Κυκλικές μεταθέσεις
Διακεκριμένα αντικείμενα σε διακεκριμένες υποδοχές
Διακριτή Πιθανότητα

1) Ένα καράβι διαθέτει n σημαίες και k διακεκριμένους ιστούς στους οποίους μπορεί να τις τοποθετήσει για να κάνει διάφορα σινιάλα. Πόσα σινιάλα μπορεί να σχηματίσει χρησιμοποιώντας όλες τις σημαίες

α) Αν όλες οι σημαίες είναι μη διακεκριμένες μεταξύ τους;

β) Αν όλες οι σημαίες είναι διαφορετικές και έχει σημασία η σειρά με την οποία οι σημαίες εμφανίζονται στον κάθε ιστό

Απάντηση:

α) Το πρόβλημα είναι ακριβώς αντίστοιχο με την τοποθέτηση n μη διακεκριμένων σφαιριδίων σε k διακεκριμένα κουτιά. Επομένως ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων είναι C(n+k-1, n).

β) Υπάρχουν n διακεκριμένες σημαίες που πρέπει να τοποθετηθούν στους k διακεκριμένους ιστούς, ενώ μετρά η σειρά τοποθέτησης. Υπάρχουν λοιπόν (δες σελ. 27):

$$\frac{(k+n-1)!}{(k-1)!}$$

2) Ρίχνουμε δύο ζάρια

i) Ποια η πιθανότητα Α(7) να φέρουμε άθροισμα 7 κατά την ρίψη 2 ζαριών; Ποια η πιθανότητα Α(6);

ii) Σε ένα παιχνίδι τάβλι με 2 ζάρια, ένα λευκό πούλι απέχει 7 θέσεις από ένα μαύρο. Ποια η πιθανότητα ΡΧ(7) να χτυπηθεί το λευκό πούλι από το μαύρο αν παίζουν τα μαύρα; Ποια η πιθανότητα ΡΧ(6);

Απάντηση:

i) Το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων κατά την ρίψη 2 διακεκριμένων ζαριών είναι 36 (διατάξεις 2 από 6 διακεκριμένων αντικείμενων με επανάληψη). Θεωρούμε ότι τα ζάρια είναι τίμια δηλαδή η πιθανότητα να προκύψει κάθε ένα από τα παραπάνω αποτελέσματα είναι 1/36. Άθροισμα 7 μπορούμε να έχουμε με 6 τρόπους: 1+6, 6+1, 2+5, 5+2, 3+4, 4+3. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι 6/36. Στην περίπτωση Α(6), έχουμε άθροισμα 6 με 5 τρόπους: 1+5, 5+1, 2+4, 4+2 και 3+3. Άρα Α(6)=5/36.

<u>Σημείωση:</u> Οι απαντήσεις δεν αλλάζουν αν θεωρήσουμε τα ζάρια ως μη διακεκριμένα, καθώς τα διαφορετικά αποτελέσματα είναι 21 (συνδυασμοί 2 από 6

διακεκριμένων αντικειμένων με επανάληψη), αλλά η πιθανότητα να συμβούν τα αποτελέσματα 1-1, 2-2, 3-3, 4-4, 5-5, 6-6 είναι 1/36, ενώ για όλα τα υπόλοιπα αποτελέσματα η πιθανότητα είναι 2/36.

ii) Για να χτυπηθεί το πούλι σε απόσταση 7 θέσεων, πρέπει το άθροισμα των δύο ζαριών να είναι 7, δηλαδή PX(7)=A(7)=6/36. Για να χτυπηθεί το πούλι σε απόσταση 6 θέσεων, πρέπει είτε το άθροισμα των δύο ζαριών να είναι 6 είτε ένα τουλάχιστον από τα δύο ζάρια να φέρει 6. Τα δύο αυτά ενδεχόμενα είναι αμοιβαία αποκλειόμενα. Όπως είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα, άθροισμα ίσο με 6 μπορεί να προκύψει με 5 τρόπους. Το να φέρει ένα τουλάχιστον ζάρι αποτέλεσμα ίσο με 6, μπορεί να συμβεί με 11 τρόπους: Το πρώτο ζάρι να φέρει 6 και το δεύτερο ζάρι οποιοδήποτε αποτέλεσμα, το δεύτερο ζάρι να φέρει 6 και το πρώτο ζάρι οποιοδήποτε αποτέλεσμα, με την παρατήρηση όμως ότι το αποτέλεσμα 6-6 έχει μετρηθεί 2 φορές. Επομένως έχουμε 5+11=16 τρόπους να χτυπηθεί το λευκό πούλι και η ζητούμενη πιθανότητα είναι PX(6)=16/36.

3) Ένα κωδικοποιημένο αλφάβητο αποτελείται από τέσσερις παύλες (-), 10 τελείες (.) και τα γράμματα A,B. Από σφάλμα του πομπού αποστέλλεται μια συμβολοσειρά με τα παραπάνω 16 σύμβολα σε αυθαίρετη σειρά. Ποια η πιθανότητα να μην υπάρχουν σε αυτήν τα γράμματα A και B σε διαδοχικές θέσεις;

Απάντηση

Όλες οι συμβολοσειρές: 16!/(4!10!)

Αυτές που περιέχουν τα AB ή τα BA: 2*15!/(4!10!)

Άρα οι συμβολοσειρές που δεν περιέχουν AB ή BA 16!/(4!10!)-2*15!/(4!10!).

Επομένως η πιθανότητα είναι 1-16/2*15=1-16/30=1-8/15=7/15

4) Δεκαπέντε (διακεκριμένα) φορτηγά περνάνε κάθε μέρα με την σειρά (δηλαδή διατεταγμένα) από έναν τελωνιακό σταθμό. Για λόγους ασφαλείας (εύφλεκτα φορτία) δύο συγκεκριμένα από αυτά πρέπει να έχουν 3 ακριβώς άλλα φορτηγά ανάμεσά τους

   i) Με πόσους τρόπους μπορούν να περάσουν από το τελωνείο τα φορτηγά;

   ii) Οι τελωνιακοί αποφασίζουν για μια συγκεκριμένη εβδομάδα να κάνουν έλεγχο κάθε μέρα στο 4^{o} και στο 5^{o} φορτηγό. Ποια είναι η πιθανότητα που έχει ένα φορτηγό με εύφλεκτο φορτίο να ελεγχθεί μια οποιαδήποτε μέρα της εβδομάδας αυτής;

Απάντηση:

i) Ας ονομάσουμε A και B τα φορτηγά που πρέπει οπωσδήποτε να έχουν 3 άλλα φορτηγά ανάμεσά τους. Τότε αν συμβολίσουμε με _ τις θέσεις των φορτηγών A και Β και με Χ τις θέσεις των υπόλοιπων φορτηγών, οι δυνατές τοποθετήσεις των Α και Β (χωρίς αυτή τη στιγμή να μας ενδιαφέρει αν το Α προηγείται του Β ή αντίστροφα) στη σειρά των φορτηγών είναι:

1. _XXX_XXXXXXXXXX
2. X_XXX_XXXXXXXXX

.

.

.

11. XXXXXXXXXX_XXX_

Αυτές είναι 11 διαφορετικές τοποθετήσεις αφού το φορτηγό που προηγείται μπορεί να βρεθεί στις θέσεις 1 έως 11 (για κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις η θέση του φορτηγού που έπεται είναι καθορισμένη).

Το προηγούμενο αποτέλεσμα θα μπορούσε να προκύψει εύκολα και με χρήση συνδυαστικών τύπων. Πράγματι μπορεί να θεωρηθεί ως πρόβλημα μεταθέσεων 11 αντικειμένων που χωρίζονται σε δύο ομάδες όμοιων αντικειμένων (η πρώτη ομάδα περιλαμβάνει μια φορά τη διάταξη _XXX_ και η δεύτερη περιλαμβάνει 10 φορές το σύμβολο Χ). Επομένως οι διαφορετικοί τρόποι είναι:

$$\frac{11!}{10!1!} = 11$$

Όμως για κάθε μία από τις παραπάνω 11 τοποθετήσεις έχουμε δύο τρόπους για να περάσουν τα φορτηγά Α και Β (πρώτο το Α και μετά το Β και αντίστροφα). Για κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις τα υπόλοιπα 13 φορτηγά μπορούν να περάσουν με οποιαδήποτε σειρά (πρόβλημα μεταθέσεων), άρα με 13! διαφορετικούς τρόπους. Σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου οι διαφορετικοί τρόποι για να περάσουν όλα τα φορτηγά είναι $2 \cdot 11 \cdot 13!$

ii) Ας χρησιμοποιήσουμε για τους υπολογισμούς μας το φορτηγό Α. Για να είναι το φορτηγό αυτό $4^{ο}$ ή $5^{ο}$ σε μια ημέρα της εβδομάδας θα πρέπει να έχουμε την $1^{η}$, $4^{η}$ ή $5^{η}$ από τις παραπάνω τοποθετήσεις (πιο συγκεκριμένα το Α να έπεται του Β στην $1^{η}$ τοποθέτηση και να προηγείται του Β στην $4^{η}$ και $5^{η}$ τοποθέτηση). Για κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις τα υπόλοιπα 13 φορτηγά μπορούν να περάσουν με οποιαδήποτε σειρά (πρόβλημα μεταθέσεων), άρα με 13! διαφορετικούς τρόπους. Επομένως υπάρχουν $3 \cdot 13!$ τρόποι για να βρεθεί το φορτηγό Α στην $4^{η}$ ή $5^{η}$ θέση, ενώ προφανώς το ίδιο ισχύει και για το φορτηγό Β. Επομένως η πιθανότητα να ελεγχθεί το φορτηγό Α είναι $(3 \cdot 13!)/(2 \cdot 11 \cdot 13!) = 3/22$

και ακριβώς ίση είναι η πιθανότητα να ελεγχθεί το φορτηγό Β. Θα πρέπει να προσέξουμε στο σημείο αυτό ότι τα δύο γεγονότα (δηλαδή να βρεθεί το φορτηγό Α στην $4^{η}$ ή $5^{η}$ θέση και να βρεθεί το φορτηγό Β στην $4^{η}$ ή $5^{η}$ θέση) είναι ξένα μεταξύ τους, δηλαδή δεν μπορούν να συμβούν ταυτόχρονα. Επομένως η πιθανότητα που υπάρχει ώστε να ελεγχθεί ένα οποιοδήποτε φορτηγό με εύφλεκτο φορτίο μια μέρα της εβδομάδας προκύπτει από το άθροισμα των πιθανοτήτων που αντιστοιχούν στα δύο φορτηγά και είναι 3/22+3/22=6/22.

5) Θεωρούμε ότι κάθε άνθρωπος κατά την γέννησή του έχει πιθανότητα να ανήκει σε ένα από τα 12 ζώδια της (δυτικής) αστρολογίας ίση με 1/12. Υπολογίστε την πιθανότητα τουλάχιστον 2 άτομα σε μια ομάδα 3 ατόμων να έχουν το ίδιο ζώδιο.

Απάντηση

Οι τρόποι να ανήκουν τα 3 άτομα σε διάφορα ζώδια (με δυνατότητα επανάληψης, δηλαδή και τα τρία άτομα ή δύο από αυτά να ανήκουν σε ίδια ζώδια) είναι αντίστοιχοι με τους σχηματισμούς λέξεων μήκους 3 χρησιμοποιώντας 12 γράμματα με δυνατότητα επανάληψης, δηλαδή 12^3 τρόπους.

Οι τρόποι να ανήκουν τα 3 άτομα σε διαφορετικά μεταξύ τους ζώδια είναι αντίστοιχοι με τους σχηματισμούς λέξεων μήκους 3 χρησιμοποιώντας 12 γράμματα χωρίς τη δυνατότητα επανάληψης, δηλαδή $(12)_3$ τρόπους. Οι τρόποι ώστε τουλάχιστον 2 άτομα σε μια ομάδα 3 ατόμων να ανήκουν στο ίδιο ζώδιο προκύπτουν αν από το σύνολο των περιπτώσεων αφαιρέσουμε εκείνες στις οποίες τα τρία άτομα ανήκουν σε διαφορετικά μεταξύ τους ζώδια, δηλαδή: $12^3 -(12)_3$. Η πιθανότητα τουλάχιστον 2 άτομα σε μια ομάδα 3 ατόμων να έχουν το ίδιο ζώδιο υπολογίζεται διαιρώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα με το σύνολο των περιπτώσεων, δηλαδή:

$$\Pi(2,3) = \frac{12^3 - (12)_3}{12^3}$$

6) Υπάρχουν εννέα υποψήφιοι για πρόσληψη σε μια υπηρεσία (μεταξύ των οποίων και ο κύριος Παπαδόπουλος) και τρεις κριτές για την επιλογή τους, κάθε ένας από τους οποίους διατάσσει σε μια σειρά (πρώτος έως ένατος) τους υποψηφίους. Ένας υποψήφιος προσλαμβάνεται αν βρεθεί στις τρεις πρώτες θέσεις και των τριών κριτών.
   i) Βρείτε πόσες είναι οι διαφορετικές διατάξεις που μπορούν να δώσουν και οι τρεις κριτές μαζί. Σε πόσες από αυτές ο κος Παπαδόπουλος προσλαμβάνεται;

ii) Αν όλες οι δυνατές διατάξεις που μπορεί να δώσει ένας κριτής είναι ισοπίθανες, ποια η πιθανότητα να προσληφθεί ο κος Παπαδόπουλος;

Απάντηση:

i) Κάθε κριτής μπορεί να δώσει 9! διαφορετικές κατατάξεις των εννέα υποψηφίων. Άρα από τον κανόνα του γινομένου υπάρχουν $(9!)^3$ διαφορετικές διατάξεις και των τριών κριτών μαζί. Αν ο κ. Παπαδόπουλος βρεθεί στη πρώτη θέση κάποιου κριτή, οι υπόλοιποι υποψήφιοι κατατάσσονται από τον ίδιο κριτή με 8! διαφορετικούς τρόπους. Το ίδιο και για την δεύτερη και για τη τρίτη θέση. Από τον κανόνα του αθροίσματος ένας κριτής μπορεί να δώσει $3\cdot 8!$ κατατάξεις που προκρίνουν τον κ. Παπαδόπουλο. Όλοι οι κριτές μαζί συνεπώς $(3\cdot 8!)^3$ διαφορετικές κατατάξεις που προκρίνουν τον κ. Παπαδόπουλο.

ii) Η πιθανότητα, από το (α), θα είναι $(3\cdot 8!)^3$ / $(9!)^3$ = $3^3/9^3$ =1/27.

Παρατήρηση: Στο ίδιο αποτέλεσμα του (β) καταλήγουμε αν παρατηρήσουμε ότι η πιθανότητα ένας κριτής να προκρίνει τον κ. Παπαδόπουλο είναι 1/3 (δηλ. να τον τοποθετήσει στις τρεις πρώτες από τις εννέα θέσεις). Άρα η συνολική πιθανότητα μια και η κατάταξη ενός κριτή είναι ανεξάρτητο ενδεχόμενο από την κατάταξη των άλλων, είναι 1/27.

7) Με πόσους τρόπους μπορούν να αντιμετατεθούν τα 26 γράμματα του αγγλικού αλφαβήτου ώστε να μην εμφανίζονται οι λέξεις car, dog, pun, byte;

Απάντηση

Έστω N= όλες οι λέξεις που κατασκευάζονται με τα 26 γράμματα του αγγλικού αλφαβήτου. Προφανώς |N|=26!

Έστω c1=λέξεις στο N που περιλαμβάνουν την λέξη dog. |c1|=(23+1)!=24!

Έστω c2=λέξεις στο N που περιλαμβάνουν την λέξη car. |c2|=(23+1)!=24!

Έστω c3=λέξεις στο N που περιλαμβάνουν την λέξη pun. |c3|=(23+1)!=24!

Έστω c4=λέξεις στο N που περιλαμβάνουν την λέξη byte. |c4|=(22+1)!=23!

Έστω cicj $1\leq i<j\leq 4$ = λέξεις στο N που περιλαμβάνουν τις λέξεις i και j.
|c1c2|=|c1c3|=|c2c3|=22! |c1c4|=|c2c4|=|c3c4|=21!

Επίσης |c1c2c3|=20! |c1c2c4|=|c1c3c4|=|c2c3c4|=19! |c1c2c3c4|=17!

Η αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού δίνει

|c1'c2'c3'c4'|=|N|-|c1|-|c2|-|c3|-c4|+|c1c2|+|c1c3|+|c1c4|+|c2c3|+|c2c4|+|c3c4|-|c1c2c3|-|c1c2c4|-|c1c3c4|-|c2c3c4|+|c1c2c3c4|=26!-[3*24!+23!]+[3*22!+3*21!]-[20!+3*19!]+17!

8) Πόσες λέξεις n ψηφίων από το αλφάβητο {0,1,2} υπάρχουν, όπου κάθε ψηφίο εμφανίζεται τουλάχιστον 1 φορά;

Απάντηση

Έστω N το σύνολο των λέξεων από αυτό το αλφάβητο. Έχουμε $|N|=3^n$. Συμβολίζουμε με c_i $0\leq i\leq 2$ το σύνολο των λέξεων του N που ΔΕΝ περιέχουν το ψηφίο i. Ζητάμε τον πληθάριθμο του $\overline{c_0}\,\overline{c_1}\,\overline{c_2}$. Έχουμε ότι $|c_i|=2^n$ και ότι $|c_ic_j|=1$ $0\leq i<j\leq 2$ $|c_0c_1c_2|=0$. Εφαρμόζουμε την αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού και έχουμε

$$\overline{|c_0}\,\overline{c_1}\,\overline{c_2}| = |N| - |c_0| - |c_1| - |c_2| + |c_0c_1| + |c_0c_2| + |c_1c_2| - |c_0c_1c_2| = 3^n - 3\cdot 2^n + 3$$

9) Πόσα μη κατευθυντικά γραφήματα με σύνολο κορυφών $V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ που δεν έχουν απομονωμένα σημεία και ανακυκλώσεις, υπάρχουν;

Απάντηση

Έστω G το σύνολο των μη κατευθυντικών γραφημάτων με τις 5 κορυφές. Επειδή στις 5 κορυφές υπάρχει δυνατότητα να οριστούν $\binom{5}{2}$=10 ακμές, το πλήθος των γραφημάτων που μπορούν να οριστούν στις 5 κορυφές είναι $|G|=2^{10}$. Έστω τώρα c_i $1\leq i\leq 5$ το σύνολο των γραφημάτων στο G όπου η κορυφή v_i είναι απομονωμένη. Προφανώς $|c_i|=2^{\binom{4}{2}} = 2^6$ και $|c_ic_j| = 2^{\binom{3}{2}} = 2^3$ και $|c_ic_jc_k| = 2$ και $|c_ic_jc_kc_l| = 1$ και όλες απομονωμένες είναι 1 επίσης.

Άρα $|\,\overline{c_1}\,\overline{c_2}\,\overline{c_3}\,\overline{c_4}\,\overline{c_5}\,| = 2^{10} - 5\cdot 2^6 + 10\cdot 2^3 - 10\cdot 2 + 5\cdot 1 - 1 = 768$

10) Ένας πομπός εκπέμπει λόγω βλάβης με τυχαίο τρόπο μια ακολουθία από 12 διαφορετικά σύμβολα και 45 κενούς χαρακτήρες. Ποια η πιθανότητα στην ακολουθία να υπάρχουν τουλάχιστον 3 κενά μεταξύ κάθε δύο διαδοχικών συμβόλων;

Απάντηση

Οι ακολουθίες με 12 σύμβολα και 45 κενούς χαρακτήρες είναι 57!/45!=C(57,12)*12!.

Υπολογίζουμε τον αριθμό αυτών με τουλάχιστον 3 κενά ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς χαρακτήρες. Ανάμεσα από τις 12 θέσεις χαρακτήρων τοποθετούμε από 3 κενά. Σύνολο κενών 3*11=33. Απομένουν προς διανομή 12 κενά σε 13 θέσεις (αρχή, τέλος και ενδιάμεσα από 2 σύμβολα). Ο αριθμός αυτός είναι C(12+13-1,12)=C(22,12). Όμως οι 12 θέσεις συμβόλων καταλαμβάνονται με 12! τρόπους. Άρα οι ακολουθίες είναι C(22,12)*12!.

Επομένως η πιθανότητα να υπάρχουν τουλάχιστον 3 κενά μεταξύ κάθε δύο διαδοχικών συμβόλων είναι C(22,12)/C(57,12).

11) Ένας διαβάτης κινείται σε μια πόλη που οι δρόμοι της τέμνονται κάθετα και σχηματίζουν τετράγωνα. Ο διαβάτης βρίσκεται σε ένα σταυροδρόμι που θεωρούμε αρχή των αξόνων και έχει συντεταγμένες (0,0).

   i) Πόσες είναι οι διαφορετικές ακολουθίες βημάτων μήκους $2n$, που ξεκινούν από το (0,0), διέρχονται από το σημείο $(k,n-k)$, $0\leq k\leq n$, και καταλήγουν στο (0,0);

   ii) Επιλέγουμε τυχαία μια ακολουθία βημάτων μήκους $2n$ που ξεκινάει από το (0,0). Σε κάθε βήμα, η πιθανότητα επιλογής κάθε μιας από τις 4 κατευθύνσεις είναι ίση με 0.25. Ποιά η πιθανότητα να καταλήξει η ακολουθία βημάτων στο (0,0), αφού διέλθει από το σημείο $(k,n-k)$, $0\leq k\leq n$;

Απάντηση

Οποιαδήποτε ακολουθία βημάτων ξεκινά από το σημείο (0,0) και καταλήγει στο σημείο $(k,n-k)$ απαιτεί τουλάχιστον k βήματα Δ και τουλάχιστον $n-k$ βήματα Π. Αντίστοιχα, οποιαδήποτε ακολουθία βημάτων από το σημείο $(k,n-k)$ στο σημείο 0 απαιτεί τουλάχιστον k βήματα Α και τουλάχιστον $n-k$ βήματα Κ. Επομένως μια ακολουθία που ξεκινά από το σημείο (0,0) και καταλήγει στο σημείο (0,0) αφού διέλθει από το σημείο $(k,n-k)$ απαιτεί τουλάχιστον k βήματα Δ, $n-k$ βήματα Π, k βήματα Α και $n-k$ βήματα Κ, δηλαδή τουλάχιστον $k+n-k+k+n-k=2n$ συνολικά βήματα. Αφού όμως το ερώτημα αφορά σε ακολουθίες μήκους $2n$, απαιτούνται ακριβώς k βήματα Δ, $n-k$ βήματα Π, k βήματα Α και $n-k$ βήματα Κ. Επιπλέον θα πρέπει να προηγηθούν και να εξαντληθούν τα βήματα Δ και Π, αφού οποιαδήποτε παρεμβολή σε αυτά συμβόλου Α ή Κ, θα έχει ως συνέπεια να μη διέλθει η ακολουθία από το σημείο $(k,n-k)$. Έχουμε δηλαδή δύο προβλήματα μεταθέσεων ομάδων όμοιων αντικειμένων και σε κάθε πρόβλημα υπάρχουν δύο ομάδες όμοιων αντικειμένων από τις οποίες η μία αποτελείται από k αντικείμενα και η άλλη από $n-k$ αντικείμενα. Τα δύο αυτά γεγονότα είναι ανεξάρτητα και σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου, το ζητούμενο αποτέλεσμα είναι:

$$\frac{(k+n-k)!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(k+n-k)!}{k!(n-k)!}=\frac{(n!)^2}{(k!)^2((n-k)!)^2}$$

Όλες οι δυνατές ακολουθίες βημάτων μήκους $2n$ υπολογίζονται εύκολα αν τις θεωρήσουμε ως λέξεις μήκους $2n$ που σχηματίζονται από τέσσερα γράμματα (Δ,Α,Π,Κ) με δυνατότητα επαναλήψεων, επομένως το πλήθος τους είναι 4^{2n}. Η ζητούμενη πιθανότητα προκύπτει αν διαιρέσουμε το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος με όλες τις δυνατές ακολουθίες βημάτων μήκους 2n, δηλαδή:

$$\frac{\left(\frac{(n!)^2}{(k!)^2((n-k)!)^2}\right)}{4^{2n}}$$

12) Πόσες είναι οι ακέραιες μη αρνητικές λύσεις της εξίσωσης $x_1+x_2+x_3+x_4=18$ με $x_i \leq 7$, $1 \leq i \leq 4$;

Απάντηση

Έστω N το σύνολο των λύσεων με άθροισμα 18 και ci το σύνολο των λύσεων με άθροισμα 18 όπου $x_i \geq 8$.

Άρα $|\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3\bar{c}_4| = |N| - |c_1| - |c_2| - |c_3| - |c_4| + |c_1c_2| + |c_1c_3| + |c_1c_4| + |c_2c_3| + |c_2c_4| + |c_3c_4| - ανά\ τρια + ανά\ τέσσερα$

|N|=C(18+4-1,18)=C(21,18) (Διανομή 18 μη διακεκριμένων μπαλών σε 4 διακεκριμένες υποδοχές)

$|c_i|$=C(10+4-1,10)=C(13,10) (Τοποθετούμε στην υποδοχή i 8 μπάλες και διανέμουμε τις υπόλοιπες 10 σε 4 υποδοχές)

$|c_ic_j|$=C(2+4-1,2)=C(5,2) (Τοποθετούμε στις υποδοχές i και j από 8 μπάλες και διανέμουμε τις 2)

Τα ανά τρία και ανά τέσσερα είναι 0 (Δεν είναι δυνατόν 3 υποδοχές να έχουν από 8 μπάλες γιατί όλες είναι 18. Το ίδιο και 4 υποδοχές)

Άρα C(21,18)-4C(13,10)+6C(5,2)=246

13) Ποια η πιθανότητα όταν ρίξουμε 4 ζάρια να έχουμε άθροισμα 22;

Απάντηση

Όλες οι ρίψεις των 4 ζαριών (στοιχειώδη ενδεχόμενα του δειγματοχώρου) είναι 6^4. Τα ευνοϊκά ενδεχόμενα είναι οι λύσεις της εξίσωσης $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 22$ με $1 \leq x_i \leq 6, i = 1,2,3,4$. Το αντιμετωπίζουμε όπως παραπάνω αφού τοποθετήσουμε από μία μονάδα σε κάθε μεταβλητή ώστε να εξασφαλίσουμε ότι $x_i \geq 1$. Τότε όμως το άνω όριο γίνεται $0 \leq x_i \leq 5, i = 1,2,3,4$

|N|=C(18+4-1,18)=C(21,18)=1330 (Διανομή 18 μη διακεκριμένων μπαλών σε 4 διακεκριμένες υποδοχές)

$|c_i|$=C(12+4-1,12)=C(15,12)=455 (Τοποθετούμε στην υποδοχή i 6 μπάλες και διανέμουμε τις υπόλοιπες 12 σε 4 υποδοχές)

$|c_i c_j|$=C(4+6-1,6)=C(9,6)=84 (Τοποθετούμε στις υποδοχές i και j από 6 μπάλες και διανέμουμε τις 6)

$|c_i c_j c_k|$=1 (Δίνουμε στις 3 υποδοχές από 6 μπάλες αλλά μετά δεν υπολείπονται άλλες για διανομή).

$|c_1 c_2 c_3 c_4|$=0 (Δεν μπορούν 4 υποδοχές να έχουν από 6 μπάλες)

Άρα:$|\bar{c}_1 \bar{c}_2 \bar{c}_3 \bar{c}_4| = 1330 - 4 \cdot 455 + \binom{4}{2} \cdot 84 - \binom{4}{3} + 0 = 10$

Οπότε η πιθανότητα είναι $10/6^4$=0,0077

14) Έχουμε στη διάθεσή μας 20 διαφορετικά μεταξύ τους βιβλία, όλα με πάχος 5 εκατοστά. Να υπολογίσετε τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων να τοποθετηθούν όλα τα βιβλία σε 3 διακεκριμένα ράφια μήκους 1 μέτρου το καθένα, αν έχει σημασία η σειρά τοποθέτησης των βιβλίων σε κάθε ράφι.

Απάντηση

Κάθε ράφι μπορεί να δεχτεί από κανένα μέχρι και όλα τα βιβλία. Ουσιαστικά έχουμε πρόβλημα τοποθέτησης 20 διακεκριμένων αντικειμένων σε 3 υποδοχές όπου παίζει ρόλο η σειρά, άρα υπάρχουν

$$\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!} = \frac{(3+20-1)!}{(3-1)!} = \frac{22!}{2}$$

15) Παραλάβαμε ένα κιβώτιο με τους m τόμους μιας εγκυκλοπαίδειας και επιλέγουμε τυχαία n από αυτούς ($n \leq m$) και τους τοποθετούμε τυχαία σε ένα ράφι. Ποια είναι η πιθανότητα οι n τόμοι να τοποθετήθηκαν στο ράφι από αριστερά προς τα δεξιά με αύξουσα λεξικογραφική σειρά;

Απάντηση

Εφόσον όλοι οι τόμοι είναι διαφορετικοί, οποιαδήποτε επιλογή n από αυτούς θα περιλαμβάνει n διαφορετικούς τόμους. Οι τρόποι τοποθέτησης τους στο ράφι στην συνέχεια είναι n! και μόνο ένας από αυτούς είναι σε αύξουσα λεξικογραφική σειρά. Άρα η πιθανότητα είναι 1/(n!)

16) Ο Γιάννης και η Μαρία παίζουν το εξής παιχνίδι ρίχνοντας ταυτόχρονα 4 διακεκριμένα ζάρια: Αν τουλάχιστον ένα ζάρι φέρει τον αριθμό 6 κερδίζει ο Γιάννης. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις κερδίζει η Μαρία. Ποιός έχει τις περισσότερες πιθανότητες να κερδίσει το παιχνίδι; Θα αλλάξει κάτι στο συλλογισμό σας αν τα ζάρια δεν είναι διακεκριμένα;

Απάντηση

Όλα τα δυνατά ενδεχόμενα κατά την ρίψη των 4 ζαριών είναι 6^4=1296. Εξ' αυτών, οι ευνοϊκές για την Μαρία περιπτώσεις, δηλαδή οι περιπτώσεις στις οποίες δεν υπάρχει κανένα 6 είναι 5^4=625.

Άρα η πιθανότητα να κερδίσει η Μαρία είναι το κλάσμα με αριθμητή τον αριθμό των ευνοϊκών για αυτήν ενδεχομένων και παρανομαστή το σύνολο των ενδεχομένων, δηλαδή 625/1296. Η πιθανότητα να κερδίσει ο Γιάννης είναι $\frac{1296-625}{1296}=\frac{671}{1296}$ που είναι προφανώς μεγαλύτερη από αυτήν της Μαρίας.

Ας εξετάσουμε τι συμβαίνει στην περίπτωση που τα ζάρια είναι μη διακεκριμένα: Τότε ο αριθμός των διαφορετικών ενδεχομένων δεν συμπίπτει με εκείνον των διακεκριμένων ζαριών και είναι ίσος με C(6+4-1,4)=C(9,4)=126. Από την άλλη μεριά όμως, ενώ στην περίπτωση των διακεκριμένων ζαριών το κάθε αποτέλεσμα είναι ισοπίθανο με οποιοδήποτε άλλο και ίσο με 1/1296, δεν ισχύει το ίδιο για τα μη διακεκριμένα ζάρια. Για παράδειγμα το αποτέλεσμα 1,2,3,4 μπορεί να προκύψει αν το πρώτο ζάρι φέρει 1, το δεύτερο 2, το τρίτο 3, το τέταρτο 4 αλλά και όταν το πρώτο ζάρι φέρει 2, το δεύτερο 1, το τρίτο 3, το τέταρτο 4 κ.ο.κ. άρα με 4! διαφορετικούς τρόπους. Η πιθανότητα λοιπόν αυτού του αποτελέσματος είναι 4!/1296, ενώ η πιθανότητα του αποτελέσματος 1,1,1,1 είναι 1/1296 αφού για να έρθει αυτό το αποτέλεσμα πρέπει όλα τα ζάρια να φέρουν 1. Σε κάθε περίπτωση όμως η πιθανότητα κάθε αποτελέσματος χρησιμοποιώντας μη διακεκριμένα ζάρια είναι ίση με το άθροισμα των πιθανοτήτων των αντίστοιχων διαφορετικών αποτελεσμάτων όταν χρησιμοποιούνται διακεκριμένα ζάρια. Συνεπώς δε θα αλλάξει τίποτε στον προηγούμενο συλλογισμό μας ως προς τις πιθανότητες να κερδίσει η Μαρία ή ο Γιάννης.

17) Ένας πομπός εκπέμπει μια τυχαία δυαδική ακολουθία μήκους n bit η οποία περιέχει k 1 (k≤n-k+1).

i) Ποια η πιθανότητα η ακολουθία να μην έχει δύο διαδοχικά 1 αν το k είναι δεδομένο;

ii) Αν δεν γνωρίζουμε πόσα είναι τα 1 στην ακολουθία, αλλά μόνο ότι ο αριθμός τους είναι ≤(n+1)/2, δείξτε ότι ο αριθμός των ακολουθιών Q_n μήκους n που δεν έχουν δύο διαδοχικά 1 είναι πληροί την αναδρομική σχέση $Q_n=Q_{n-1}+Q_{n-2}$.

Απάντηση

i) Τοποθετούμε τα k 1 και ανάμεσα τους k-1 0. (Επειδή k-1≤n-k υπάρχουν αρκετά 0 για αυτό.) Στην συνέχεια διανέμουμε τα n-2k+1 0 που απέμειναν ανάμεσα από τα 1 και πριν και μετά από αυτά. Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με την διανομή n-2k+1 μη διακεκριμένων σφαιρών σε k+1 υποδοχές. Άρα οι διαφορετικές ακολουθίες που πληρούν την συνθήκη είναι C(n-2k+1+k+1-1, n-2k+1)=C(n-k+1,n-2k+1)=C(n-k+1,k). Όλες οι ακολουθίες με n-k 0 και k 1 είναι C(n,k). Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι C(n-k+1,k)/C(n,k)

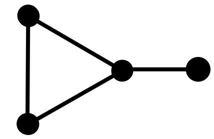
ii) Ο αριθμός των ακολουθιών αυτών είναι προφανώς το άθροισμα των αριθμών των ακολουθιών για όλες τις επιτρεπόμενες τιμές του k δηλαδή από 0 έως $\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor$ (το σύμβολο $\lfloor * \rfloor$ δηλώνει τον μεγαλύτερο ακέραιο που είναι μικρότερος ή ίσος με το *).

Άρα $Q_n = \sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}\binom{n-k+1}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}\binom{n-k+1}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}\left[\binom{n-k}{k} + \binom{n-k}{k-1}\right] = 1 + \sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}\binom{n-k}{k} + \sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}\binom{n-k}{k-1} = \sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}\binom{n-k}{k} + \sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor-1}\binom{n-k-1}{k} = \sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}\binom{(n-1)-k+1}{k} + \sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor-1}\binom{(n-2)-k+1}{k}$

Όπου η τρίτη ισότητα είναι εφαρμογή της τριγωνικής ισότητας του Pascal.

Αν τώρα το n είναι άρτιος, καταλήγουμε ότι $\psi = \left\lfloor\frac{(n-1)+1}{2}\right\rfloor$ και $\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor - 1 = \left\lfloor\frac{(n-2)+1}{2}\right\rfloor$. Άρα το πρώτο άθροισμα είναι το Q_{n-1} ενώ το δεύτερο είναι το Q_{n-2}. Αν τώρα το n είναι περιττός τότε και πάλι $\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor - 1 = \left\lfloor\frac{(n-2)+1}{2}\right\rfloor$ ενώ $\binom{n-k}{k} = 0$ για k=$\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor$ άρα η άθροιση στο πρώτο άθροισμα γίνεται μέχρι $\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor - 1 = \left\lfloor\frac{(n-1)+1}{2}\right\rfloor$ (για n περιττό). Σε κάθε περίπτωση λοιπόν $Q_n=Q_{n-1}+Q_{n-2}$.

18) Πόσα υπογραφήματα ισόμορφα με το παραπλεύρως έχει το πλήρες γράφημα με 4 κορυφές (Αυτό συμβολίζεται με K_4); Πόσα το K_{20}; Θεωρούμε ότι κάθε κορυφή των K_4 και K_{20} έχει ετικέτα (δηλαδή οι κορυφές τους είναι διακεκριμένες).



Απάντηση

Μια και ζητάμε τα υπογραφήματα του K_4 παρατηρούμε ότι είναι διαθέσιμη κάθε ακμή που μπορεί να «χρειαστούμε» για να συμπληρώσουμε το ζητούμενο γράφημα. Υπάρχουν λοιπόν 4 επιλογές για την κορυφή βαθμού 1 και στην συνέχεια 3 επιλογές για την κορυφή βαθμού 3. Οι άλλες 2 μπορούν να παίξουν τον ρόλο των κορυφών βαθμού 2 αδιάκριτα λόγω συμμετρίας. Άρα τα ισόμορφα γραφήματα είναι 3*4=12. Τα υπογραφήματα του K_{20} που είναι ισόμορφα με το δοσμένα βρίσκονται επιλέγοντας τις 4 κορυφές από τις 10 με C(20,4) και στην συνέχεια στις 4 επιλεγμένες κορυφές υπάρχουν όπως είδαμε 12 ισόμορφα υπογραφήματα. Συνολικά τα υπογραφήματα του K_{20} που είναι ισόμορφα με το δοθέν είναι 12C(20,4).

19) Πόσα υπογραφήματα ισόμορφα με το C_6 (τον κύκλο με 6 κορυφές) έχει το διμερές πλήρες γράφημα $K_{m,n}$ (δηλαδή με m κορυφές στο ένα τμήμα και n στο άλλο).

Απάντηση

Ένας κύκλος στο $K_{m,n}$ απαρτίζεται από κορυφές του ενός τμήματος που εναλλάσσονται με κορυφές του άλλου. Αν λοιπόν έχουμε 3 κορυφές από το ένα τμήμα και 3 από το άλλο όλοι οι κύκλοι με εναλλασσόμενες κορυφές μπορούν να δημιουργηθούν μια και όλες οι υποψήφιες ακμές είναι διαθέσιμες. Το πρόβλημα είναι λοιπόν ισοδύναμο με το πόσους τρόπους μπορούν 3 αγόρια και 3 κορίτσια μπορούν να καθίσουν εναλλάξ γύρω από ένα κυκλικό τραπέζι όταν δεν έχει σημασία η φορά διαγραφής του τραπεζιού. Τοποθετούμε τα 3 αγόρια θέση παρά θέση (με (3-1)!/2=1 τρόπο μια και δεν έχει σημασία η φορά διαγραφής). Τα κορίτσια τοποθετούνται με 3!=6 τρόπους εφόσον η ύπαρξη των αγοριών δίνει μια αρχή στο τραπέζι. Οι επιλογές των κορυφών είναι $\binom{m}{3}$ από το ένα τμήμα και $\binom{n}{3}$ από το άλλο. Σύνολο $6\binom{m}{3}\binom{n}{3}$ κύκλοι.

20) Στο επίπεδο υπάρχουν σημειωμένα 20 σημεία και επιλέγουμε τυχαία 4 ζεύγη σημείων και χαράζουμε τις 4 ακμές που έχουν άκρα αυτά τα ζεύγη. Ποια η πιθανότητα να σχηματιστεί το γράφημα της άσκησης 18;

Απάντηση

Τα 20 σημεία ορίζουν $\binom{20}{2}$=190 πιθανές ακμές. Υπάρχουν συνολικά $\binom{190}{4}$ επιλογές 4 ακμών που συγκροτούν τα στοιχειώδη ενδεχόμενα του δειγματοχώρου. Τα γραφήματα τα ισόμορφα του K_{20} υπολογίστηκαν στην άσκηση 18 σαν $12\binom{20}{4}$. Η πιθανότητα λοιπόν να σχηματιστεί γράφημα ισόμορφο με της άσκησης 18 είναι $12\binom{20}{4}/\binom{190}{4}$.