί να προκύψει όρος x^{12}; Μερικοί τρόποι:
  - Με το x^5 από τον 1ο παράγοντα, το x^3 από τον 2ο και το x^4 από τον 3ο παράγοντα πολλαπλασιασμένα μεταξύ τους. Αλλιώς:
  - Με το x^{10} από τον 1ο παράγοντα, το x^2 από τον 2ο και το 1 από τον 3ο παράγοντα κλπ.
  - Οι εκθέτες του *x* σε αυτούς τους τρόπους αντιστοιχούν σε σωστή επιλογή μπαλών :
  - Στον 1ο τρόπο κ=5, π=3, μ=4. Στον 2ο κ=10, π=2, μ=0 κλπ. Επειδή κάθε παράγοντας περιλαμβάνει (εκ κατασκευής) τις «νόμιμες» επιλογές, καταλήγουμε στο:
- Συμπέρασμα : Ο συντελεστής του x^{12} στο πολυώνυμο $A(x)$ ισούται με τον αριθμό των τρόπων που μπορεί να γίνει η παραπάνω διανομή.

Οι ΓΣ στην συνδυαστική-Παρατηρήσεις

- **Οι συνήθεις ΓΣ** χρησιμοποιούνται για την κωδικοποίηση και επίλυση προβλημάτων συνδυασμών k αντικειμένων από n διακεκριμένα αντικείμενα με επανάληψη ή αντίστοιχα διανομής k όμοιων αντικειμένων σε n διακεκριμένες υποδοχές.
- Σημαντικό πλεονέκτημα έναντι των συνδυαστικών τύπων είναι ότι μπορούν να χειριστούν περιορισμούς.
- Για κάθε ένα από τα n διακεκριμένα αντικείμενα (αντίστοιχα n διακεκριμένες υποδοχές) διαμορφώνεται ένας απαριθμητής, δηλαδή μια ΓΣ που αντιστοιχεί στην ακολουθία που υποδηλώνει τους τρόπους με τους οποίους το αντικείμενο (η υποδοχή) μπορεί να επιλεγεί.
- Οι απαριθμητές για τα διαφορετικά αντικείμενα (υποδοχές) πολλαπλασιάζονται (κανόνας γινομένου) και δίνουν τη συνολική ΓΣ.
- Ο συντελεστής του x^k στη ΓΣ αντιστοιχεί στο πλήθος των συνδυασμών k από n αντικείμενα (τρόπους διανομής k όμοιων αντικειμένων σε n διακεκριμένες υποδοχές), υπό τους περιορισμούς που έχουμε θέσει.

Συνήθεις γεννήτριες συναρτήσεις - Παράδειγμα κατανόησης

- Ας προσέξουμε την ισοδυναμία των παρακάτω ερωτημάτων:
  - Τρόποι να μοιράσουμε 8 όμοιες σοκολάτες σε 3 διακεκριμένα παιδιά, ώστε κάθε παιδί να πάρει από 1 ως 3 σοκολάτες.
  - Λύσεις της εξίσωσης $z_1+z_2+z_3 = 8$ στους φυσικούς αριθμούς αν $1 \leq z_1, z_2, z_3 \leq 3$.
  - Συνδυασμοί k=8 αντικειμένων από n=3 διακεκριμένα αντικείμενα με επανάληψη, ώστε κάθε αντικείμενο να επιλεγεί από 1 ως 3 φορές.
  - Τρόποι διανομής k=8 όμοιων αντικειμένων σε n=3 διακεκριμένες υποδοχές ώστε σε κάθε υποδοχή να τοποθετηθεί από 1 ως 3 αντικείμενα.
- Ο συνδυαστικός τύπος C(n+k-1,k)=C(3+8-1,8)=C(10,8)=45 <u>δε δίνει το σωστό αποτέλεσμα</u> γιατί δε λαμβάνει υπόψη τους περιορισμούς.
- Διαμορφώνονται 3 απαριθμητές, λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς:

  $x+x^2+x^3$, $x+x^2+x^3$, $x+x^2+x^3$
- Διαμορφώνεται η συνολική συνήθης ΓΣ ως γινόμενο όλων των απαριθμητών:
  $A(x)=(x+x^2+x^3)(x+x^2+x^3)(x+x^2+x^3)$
- Το ζητούμενο σε όλα τα ερωτήματα δίνεται από συντελεστή του όρου x^8 που είναι 3.

Συνήθεις γεννήτριες συναρτήσεις - Παραδείγματα

- ΓΣ για τη διανομή 20 μαρκαδόρων, 6 μαύρων, 10 μπλέ, και 4 κόκκινων, σε 2 καθηγητές ώστε κάθε καθηγητής να πάρει 10 μαρκαδόρους και τουλάχιστον 1 από κάθε χρώμα.
  - Διανομή στον 1ο καθηγητή (σύμφωνα με τους περιορισμούς) καθορίζει τι θα πάρει ο 2ος καθηγητής με μοναδικό τρόπο.
  - Αρκεί να διατυπώσουμε τη ΓΣ για τον 1ο καθηγητή.
  - $(x+x^2+x^3+x^4+x^5)(x+x^2+\ldots+x^9)(x+x^2+x^3)$
  - Το ζητούμενο δίνεται από τον συντελεστή του x^{10} που είναι 15.
- Κέρματα 1 ευρώ και 2 ευρώ, χαρτονομίσματα των 5 ευρώ
  Συνδυασμοί με συνολική αξία 100 ευρώ ώστε να έχουμε τουλάχιστον τρία κέρματα από κάθε είδος και το πολύ 10 χαρτονομίσματα των 5 Ευρώ
  - $A(x) = (x^3 +x^4+\ldots)(x^6+x^8+\ldots)(1+x^5+x^{10}+\ldots+x^{50})$
  - Το ζητούμενο δίνεται από τον συντελεστή του x^{100}

Συνήθεις γεννήτριες συναρτήσεις – Εξαγωγή συνδυαστικών τύπων

- Οι γνωστοί μας συνδυαστικοί τύποι μπορούν εύκολα να δειχθούν με χρήση των ΓΣ.
- Συνδυασμοί k αντικειμένων από n αντικείμενα χωρίς επαναλήψεις:
  - Απαριθμητής για κάθε αντικείμενο: $1+x$ (το επιλέγουμε ή όχι)
  - ΓΣ $(1+x)^n$. Συντελεστής $x^k = C(n, k)$.
- Συνδυασμοί k αντικειμένων από n αντικείμενα με απεριόριστες επαναλήψεις:
  - Απαριθμητής για κάθε αντικείμενο: $1+x+x^2+x^3+\ldots = 1/(1-x)$
  - ΓΣ $1/(1-x)^n$. Συντελεστής $x^k = C(n+k-1, k)$.
- Συνδυασμοί k αντικειμένων από n αντικείμενα με απεριόριστες επαναλήψεις ώστε κάθε αντικείμενο να επιλεγεί τουλάχιστον 1 φορά:
  - Απαριθμητής για κάθε αντικείμενο: $x+x^2+x^3+\ldots = x/(1-x)$
  - ΓΣ $x^n/(1-x)^n$. Συντελεστής $x^k = C(k-1, n-1)$.

Παράδειγμα εύρεσης του συντελεστή

- Όταν όλοι οι όροι της ΓΣ είναι πεπερασμένοι τότε ο συντελεστής που δίνει την απάντηση βρίσκεται με απλές πράξεις (παράδειγμα Α) που αν είναι δυνατόν απλοποιούμε μια και στοχεύουμε σε **συγκεκριμένο συντελεστή**. Σε άλλες περιπτώσεις πρέπει (ή απλά μας συμφέρει) να έχουμε όρους που πάνε στο άπειρο (παράδειγμα Β). Τότε χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των ΓΣ για την εύρεση του συντελεστή που μας ενδιαφέρει.
- Παράδειγμα Α. Πόσες είναι οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $x_1 + x_2 + x_3 = 40$ με $8 \leq x_i \leq 20$ και x_i πολλαπλάσιο του 4, i=1,2,3;
  - Η ΓΣ είναι η $(x^8 + x^{12} + x^{16} + x^{20})^3$. Αναζητούμε τον συντελεστή του x^{40}.
  - Η ΓΣ γράφεται $x^{24}(1 + x^4 + x^8 + x^{12})^3$. Άρα αναζητάμε τον συντελεστή του x^{16} στο πολυώνυμο $(1 + x^4 + x^8 + x^{12})^3$. Επειδή όλες οι δυνάμεις του x είναι πολλαπλάσια του 4 μπορούμε να θέσουμε $y = x^4$ και να αναζητήσουμε τον συντελεστή του y^4 στο $(1 + y + y^2 + y^3)^3$
  - $(1 + y + y^2 + y^3)^3 = ((1 + y) + y^2(1 + y))^3 = (1 + y)^3(1 + y^2)^3 = (1 + 3y + 3y^2 + y^3)(1 + 3y^2 + 3y^4 + y^6) = \cdots + 3y^4 + \cdots 9y^4 + \cdots = \cdots + \mathbf{12}y^4 +$
- Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι 12

Παράδειγμα εύρεσης του συντελεστή (συνέχεια)

- Παράδειγμα Β. Μια ομάδα στη διάρκεια του πρωταθλήματος δίνει 30 αγώνες. Πόσα είναι τα διαφορετικά αποτελέσματα αν ο συνολικός αριθμός των νικών είναι περιττός, ο συνολικός αριθμός των ηττών είναι άρτιος, ενώ οι ισοπαλίες είναι τουλάχιστον 2 και δεν έχει σημασία η σειρά των αγώνων;
  - Απαριθμητής για τις νίκες: $(x + x^3 + x^5 + \cdots + x^{29})$
  - Απαριθμητής για τις ήττες: $(1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{30})$
  - Απαριθμητής για τις ισοπαλίες: $(x^2 + x^3 + \cdots + x^{30})$
  - Η ΓΣ:$(x + x^3 + x^5 + \cdots + x^{29})(1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{30})(x^2 + x^3 + \cdots + x^{30})$
  - Ζητάμε τον συντελεστή του x^{30}.
- Μπορούμε να κάνουμε τις πράξεις συμβατικά αλλά διευκολυνόμαστε αν πάμε τις αθροίσεις στο άπειρο. Δεν είναι λάθος να έχουμε ΓΣ την
  - $(x + x^3 + x^5 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)(x^2 + x^3 + \cdots) = x^3(1 + x^2 + x^4 + \cdots)^2(1 + x + \cdots) = x^3 \cdot \frac{1}{(1-x^2)^2} \cdot \frac{1}{1-x} = x^3 \cdot \frac{1}{(1-x)^3} \cdot \frac{1}{(1+x)^2}$

Παράδειγμα Β (συνέχεια)

- Ζητάμε λοιπόν τον συντελεστή του x^{27} στην παράσταση
  - $\frac{1}{(1-x)^3}\cdot\frac{1}{(1+x)^2} = (1-x)^{-3}(1+x)^{-2} = (1-x^2)^{-3}(1+x) = (1-x^2)^{-3} + \mathrm{x}(1-x^2)^{-3}$
  - Όμως $(1-x^2)^{-3} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-3}{n}(-1)^n x^{2n}$. Άρα αυτός ο όρος δίνει μόνο άρτιες δυνάμεις
  - Από τον $\mathrm{x}(1-x^2)^{-3}$ ζητάμε τον συντελεστή του x^{27} ή τον συντελεστή του x^{26} στον $(1-x^2)^{-3} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-3}{n}(-1)^n x^{2n}$. Τον έχουμε για n=13
  - Άρα ο συντελεστής είναι $-\binom{-3}{13} = \binom{3+13-1}{13} = \binom{15}{13} = 105$
- Επομένως τα διαφορετικά αποτελέσματα που μπορεί να φέρει η ομάδα είναι 105.