Θεωρία Γραφημάτων

Διακριτά Μαθηματικά – Θεωρία Γραφημάτων

Πανεπιστήμιο Πατρών

Τμήμα Μαθηματικών

Δένδρα – ορισμοί – χαρακτηρισμοί

- **Δένδρο** είναι ένα ακυκλικό και συνεκτικό γράφημα.
- **Δάσος** είναι ένα γράφημα του οποίου οι συνεκτικές συνιστώσες είναι δένδρα.
- Οι κορυφές ενός δένδρου με βαθμό 1, ονομάζονται **φύλλα**.
- Πρόταση. Κάθε δένδρο με $n \geq 2$ κορυφές, έχει τουλάχιστον δύο φύλλα.
  - Απόδειξη. Ξεκινάμε από μια τυχαία κορυφή u του T. Βρίσκουμε ένα γείτονα v της u, μετά ένα γείτονα της v διαφορετικό από την u, μετά ένα γείτονα του γείτονα (που δεν έχουμε επισκεφτεί) κλπ. Επειδή κάθε φορά επισκεπτόμαστε καινούργια κορυφή και το γράφημα δεν έχει κύκλους, αναγκαστικά θα φτάσουμε σε μια κορυφή w που δεν έχει άλλο γείτονα, άρα έχει βαθμό 1 (είναι φύλλο). Εκκινώντας και πάλι την ίδια διαδικασία από την w θα πρέπει πάλι να καταλήξουμε σε άλλη μία κορυφή βαθμού 1.
- Οι κορυφές βαθμού 1 λέγονται εξωτερικές και βαθμού >1 εσωτερικές.

Δένδρα – χαρακτηρισμοί

- Έστω T γράφημα με n κορυφές. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

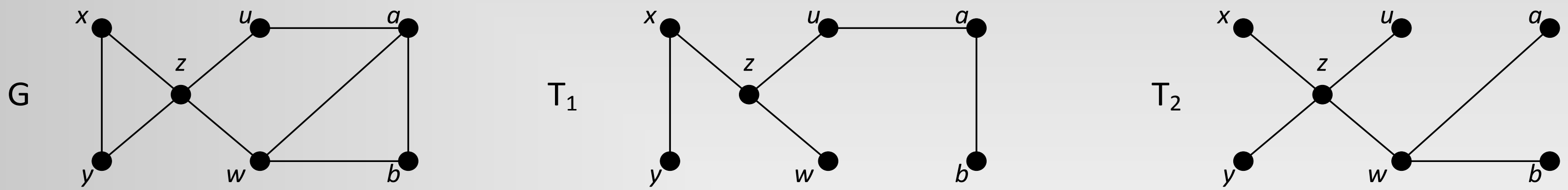
1. Το T είναι ακυκλικό και συνεκτικό (είναι δένδρο)
2. Το T είναι συνεκτικό και έχει n-1 ακμές
3. Το T είναι ακυκλικό και έχει n-1 ακμές
4. Μεταξύ δύο οποιονδήποτε κορυφών του T υπάρχει ένα και μόνο μονοπάτι
5. Το T είναι συνεκτικό και κάθε ακμή του είναι γέφυρα
6. Το T είναι ακυκλικό και η προσθήκη οποιασδήποτε ακμής δημιουργεί ένα κύκλο
   - Απόδειξη. (1)$\rightarrow$(2). Επαγωγή στο n. Για n=1, ισχύει. Υπόθεση: Έστω ότι κάθε ακυκλικό και συνεκτικό γράφημα με $n\geq 1$ κορυφές έχει n-1 ακμές. Βήμα: Έστω T ακυκλικό και συνεκτικό γράφημα με n+1 κορυφές. Από την πρόταση το T έχει τουλάχιστον 2 φύλλα u και v. Αφαιρούμε το u (και άρα και την ακμή που το έχει άκρο). Το γράφημα που απομένει έχει n κορυφές και είναι ακυκλικό και συνεκτικό άρα από την υπόθεση έχει n-1 ακμές. Άρα το T είχε n ακμές. Ό.ε.δ.

Δένδρα – χαρακτηρισμοί (συνέχεια)

- (2)$\rightarrow$(3). Έστω Τ συνεκτικό γράφημα με n-1 ακμές. Αν έχει κύκλους αφαιρούμε ακμές από τους κύκλους χωρίς να χαλάσουμε την συνεκτικότητα μέχρι να μην υπάρχει κύκλος στο γράφημα. Ότι απέμεινε είναι συνεκτικό και ακυκλικό γράφημα και από το (1) $\rightarrow$(2) έχει n-1 ακμές. Άρα το Τ είχε περισσότερες, άτοπο.
- (3) $\rightarrow$(1). Έστω Τ ακυκλικό γράφημα με n-1 ακμές. Έστω ότι έχει k>1 συνεκτικές συνιστώσες. Κάθε συνιστώσα i με n_i κορυφές είναι συνεκτικό και ακυκλικό γράφημα άρα από το (1) $\rightarrow$(2) έχει n_i -1 ακμές. Συνολικά λοιπόν οι ακμές είναι n-k για k>1, άτοπο.
- (1) $\rightarrow$(4). Έστω Τ συνεκτικό και ακυκλικό γράφημα και u και v δύο κορυφές του. Επειδή είναι συνεκτικό υπάρχει ένα u-v μονοπάτι. Αν δεν ήταν μοναδικό θα υπήρχε κύκλος στο Τ, άτοπο.
- (4) $\rightarrow$(5). Επειδή δύο κορυφές συνδέονται με ένα και μόνο μονοπάτι, η αφαίρεση μιας οποιασδήποτε ακμής στο μονοπάτι, χαλάει την συνεκτικότητα, άρα η ακμή είναι γέφυρα.
- (5) $\rightarrow$(6). Αν το Τ είναι συνεκτικό και κάθε ακμή του είναι γέφυρα, τότε αν είχε κύκλο η αφαίρεση μιας ακμής του κύκλου δεν θα χαλούσε την συνεκτικότητα, άτοπο. Άρα η πρόσθεση μιας ακμής δημιουργεί ένα κύκλο.
- (6) $\rightarrow$(1). Αν το Τ είναι ακυκλικό και η προσθήκη μιας οποιασδήποτε ακμής δημιουργεί κύκλο τότε δεν μπορεί να έχει 2 ή περισσότερες συνιστώσες γιατί θα μπορούσαμε να προσθέσουμε ακμή μεταξύ δύο συνιστωσών χωρίς να δημιουργηθεί κύκλος, άτοπο.

Συνδετικά δένδρα

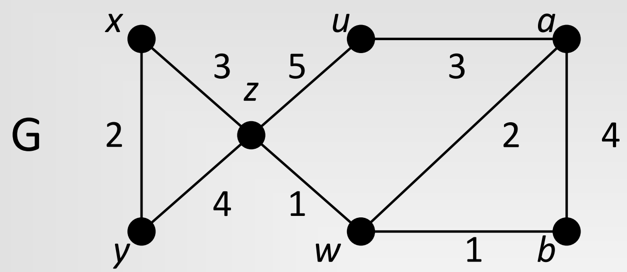
- Έστω G=(V,E) ένα συνεκτικό γράφημα. Ένα υπογράφημα T=(V,E’) του G που είναι δένδρο λέγεται συνδετικό ή σπονδυλωτό δένδρο του G (spanning tree).



- Θεώρημα. Κάθε συνεκτικό γράφημα έχει τουλάχιστον ένα συνδετικό δένδρο.
- Απόδειξη. Έστω T ένα συνεκτικό υπογράφημα του G με τον ελάχιστο αριθμό ακμών. Έστω ότι το T έχει κύκλο. Αφαιρούμε μία ακμή του κύκλου. Το υπογράφημα παραμένει συνεκτικό και έχει μικρότερο αριθμό ακμών από το T, άτοπο.
- Γενικά ένα γράφημα έχει πολλά συνδετικά δένδρα.
- Θεώρημα Cayley. Το πλήθος των συνδετικών υποδένδρων του K_n όπου οι κορυφές του έχουν ετικέτες (είναι διακεκριμένες) είναι n^{n-2}.

Γραφήματα με βάρη. Το ελάχιστο συνδετικό δένδρο

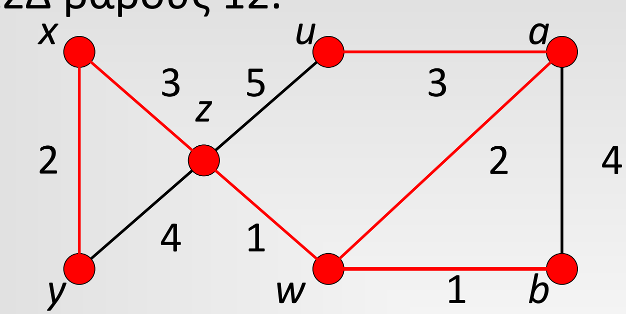
- Πολλά προβλήματα μοντελοποιούνται σαν γραφήματα στα οποία οι ακμές έχουν «βάρη» δηλ. πραγματικούς αριθμούς που μπορούν να παριστάνουν κόστη μετάβασης από κορυφή σε κορυφή, κόστη σύνδεσης κλπ.



- Εύρεση ενός ελάχιστου συνδετικού δένδρου (ΕΣΔ)
- **Αλγόριθμος του Prim για εύρεση του ΕΣΔ**. Ξεκινάμε από μια αυθαίρετη κορυφή και συντηρούμε ένα μερικό ΕΣΔ T που σε κάθε επανάληψη αυξάνει κατά μία ακμή (και κορυφή). Η ακμή που προστίθεται στο T είναι η uv με u ϵ V(T) και v ϵ V-V(T) με το ελάχιστο βάρος. Όταν V(T)=V (δηλαδή όταν όλες οι κορυφές έχουν μπει στο T), ο αλγόριθμος τερματίζει.

Ελάχιστο Συνδετικό Δένδρο

- Στο προηγούμενο παράδειγμα αν αρχίσουμε από την κορυφή u εισάγουμε διαδοχικά τις ακμές (και τα άκρα τους) ua, aw, wb, wz, zx, xy και παίρνουμε το παρακάτω (κόκκινο) ΕΣΔ βάρους 12.



- Θεώρημα. Ο αλγόριθμος του Prim σωστά υπολογίζει ένα ΕΣΔ.
  - Απόδειξη. Ο αλγόριθμος προφανώς επιστρέφει ένα συνδετικό δένδρο T βάρους w(T). Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα άλλο συνδετικό δένδρο w(T’) με w(T’)<w(T). Έστω e η ακμή του T’ με το μικρότερο βάρος η οποία δεν υπάρχει στο T. Αν την αφαιρέσουμε από το T’, αυτό διαμερίζεται σε δύο δένδρα με σύνολα κορυφών S και V-S. Στο T όμως υπάρχει μία τουλάχιστον ακμή e’ που γεφυρώνει την τομή S και V-S και από τον τρόπο που επιλέγει τις ακμές ο αλγόριθμος του Prim, w(e’)≤w(e). Άρα το T’-e+e’ είναι επίσης ΕΣΔ και έχει βάρος μικρότερο του T’, άτοπο.