Προτασιακή Λογική

Διακριτά Μαθηματικά - Προτασιακή Λογική

Δημήτρης Καββαδίας
Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Μαθηματικών

Εισαγωγή

- Η **Λογική** ασχολείται με τους κανόνες του ορθού συλλογισμού και μελετά τους κανόνες μέσω των οποίων εξάγουμε έγκυρα συμπεράσματα.
  - **Κλασσική Λογική** (Αριστοτέλης-Χρύσιππος): Βασίζεται στην ανάπτυξη επιχειρημάτων στη φυσική γλώσσα. Η εφαρμογή της σε κλάδους των μαθηματικών είναι δύσκολη και κάποιες φορές οδηγεί σε λογικά παράδοξα.
  - **Σύγχρονη Μαθηματική Λογική**: Χρησιμοποιεί μια αυστηρή συμβολική (τυπική) γλώσσα (De Morgan, Boole). Είναι κατάλληλη για τη μελέτη μαθηματικών εννοιών αλλά και προβλημάτων από άλλους κλάδους όπως η Πληροφορική.
- Τον $20^{ο}$ αιώνα η Λογική αναπτύχθηκε ιδιαίτερα. Τρεις σχολές:
  - **Αλγεβρική** (Boole, Venn, Peirce κλπ.)**.** Λογισμός των προτάσεων, των συνόλων κλπ.
  - **Λογικιστική** (Frege, Russell, Whitehead). Προσπάθεια για θεμελίωση των μαθηματικών μέσω της Λογικής
  - **Φορμαλιστική** (Dedekind, Peano, Hilbert). Προσπάθεια για ορισμός αξιωματικών συστημάτων για κάθε κλάδο των Μαθηματικών.

Εισαγωγή (συνέχεια…)

- Μια **Τυπική Γλώσσα** (Formal Language) ορίζεται από
  1. Ένα **αλφάβητο**
  2. Ένα σύνολο **κανόνων σύνταξης**
- Το αλφάβητο είναι ένα πεπερασμένο (τις περισσότερες φορές) ή ακόμη και αριθμήσιμο σύνολο συμβόλων **Σ** .Π.χ.
  - Σ_1 =Τα κεφαλαία γράμματα του Ελληνικού αλφαβήτου,
  - Σ_2 ={α,β,γ},
  - Σ_3 ={0,1} κλπ.
- **Συμβολοσειρά (string) ή λέξη:** Παράθεση από σύμβολα του αλφαβήτου
  - Στο Σ_1: ΑΑΒΑΒ, ΚΑΛΗΜΕΡΑ
  - Στο Σ_2: ααβ, γγαβα, κλπ.
  - Στο Σ_3: 01011, 1001 κλπ.

Εισαγωγή (συνέχεια…)

- Οι **κανόνες σύνταξης** περιγράφουν ποιες από τις συμβολοσειρές μας ενδιαφέρει να συμπεριληφθούν στην γλώσσα μας

- Μια **Τυπική Γλώσσα L** είναι λοιπόν ένα σύνολο από συμβολοσειρές που όλες υπακούουν στους συντακτικούς κανόνες
  1. Στο Σ_1 : L=όλες οι λέξεις της Ελληνικής γλώσσας στα κεφαλαία
  2. Στο $\Sigma_{2:}$ L={ααβγ, γγβα, βββ}, L={x| x συμβολοσειρά με τα γράμματα α,β,γ που δεν έχει 3 α συνεχόμενα} κλπ
  3. Μια οποιαδήποτε γλώσσα προγραμματισμού (π.χ. C, FORTRAN, PYTHON) είναι μια τυπική γλώσσα στο κατάλληλο αλφάβητο (λατινικό αλφάβητο + αριθμητικά ψηφία + ειδικοί χαρακτήρες)

Εισαγωγή (συνέχεια…)

- Η Συμβολική Λογική γενικά και ειδικότερα η απλούστερη μορφή της η **Προτασιακή Λογική (ΠΛ)** ορίζει μια απλή τυπική γλώσσα της οποίας μελετά την μορφή και τις ιδιότητες.
  - Με την ΠΛ μπορούμε να κωδικοποιήσουμε προτάσεις της φυσικής γλώσσας που μπορούν χαρακτηριστούν **Αληθείς** ή **Ψευδείς** (**δηλωτικές προτάσεις**) από την γνώση του φυσικού κόσμου που έχουμε.
  - **Παραδείγματα**:
    a) «Σήμερα έχει ήλιο» √
    b) «Το ποτήρι είναι άδειο» √
    c) «Αν έχει ήλιο, τότε δεν βρέχει» √
    d) «Έχει ήλιο και βρέχει» √
    e) «Τι καιρό θα έχει αύριο;» ×
    f) «Θα ήθελα να πάω μια εκδρομή» ×

Εισαγωγή (συνέχεια…)

- Στην ΠΛ δεν έχουμε αρκετά εργαλεία γα να μελετήσουμε το νόημα των δηλωτικών προτάσεων πέρα από το να τις κωδικοποιήσουμε και (σε επόμενο στάδιο) να τους αποδώσουμε μια τιμή Αλήθεια ή Ψέμα.
  - Οι στοιχειώδεις δηλωτικές προτάσεις (όπως οι (a) και (b)) αντιπροσωπεύονται από σύμβολα που ονομάζονται **προτασιακές μεταβλητές**.
  - Οι προτασιακές μεταβλητές συμμετέχουν στο σχηματισμό πιο σύνθετων εκφράσεων οι οποίες ονομάζονται **προτασιακοί τύποι**. Οι προτασιακοί τύποι αντιπροσωπεύουν στο πλαίσιο της ΠΛ, σύνθετες δηλωτικές προτάσεις όπως οι (c) και (d).

Η Γλώσσα της ΠΛ

Η **γλώσσα της ΠΛ** συμβολίζεται με $\mathbf{\Gamma_0}$ και χρησιμοποιεί τα παρακάτω σύμβολα:

- **Προτασιακές Μεταβλητές**:
  - $p, q, r, \ldots$ σύνολο **$\mathbf{M(\Gamma_0)}$**
- **Σύνδεσμοι**:
  - $\neg$ **Άρνηση** (όχι …)
  - $\wedge$ **Σύζευξη** (… και …)
  - $\vee$ **Διάζευξη** (… ή …)
  - $\rightarrow$ **Συνεπαγωγή** (αν …, τότε …)
  - $\leftrightarrow$ **Ισοδυναμία** (… αν και μόνο αν …)
- **Παρενθέσεις**:
  - (,) **αριστερή και δεξιά παρένθεση**
- Δηλαδή το αλφάβητο της ΠΛ είναι $\Sigma = M(\Gamma_0) \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (\ ,\ )\}$

Συντακτικό της $Γ_0$

- **Έκφραση ή συμβολοσειρά**: μια πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων της $Γ_0$.

  Παράδειγμα: Η παρακάτω ακολουθία είναι έκφραση

  $$\wedge\, p \rightarrow (q\, \neg\, r\,)\vee p$$

- **Προτασιακός τύπος:** είναι μια έκφραση *α* η οποία υπακούει στους συντακτικούς κανόνες της ΠΛ. Η α λοιπόν είναι:
  - είτε προτασιακή μεταβλητή, δηλαδή $\boldsymbol{\alpha \in \mathrm{M}(\Gamma_0)}$, είτε
  - της μορφής $\boldsymbol{(\neg \beta)}$ ή $\boldsymbol{(\beta \wedge \gamma)}$ ή $\boldsymbol{(\beta \vee \gamma)}$ ή $\boldsymbol{(\beta \rightarrow \gamma)}$ ή $\boldsymbol{(\beta \leftrightarrow \gamma)}$,

  όπου *β*, *γ* είναι ήδη κατασκευασμένοι προτασιακοί τύποι.

- Το σύνολο των προτασιακών τύπων της $Γ_0$ συμβολίζεται με $\mathbf{T(\Gamma_0)}$.
- Συνηθίζεται οι τύποι να συμβολίζονται με τα γράμματα ***φ, χ, ψ,*** κ.λπ.

Παράδειγμα: Οι παρακάτω εκφράσεις είναι προτασιακοί τύποι:

$$p \qquad (\neg q) \qquad (p \rightarrow (\neg q)) \qquad ((r \wedge p) \rightarrow (\neg q)) \qquad ((\neg q) \vee (p \wedge (p \rightarrow (\neg q))))$$

Συντακτικό της Γ_0 (συνέχεια…)

- **Απλοποίηση παρενθέσεων:** Για να αποφεύγεται η άσκοπη πολλαπλή χρήση παρενθέσεων που καθιστούν τους τύπους δυσανάγνωστους:
  - Διαγράφουμε τις εξωτερικές παρενθέσεις
  - Συμφωνούμε στη ακόλουθη προτεραιότητα μεταξύ των συνδέσμων:

    $$\{\neg\},\{\wedge, \vee\}, \{\rightarrow, \leftrightarrow\}$$

    όπου οι σύνδεσμοι $\{\wedge, \vee\}$ έχουν ίδια προτεραιότητα όπως και οι $\{\rightarrow, \leftrightarrow\}$.

    Σημείωση: Ορισμένοι συγγραφείς θεωρούν ότι ο $\wedge$ προηγείται του $\vee$
  - Η σειρά συνδέσμων με ίδια προτεραιότητα πρέπει να καθορίζεται με παρενθέσεις
  - Σημείωση: Στην περιοχή της *Λογικής Σχεδίασης* είναι αποδεκτές εκφράσεις με διαδοχικές συζεύξεις ή διαζεύξεις χωρίς παρενθέσεις. Π.χ. $p \wedge q \wedge r \wedge s$.
  - Διαγράφουμε τις παρενθέσεις όταν αυτές δεν είναι απαραίτητες βάσει της προηγούμενης σύμβασης.

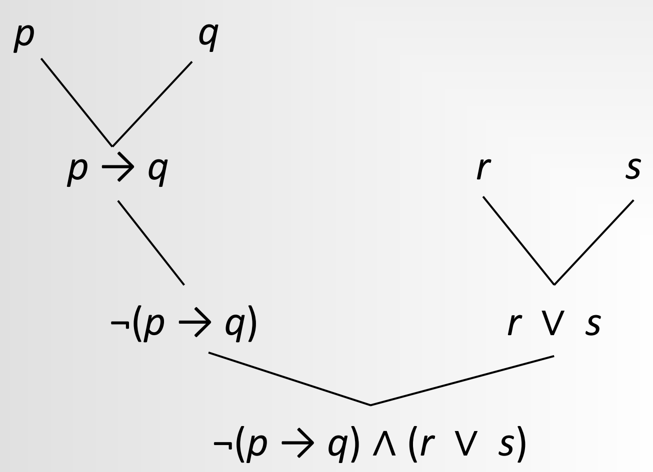
Παράδειγμα: Με την απλοποίηση των περιττών παρενθέσεων, οι τύποι του προηγούμενου παραδείγματος γίνονται:

$p \qquad \neg q \qquad p \rightarrow \neg q \qquad r \wedge p \rightarrow \neg q \qquad \neg q \vee (p \wedge (p \rightarrow \neg q))$

Δενδροδιαγράμματα

- Η δομή ενός προτασιακού τύπου μπορεί να απεικονιστεί με τη βοήθεια ενός **δενδροδιαγράμματος.**

Παράδειγμα: Ο προτασιακός τύπος **¬(*p* → *q*) ∧ (*r* ∨ *s*)** μπορεί να παρασταθεί με το δενδροδιάγραμμα:



Δενδροδιαγράμματα

- Το δενδροδιάγραμμα στην ουσία δείχνει την προϊστορία κατασκευής του τύπου μας, δηλαδή πως παράχθηκε από τους συντακτικούς κανόνες της ΠΛ.

- Ισχύει το **Θεώρημα της Μοναδικής Αναγνωσιμότητας.**
  - **Ένας ορθά συνταγμένος τύπος έχει ένα και μοναδικό δενδροδιάγραμμα**.
  - Στην ουσία αυτό μας λέει ότι δεν υπάρχει παρά ένας και μόνον τρόπος να διαβάσουμε έναν τύπο της ΠΛ.

- Χρειάζεται προσοχή στις παρενθέσεις. Αν έχουμε αμφιβολία είναι καλύτερο να βάλουμε παρενθέσεις

Παραδείγματα - Ασκήσεις

- Άσκηση: Ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις είναι **προτασιακοί τύποι**, ποιες όχι, και γιατί;

  i. $p \wedge (p \to q) \to q$

  ii. $p \to (q \neg (p \to q))$

  iii. $p \wedge (q \to r) \to (q \vee r)$

  iv. $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$

  v. $p \to q \to r$

  vi. $(p \to \neg q) \leftrightarrow (p \wedge q)$

  vii. $(p \neg \vee q) \to (p \vee \neg q)$

  viii. $(p \wedge q \ \vee r) \to q$

- Είναι οι i, iii, iv, vi. Άσκηση: Κατασκευάστε τα δενδροδιαγράμματα τους
- Κατασκευάστε όλους τους τύπους στο $T(\Gamma_0)$ που χρησιμοποιούν μόνο τις προτασιακές μεταβλητές p και r και το πολύ έναν λογικό σύνδεσμο.
- $p, r, \neg p, \neg r, p \wedge r, p \vee r, p \to r, p \leftrightarrow r, r \wedge p, r \vee p, r \to p, r \leftrightarrow p, p \to p, p \wedge p, p \vee p,$ $p \leftrightarrow p, r \to r, r \wedge r, r \vee r, r \leftrightarrow r$
- Άσκηση: Κατασκευάστε όλους τους τύπους στο $T(\Gamma_0)$ που χρησιμοποιούν μόνο τις μεταβλητές p, q, r και τους συνδέσμους $\neg$, $\to$ μία φορά μόνο. (Προσοχή! Είναι αρκετοί!)

Αρχή της Επαγωγής στο $T(\Gamma_0)$

- Για να αποδείξουμε ότι μια ιδιότητα ισχύει για οποιοδήποτε προτασιακό τύπο, μπορούμε να εφαρμόσουμε **επαγωγή στην πολυπλοκότητα των τύπων**. Η θεωρητική διατύπωση αυτής της μεθόδου είναι η εξής:
- **Αρχή της Επαγωγής**: Αν $A \subseteq T(\Gamma_0)$, τέτοιο που
  - $M(\Gamma_0) \subseteq A$ και
  - Αν για κάθε $\chi, \psi \in A$, οι $(\neg\chi)$, $(\chi \wedge \psi)$, $(\chi \vee \psi)$, $(\chi \rightarrow \psi)$, $(\chi \leftrightarrow \psi)$ ανήκουν στο Α,

  τότε $A = T(\Gamma_0)$.
- Στην πράξη ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:
  - **Βασικό βήμα:** Αποδεικνύουμε ότι η ιδιότητα ισχύει για προτασιακές μεταβλητές.
  - **Επαγωγική Υπόθεση:** Υποθέτουμε ότι η ιδιότητα ισχύει για τυχόντες προτασιακούς τύπους χ, ψ,
  - **Επαγωγικό Βήμα:** Αποδεικνύουμε ότι η ιδιότητα ισχύει για τύπους της μορφής $(\neg\chi)$, $(\chi \wedge \psi)$, $(\chi \vee \psi)$, $(\chi \rightarrow \psi)$ και $(\chi \leftrightarrow \psi)$.

Αρχή της Επαγωγής στο T(Γ_0) (συνέχεια…)

Παράδειγμα. Χρησιμοποιώντας επαγωγή στην πολυπλοκότητα των τύπων, να δειχθεί ότι κάθε τύπος περιέχει άρτιο αριθμό παρενθέσεων.

- **Βασικό βήμα**: Αν $\varphi = p \in M(\Gamma_0)$ ο αριθμός των παρενθέσεων είναι μηδέν, ο οποίος είναι άρτιος.
- **Επαγωγική υπόθεση**: Έστω ότι τυχόντες τύποι χ, ψ περιέχουν άρτιο αριθμό παρενθέσεων.
- **Επαγωγικό βήμα**: Εξετάζουμε περιπτώσεις:
  - Αν $\varphi = (\neg\psi)$, ο φ περιέχει όσες παρενθέσεις περιέχει ο ψ, συν 2. Όμως από την ε.υ. ο ψ περιέχει άρτιο πλήθος παρενθέσεων. Άρα το ίδιο ισχύει και για τον φ.
  - Αν $\varphi = (\psi * \chi)$, όπου * κάποιος από τους $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$. Ο φ περιέχει όσες παρενθέσεις περιέχει ο ψ, συν τις παρενθέσεις του χ, συν 2. Επειδή από την ε.υ. οι χ, ψ έχουν άρτιο πλήθος παρενθέσεων, το ίδιο ισχύει και για το φ.

Αρχή της Επαγωγής στο T(Γ_0) (άσκηση)

Ορισμός. **Ύψος** ενός δενδροδιαγράμματος είναι το μήκος (δηλ. ο αριθμός των ακμών) του μακρύτερου μονοπατιού από την ρίζα προς οποιοδήποτε φύλλο.

- **Αν φ προτασιακός τύπος, συμβολίζουμε με:**
  - **υ(*φ*)** το ύψος του δενδροδιαγράμματος του *φ*
  - **μ(*φ*)** τον αριθμό των μεταβλητών στον *φ*
  - **σ(*φ*)** τον αριθμό των συνδέσμων στον *φ*

- **Δείξτε** με επαγωγή στην πολυπλοκότητα των τύπων ότι για το δενδροδιάγραμμα οποιουδήποτε τύπου *φ* ισχύει:

$$\mu(\varphi) + \sigma(\varphi) \leq 2^{\upsilon(\varphi)+1} - 1$$

- **Βάση της επαγωγής**: Αν φ προτασιακή μεταβλητή τότε $\upsilon(\varphi)=0$, $\mu(\varphi)=1$, $\sigma(\varphi)=0$. Δηλαδή θα πρέπει $1+0 \leq 2^{0+1} - 1$, που **ισχύει**

Αρχή της Επαγωγής στο $T(\Gamma_0)$ (άσκηση)

- **Υπόθεση της επαγωγής.** Έστω φ και ψ τύποι και οι αντίστοιχες παράμετροι τους για τις οποίες ισχύουν:
  - $\mu(\varphi) + \sigma(\varphi) \leq 2^{\upsilon(\varphi)+1} -1$ (για τον φ) και
  - $\mu(\psi) + \sigma(\psi) \leq 2^{\upsilon(\psi)+1} -1$ (για τον ψ)
- **Επαγωγικό βήμα.**
  - Έστω $\chi = \neg\varphi$. Τότε
  1. $\upsilon(\chi)=\upsilon(\varphi)+1$
  2. $\mu(\chi)=\mu(\varphi)$
  3. $\sigma(\chi)=\sigma(\varphi)+1$.
  - Οπότε $\mu(\chi)+\sigma(\chi)=\mu(\varphi)+\sigma(\varphi)+1 \leq 2^{\upsilon(\varphi)+1} -1 +1$ (από την υπόθεση) =
  - $2^{\upsilon(\chi)} \leq 2^{\upsilon(\chi)+1} -1$

Αρχή της Επαγωγής στο $T(\Gamma_0)$ (άσκηση, συνέχεια)

- Αν τώρα $\chi=\varphi * \psi$ όπου * οποιοσδήποτε διμελής σύνδεσμος, έχουμε

1. $\upsilon(\chi)=\max\{\upsilon(\varphi),\upsilon(\psi)\}+1$
2. $\mu(\chi) = \mu(\varphi) + \mu(\psi)$
3. $\sigma(\chi) =\sigma(\varphi) + \sigma(\psi) +1$

- Οπότε $\mu(\chi) + \sigma(\chi) = \mu(\varphi) + \mu(\psi) + \sigma(\varphi) + \sigma(\psi) + 1 \leq$
- $\leq 2^{\upsilon(\varphi)+1} -1 + 2^{\upsilon(\psi)+1} -1 +1$ (υπόθεση της επαγωγής)
- $\leq 2\cdot 2^{\max\{\upsilon(\varphi), \upsilon(\psi)\}+1} -1= 2\cdot 2^{\upsilon(\chi)} -1=$
- $2^{\upsilon(\chi) +1} -1$

Ασκήσεις

1. Ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις είναι τύποι της προτασιακής λογικής, ποιες όχι και γιατί; Για όσες είναι τύποι σχεδιάστε το δενδροδιάγραμμα τους και υπολογίστε το ύψος του και τον αριθμό των ακμών του.
    1. $(p_1 \to p_2 \vee \neg p_3) \leftrightarrow (p_2 \wedge p_3)$
    2. $(p \to q) \vee (q \to r) \wedge (r \to q)$
    3. $(((\neg\neg p_1 \wedge p_2) \neg p_3) \to p_1) \vee (p_2 \vee p_3)$
    4. $(p \vee q) \to r) \leftrightarrow (r \vee q)$
    5. $p_1 \vee (((p_1 \to \neg p_3 \wedge p_4) \vee (\neg p_2 \wedge p_3)) \wedge (p_2 \to p_3)) \to p_4$
    6. $((((p_1 \to p_2) \vee p_3) \to p_4) \vee p_5) \to p_6$
2. Για έναν τύπο *φ* της προτασιακής λογικής ορίζουμε με *π*(*φ*) το πλήθος των υποτύπων που εμφανίζονται στο δενδροδιάγραμμα του (συμπεριλαμβανομένου του *φ)*. Π.χ. στο δενδροδιάγραμμα της σελίδας 10, *π*(*φ*)=8. Γράψτε έναν τύπο *φ* του οποίου το δενδροδιάγραμμα έχει ύψος 3 και *π*(*φ*) =12.
3. Δείξτε με επαγωγή στην πολυπλοκότητα του τύπου ότι για ένα τύπο *φ* της προτασιακής λογικής ισχύει (δείτε την προηγούμενη άσκηση για τον ορισμό του *π*(.)):

$$\pi(\varphi) \leq 2\sigma(\varphi) + 1$$