
Θεωρία Γραφημάτων

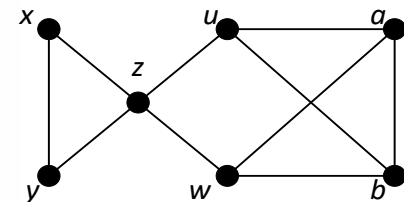
Διακριτά Μαθηματικά – Θεωρία Γραφημάτων

Πανεπιστήμιο Πατρών

Τμήμα Μαθηματικών

Διαδρομές και κύκλοι

- Ένας **περίπατος μήκους k** είναι μια ακολουθία $v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k$ από εναλλασσόμενες κορυφές και ακμές τέτοια που $e_i = v_{i-1}v_i$ για κάθε $1 \leq i \leq k$.
 - Μία **διαδρομή** είναι ένας περίπατος χωρίς επαναλαμβανόμενες ακμές
 - Ένα **μονοπάτι** είναι μια διαδρομή χωρίς επαναλαμβανόμενες κορυφές
 - Ένας **κύκλος** είναι μια **κλειστή διαδρομή**, δηλαδή μια διαδρομή όπου $v_0 \equiv v_k$
 - Ένας **απλός κύκλος** είναι ένα κλειστό μονοπάτι
 - Αν δεν διευκρινίζουμε αλλιώς, λέγοντας «κύκλος» θα εννοούμε απλό κύκλο
- Οι διαδρομές, περίπατοι κλπ. σε **απλά** γραφήματα παριστάνονται απλούστερα μόνο με παράθεση των κορυφών τους (όχι και με τις ενδιάμεσες ακμές)
 - Περίπατος: $x, z, y, z, w, a, u, z, w$
 - Διαδρομή: $u, a, b, u, z, y, x, z, w$
 - Μονοπάτι: x, z, u, b, a
 - Κύκλος (όχι απλός): w, z, x, y, z, u, a, w
 - Κύκλος (απλός): z, u, a, b, w, z

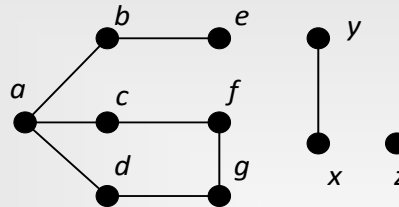


Διαδρομές και κύκλοι (συνέχεια...)

- **Λήμμα.** Μία διαδρομή (άρα και ένας περίπατος) με άκρα u, v περιλαμβάνει ένα μονοπάτι με άκρα u, v
 - **Απόδειξη** (Σχήμα). Επαγωγή στο μήκος k της διαδρομής. Ισχύει για $k=0$ (απλή κορυφή). Για το επαγωγικό βήμα έστω w μια κορυφή στην διαδρομή που επαναλαμβάνεται περισσότερες της μίας φορές, v_i η πρώτη εμφάνιση της w στην διαδρομή και v_j η τελευταία (δηλαδή $w \equiv v_i \equiv v_j$). Αφαιρούμε το τμήμα της διαδρομής από την v_{i+1} στην v_j . Επαναλαμβάνουμε μέχρι να μην έχουμε επαναλαμβανόμενη κορυφή, δηλαδή παίρνουμε $u-v$ μονοπάτι.
- **Λήμμα.** Μία κλειστή διαδρομή περιττού μήκους περιλαμβάνει έναν (απλό) κύκλο περιττού μήκους.
 - **Απόδειξη** (Σχήμα). Παραλλαγή της παραπάνω. Εκτελούμε επαναληπτικά την παραπάνω διαδικασία και αφαιρούμε κάθε φορά υπο-διαδρομή **άρτιου** μήκους (δηλαδή με $j-i$ άρτιο). Το μήκος της κλειστής διαδρομής που μένει είναι περιττό. Όταν δεν υπάρχει άλλη κλειστή υπο-διαδρομή άρτιου μήκους τότε αν δεν υπάρχει ούτε περιττού, η αρχική έγινε κύκλος, αλλιώς μια επαναλαμβανόμενη κορυφή και η **αμέσως επόμενη** εμφάνιση της, είναι περιττός απλός κύκλος.
- **Παρατήρηση.** Αν η κλειστή διαδρομή είναι άρτια μπορεί να μην περιλαμβάνει κύκλο (π.χ. μονοπάτι που επαναλαμβάνεται προς τα πίσω)

Συνεκτικότητα

- Ένα γράφημα G λέγεται **συνεκτικό** αν για οποιοδήποτε ζευγάρι κορυφών του u, v υπάρχει ένα u - v μονοπάτι (δηλ. μονοπάτι με άκρα τις κορυφές u και v)
- **Συνεκτική συνιστώσα** είναι ένα **μεγιστικό συνεκτικό υπογράφημα**. Μια **τετριμμένη συνιστώσα** αποτελείται από μια μόνο κορυφή του G (απομονωμένη)



- Το πιο πάνω γράφημα έχει 3 συνεκτικές συνιστώσες με σύνολα κορυφών $\{a, b, c, d, e, f, g\}$, $\{x, y\}$, $\{z\}$
- Ένα **σημείο κοπής** είναι μία κορυφή που η αφαίρεση της αυξάνει τον αριθμό των συνεκτικών συνιστωσών του γραφήματος. Σημεία κοπής: a, b .
- **Γέφυρα** είναι μια ακμή που η αφαίρεση της αυξάνει τον αριθμό των συνεκτικών συνιστωσών του γραφήματος. Γέφυρες: ab, be, xy

Συνεκτικότητα (συνέχεια...)

□ Ένα γράφημα χωρίς σημείο κοπής λέγεται **δισυνεκτικό**.

□ Πρόταση. Μια ακμή είναι γέφυρα αν-ν δεν ανήκει σε κύκλο.

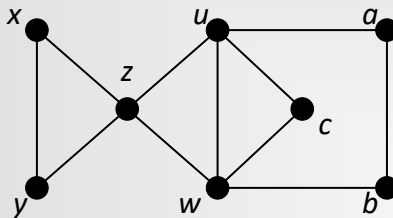
Απόδειξη. Έστω $e=xy$ γέφυρα που βρίσκεται στην συνιστώσα H του γραφήματος. Άρα υπάρχουν $u, v \in V(H)$ που η e βρίσκεται σε κάθε $u-v$ μονοπάτι. (Αλλιώς η αφαίρεση της e δεν θα άφηνε τις u, v σε διαφορετικές συνιστώσες.) Άρα και οι x, y είναι σε διαφορετικές συνιστώσες στο $H-e$ και συνεπώς δεν υπάρχει $x-y$ μονοπάτι στην $H-e$. Επομένως δεν υπάρχει κύκλος C που να περιλαμβάνει τη e γιατί αλλιώς το $C-e$ θα ήταν $x-y$ μονοπάτι. Αντίστροφα, αν η e δεν είναι γέφυρα, τότε τα x, y θα είναι στην ίδια συνιστώσα στο $G-e$, άρα θα υπάρχει διαδρομή άρα μονοπάτι m από το x στο y στο $G-e$, άρα και κύκλος στο G , το m και η ακμή e .

□ Ένα γράφημα είναι δισυνεκτικό αν-ν κάθε 2 κορυφές του u, v βρίσκονται σε κύκλο.

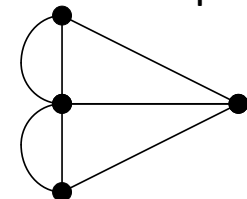
Απόδειξη. Έστω x σημείο κοπής στη συνιστώσα H . Άρα υπάρχουν κορυφές $u, v \in V(H)$ που βρίσκονται σε διαφορετική συνιστώσα στο $G-x$. Άρα η x βρίσκεται σε κάθε $u-v$ μονοπάτι και συνεπώς οι u, v δεν βρίσκονται σε κύκλο. Αντίστροφα, αν οι u, v δεν βρίσκονται σε κύκλο, τότε αναγκαστικά υπάρχει μία κορυφή x που βρίσκεται πάνω σε κάθε $u-v$ μονοπάτι. Συνεπώς η κορυφή x είναι σημείο κοπής.

Κύκλος Euler

- ❑ **Κύκλος Euler** είναι μια κλειστή διαδρομή που περιλαμβάνει όλες τις ακμές του γραφήματος. Ένα γράφημα που έχει κύκλο Euler λέγεται **γράφημα Euler**.
- ❑ **Παράδειγμα.** Στο παρακάτω γράφημα ένας κύκλος Euler είναι ο $x, y, z, w, b, a, u, c, w, u, z, x$



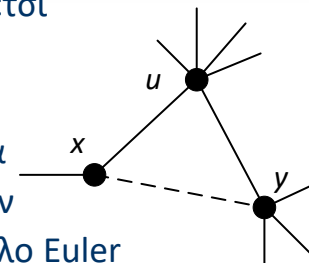
- ❑ **Θεώρημα (Euler).** Ένα γράφημα έχει κύκλο Euler αν-ν είναι συνεκτικό και κάθε κορυφή του έχει άρτιο βαθμό.
- ❑ **Παρατήρηση.** Το πρόβλημα των γεφυρών του Königsberg είναι ισοδύναμο με το αν υπάρχει κύκλος Euler στο γράφημα:
- ❑ Προφανώς όχι, επειδή υπάρχει κορυφή περιττού βαθμού



Κύκλος Euler (συνέχεια...)

□ Απόδειξη του Θεωρήματος του Euler.

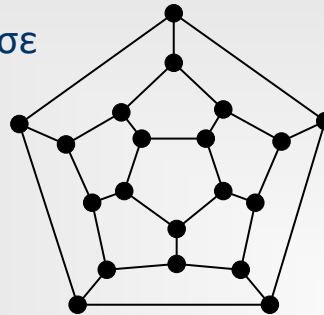
- **Αναγκαίο.** Προφανώς το γράφημα πρέπει να είναι συνεκτικό. Επιπλέον, ο κύκλος Euler επισκέπτεται κάθε κορυφή με μια ακμή και φεύγει από αυτή με μια άλλη. Άρα κάθε επίσκεψη του σε μια κορυφή απαιτεί βαθμό $+2$ από την προηγούμενη. Συνολικά, άρτιο.
- **Ικανό.** Επαγωγή στο πλήθος των ακμών m .
 - **Βάση.** Για $m=1$, μία κορυφή με μία ανακύκλωση έχει κύκλο Euler.
 - **Υπόθεση.** Έστω ότι κάθε συνεκτικό γράφημα με κορυφές άρτιου βαθμού και το πολύ $m \geq 1$ ακμές, έχει κύκλο Euler.
 - **Βήμα.** Έστω G συνεκτικό γράφημα με κορυφές άρτιου βαθμού και $m+1$ ακμές. Έστω u μία κορυφή που συνδέεται με τις κορυφές x και y που δεν συνδέονται μεταξύ τους (υπάρχουν 3 τέτοιες κορυφές). Αφαιρούμε τις ακμές ux και uy και προσθέτουμε την xy . Το γράφημα G' έχει τώρα m ακμές και οι κορυφές του έχουν πάλι άρτιο βαθμό. Αν λοιπόν είναι συνεκτικό έχει (ε.υ.) κύκλο Euler. Βρίσκουμε κύκλο Euler στο αρχικό τροποποιώντας τον κύκλο Euler του G' έτσι ώστε αντί να περάσει από την xy να περάσει από την xu και μετά από την uy . Αν το G' δεν είναι συνεκτικό, τότε οι x, y βρίσκονται σε μία συνιστώσα H_1 και η u σε άλλη H_2 . Οι H_1 και H_2 έχουν κάθε μία κύκλο Euler, οπότε στο αρχικό γράφημα βρίσκουμε τον κύκλο Euler στην H_1 όμως αντί να περάσουμε από την ακμή xy όταν φτάσουμε στην x ακολουθούμε την ακμή xu , πάμε στην H_2 ακολουθούμε τον κύκλο Euler της H_2 και επιστρέφουμε στην H_1 μέσω της uy και ολοκληρώνουμε τον κύκλο Euler.



Κύκλος Hamilton

- Ο **κύκλος Hamilton** είναι ένας απλός κύκλος που περιλαμβάνει όλες τις κορυφές του γραφήματος. Ένα γράφημα με κύκλο Hamilton λέγεται **γράφημα Hamilton** (Hamiltonian graph).
- Αν οι κορυφές είναι n τότε ο κύκλος έχει n κορυφές και n ακμές.

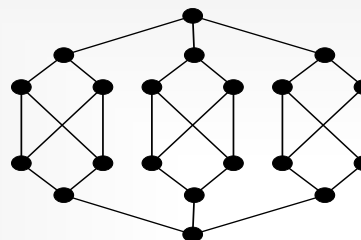
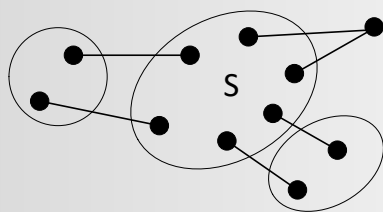
- Το δωδεκάεδρο που απασχόλησε τον Sir William Hamilton



- **Μονοπάτι Hamilton** είναι ένα απλό μονοπάτι το οποίο περιλαμβάνει όλες τις κορυφές του γραφήματος. Αν από ένα κύκλο Hamilton αφαιρέσουμε μια ακμή παίρνουμε μονοπάτι Hamilton.
- Σε αντίθεση με τα γραφήματα Euler δεν γνωρίζουμε καλό χαρακτηρισμό (δηλαδή εύκολα ελέγξιμη συνθήκη) για τα γραφήματα Hamilton.

Κύκλος Hamilton (συνέχεια...)

- Υπάρχουν μόνο αναγκαίες (και κάποιες ικανές) συνθήκες που μπορεί να μας διευκολύνουν όταν εξετάζουμε αν ένα γράφημα είναι Hamiltonian.
- Προφανείς παρατηρήσεις.
 - Γράφημα με κορυφή βαθμού 1 δεν μπορεί να έχει κύκλο Hamilton.
 - Αν μια κορυφή έχει βαθμό 2, ο κύκλος Hamilton αναγκαστικά περνά από τις ακμές της.
- **Μια αναγκαία συνθήκη.** Αν το G έχει κύκλο Hamilton τότε για κάθε μη κενό $S \subseteq V(G)$, το γράφημα $G-S$ έχει το πολύ $|S|$ συνιστώσες.



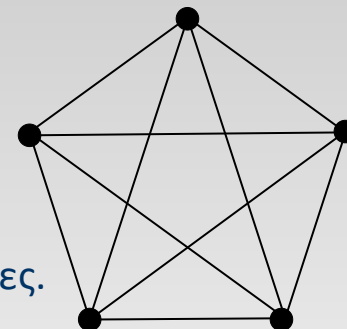
- Π.χ. το γράφημα στα δεξιά **δεν** έχει κύκλο Hamilton.
- **Μια ικανή συνθήκη (Θεώρημα του Dirac).** Αν το G είναι ένα απλό γράφημα με τουλάχιστον 3 κορυφές και $\delta(G) \geq n(G)/2$ τότε το G είναι Hamiltonian.

Ειδικά γραφήματα

□ Κάποια γραφήματα έχουν το δικό τους σύμβολο ή/και όνομα.

□ **Πλήρες γράφημα** n κορυφών (αλλιώς **κλίκα** n κορυφών), K_n .

- Απλό γράφημα n κορυφών που κάθε μία συνδέεται με όλες τις άλλες.
- Είναι κανονικό γράφημα βαθμού $n-1$.
- Το πλήθος των ακμών του είναι $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.



□ Ο κύκλος C_n : Απλός κύκλος με n κορυφές (και άρα και n ακμές).

□ Το μονοπάτι n κορυφών P_n . Έχει $n-1$ ακμές.

□ Διμερές είναι ένα γράφημα που οι κορυφές του διαμερίζονται σε δύο σύνολα έτσι ώστε κάθε ακμή να έχει τα δύο της άκρα σε διαφορετικά σύνολα.

- Όταν το πρώτο σύνολο έχει n κορυφές και το δεύτερο m και κάθε κορυφή του πρώτου συνόλου ενώνεται με κάθε κορυφή του δεύτερου, έχουμε ένα **πλήρες διμερές γράφημα** $K_{n,m}$.
- Πλήθος ακμών του $K_{n,m} = nm$

