Ασκήσεις Συνδυαστικής
(Λύσεις)

Διατάξεις-Συνδυασμοί με και χωρίς επανάληψη
Μεταθέσεις Ομάδων Αντικειμένων
Μοντέλα Μπαλών σε Υποδοχές

1) Θεωρούμε τις μεταθέσεις 21 διακεκριμένων αντικειμένων α_1, α_2, ..., α_{21}. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν;

   i) Υπάρχουν $(10!)^2$ μεταθέσεις όπου το αντικείμενο α_1 εμφανίζεται στην $11^η$ θέση.

   ii) Υπάρχουν 21!/2 μεταθέσεις όπου το αντικείμενο α_1 εμφανίζεται πριν το α_2

   iii) Υπάρχουν 19! μεταθέσεις όπου τα α_1, α_2, και α_3 εμφανίζονται με αυτή την σειρά σε διαδοχικές θέσεις.

   iv) Υπάρχουν 19! μεταθέσεις όπου το αντικείμενο α_1 εμφανίζεται στην $1^η$ θέση και το αντικείμενο α_{21} εμφανίζεται στην $21^η$ θέση.

(Απ. Λ-Σ-Σ-Σ)

Απάντηση

   i) Λάθος. Όταν το α_1 τοποθετηθεί στην $11^η$ θέση απομένουν 20 θέσεις για τα άλλα 20 αντικείμενα. Οι μεταθέσεις είναι λοιπόν 20! και όχι $(10!)^2$.

   ii) Σωστό. Κάθε μία από τις 21! μεταθέσεις έχει μία αντίστοιχη στην οποία τα α_1 και α_2 έχουν αλλάξει θέση.

   iii) Σωστό. Αν θεωρήσουμε τα α_1, α_2, και α_3 σαν ένα αντικείμενο, έχουμε μετάθεση 19! αντικειμένων.

   iv) Σωστό. Τοποθετούμε τα δύο αντικείμενα στην αρχή και το τέλος και μεταθέτουμε τα υπόλοιπα 19.

2) Ο αριθμός των τρόπων διανομής n μη διακεκριμένων αντικειμένων σε m διακεκριμένες υποδοχές είναι:

   i) Όσες οι μεταθέσεις $n+m-1$ αντικειμένων από τα οποία τα n αποτελούν μια ομάδα μη διακεκριμένων μεταξύ τους αντικειμένων και τα υπόλοιπα μια άλλη.

   ii) Όσες οι δυαδικές συμβολοσειρές με $m-1$ μηδενικά και n άσσους.

   iii) Όσες οι ακέραιες και θετικές λύσεις της εξίσωσης $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n + m$

   iv) Όσες οι επιλογές μιας διατεταγμένης n-άδας με δυνατότητα επανάληψης από m διακεκριμένα αντικείμενα.

(Απ. Σ-Σ-Σ-Λ)

Απάντηση

Ο αριθμός αυτός είναι $\binom{n+m-1}{n} = \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}$.

i) Σωστό. Το πλήθος αυτών των διατάξεων είναι ακριβώς η ποσότητα παραπάνω.
ii) Σωστό. Οι συμβολοσειρές αυτές έχουν μήκος *n*+*m*-1 και σε αυτές επιλέγουμε τις n θέσεις των άσσων.
iii) Σωστό. Είναι διανομή *n*+*m* μη διακεκριμένων σφαιρών (2^o μέρος) σε *m* υποδοχές.
iv) Λάθος. Αυτές είναι m^n.

3) Ποιο είναι το πλήθος των ακέραιων αριθμών από το 1 ως το 10,000 των οποίων το άθροισμα των ψηφίων είναι 7; Τέτοιοι αριθμοί είναι για παράδειγμα οι: 7, 25, 214, 2221.

Απάντηση

Οι υποψήφιοι αριθμοί είναι στο διάστημα $[0000,\ 9999]$. Αν $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ τα 4 ψηφία του αριθμού θα πρέπει είναι $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7,\ 0 \leq x_\iota \leq 7$. Το πλήθος των αριθμών είναι ίσο με το πλήθος των ακέραιων λύσεων της παραπάνω εξίσωσης. Άρα έχουμε $\binom{7+4-1}{7} = \binom{10}{7} = \frac{10!}{7!\cdot 3!} = 120$.

4) Σε 10 διακεκριμένα παιδιά πρόκειται να μοιραστούν 15 όμοιες (μη διακεκριμένες) σοκολάτες και 10 ακόμη διαφορετικά μεταξύ τους (διακεκριμένα) δώρα. Υπολογίστε τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να μοιραστούν οι σοκολάτες και τα δώρα, ώστε κάθε παιδί να πάρει τουλάχιστον μία σοκολάτα και ένα δώρο.

Απάντηση

Τα διακεκριμένα δώρα τα μοιράζουμε με 10! τρόπους. Διανέμουμε 1 σοκολάτα σε κάθε παιδί και απομένουν 5. Συνεπώς διανέμουμε 5 μη διακεκριμένα αντικείμενα σε 10 διακεκριμένες υποδοχές με $\binom{10+5-1}{5} = \binom{14}{5}$ τρόπους. Άρα συνολικά $10! \cdot \binom{14}{5}$.

5) Σε ένα κυκλικό τραπέζι 10 θέσεων πρόκειται να καθίσουν 5 ζευγάρια (κάθε ζευγάρι αποτελείται από έναν διακεκριμένο άντρα και μια διακεκριμένη γυναίκα). Να υπολογίσετε τους διαφορετικούς τρόπους τοποθέτησης στις ακόλουθες περιπτώσεις:
i) Δεν υπάρχει κανένας περιορισμός στην τοποθέτηση των 10 ατόμων.

ii) Η γυναίκα και ο άντρας που αποτελούν κάθε ζευγάρι πρέπει να τοποθετηθούν σε γειτονικές θέσεις.

(Θεωρήστε και στις δύο περιπτώσεις ως μη διαφορετικές τοποθετήσεις αυτές όπου υπάρχει κυκλική μετατόπιση στις θέσεις του τραπεζιού χωρίς να μεταβάλλεται η διάταξη των 10 διακεκριμένων ατόμων.)

Απάντηση

i) Οι τρόποι τοποθέτησης των 10 ατόμων σε κυκλική διάταξη είναι $(10-1)! = 9!$

ii) Σε αυτήν την περίπτωση θέλουμε να τοποθετήσουμε κυκλικά 5 ζευγάρια, συνεπώς $(5-1)! = 4!$. Όμως τα άτομα είναι προφανώς διακεκριμένα και μας ενδιαφέρει η σειρα τοποθέτησης του ζευγαριού στο τραπέζι. Για κάθε ζευγάρι υπάρχουν 2 επιλογές άρα 2^5 για όλα τα ζευγάρια. Συνεπώς οι τρόποι είναι $4! \cdot 2^5$.

6) Μια σχολική τάξη αποτελείται από 30 διακεκριμένους μαθητές, 15 αγόρια και 15 κορίτσια. Εξετάζουμε τους διαφορετικούς τρόπους να χωρίσουμε τους μαθητές σε ομάδες, ώστε κάθε μαθητής να ανήκει σε μία ομάδα, και να τους αναθέσουμε εργασίες για το μάθημα της Πληροφορικής. Να υπολογισθεί το πλήθος των διαφορετικών αναθέσεων αν:

i) Κάθε ομάδα αποτελείται από 2 άτομα, ένα αγόρι και ένα κορίτσι, και το θέμα της εργασίας είναι κοινό για όλες τις ομάδες.

ii) Κάθε ομάδα αποτελείται από 5 άτομα, ανεξαρτήτως φύλου, και υπάρχουν 6 θέματα εργασιών από τα οποία κάθε ομάδα επιλέγει ένα θέμα διαφορετικό από αυτό των άλλων ομάδων.

iii) Κάθε ομάδα αποτελείται είτε από 5 αγόρια είτε από 5 κορίτσια, και το θέμα της εργασίας είναι κοινό για όλες τις ομάδες.

Απάντηση

i) Πρόκειται για το ταίριασμα 15 αγοριών με 15 κορίτσια δηλαδή 15!.

ii) Έχουμε να διανείμουμε 30 άτομα σε 6 διακεκριμένες μεταξύ τους πενταμελείς ομάδες, που είναι ισοδύναμο με τις μεταθέσεις 30 αντικειμένων που χωρίζονται σε 6 ομάδες μη διακεκριμένων αντικειμένων μέσα στην ομάδα, άρα $\frac{30!}{5! \cdot 5! \cdot 5! \cdot 5! \cdot 5! \cdot 5!} = \frac{30!}{5!^6}$.

iii) Τα αγόρια μοιράζονται με $\frac{15!}{5!^3 \cdot 3!}$ τρόπους όπως αναλύθηκε στο (ii). Το ίδιο και τα κορίτσια. Τώρα όμως διαιρούμε με το 3! διότι οι ομάδες δεν είναι διακεκριμένες μεταξύ τους (ίδια εργασία). Συνεπώς το πλήθος των διαφορετικών αναθέσεων θα είναι $\frac{15!}{5!^3 \cdot 3!} \cdot \frac{15!}{5!^3 \cdot 3!}$.

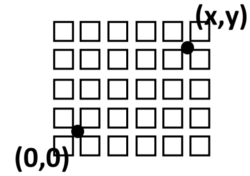
7) Σε ένα τουρνουά ποδοσφαίρου λαμβάνουν μέρος 16 ομάδες. Με πόσους τρόπους μπορούν να χωριστούν οι ομάδες σε 4 ομίλους των 4 ομάδων ο καθένας, αν δεν παίζει ρόλο η σειρά τοποθέτησης των ομάδων στους ομίλους, και

   i) οι 4 όμιλοι θεωρούνται διακεκριμένοι,
   ii) οι 4 όμιλοι θεωρούνται μη διακεκριμένοι;
   iii) Μετά από την κλήρωση προέκυψε ένα πρόγραμμα 32 αγώνων που θα διεξαχθούν με συγκεκριμένη χρονική σειρά σε τρία γήπεδα (έστω Α, Β, Γ). Από αυτούς, 16 αγώνες θα διεξαχθούν στο γήπεδο Α, 8 αγώνες στο γήπεδο Β, και 8 αγώνες στο γήπεδο Γ. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει ο προγραμματισμός των γηπέδων για την διεξαγωγή όλων των αγώνων, αν μετά από κάθε αγώνα στο γήπεδο Β και επίσης μετά από κάθε αγώνα στο γήπεδο Γ, πρέπει να οριστεί ένας αγώνας στο γήπεδο Α;

Απάντηση

i) Πρόκειται για μεταθέσεις 16 αντικειμένων που χωρίζονται σε 4 διακεκριμένες ομάδες (ομίλους, π.χ. 1^{ος} όμιλος, 2^{ος} όμιλος κλπ.) με μη διακεκριμένα μεταξύ τους αντικείμενα μέσα στην ίδια ομάδα. Οι τρόποι είναι $16!/(4!)^4$.
ii) Αν οι όμιλοι δεν θεωρούνται διακεκριμένοι, τότε το παραπάνω αποτέλεσμα πρέπει να διαιρεθεί με 4!, διότι θεωρώντας τους διακεκριμένους έχουμε βάλει διάταξη μεταξύ τους.
iii) Ζητάμε ισοδύναμα το πλήθος των λέξεων με 32 γράμματα από τα οποία 16 είναι Α, 8 είναι Β και 8 είναι Γ, έτσι ώστε αμέσως μετά από κάθε Β και Γ να υπάρχει ένα Α. Θεωρούμε τα ΒΑ και ΓΑ σαν ενιαία αντικείμενα (υπάρχουν 8 ΒΑ και 8 ΓΑ) και ζητάμε τις μεταθέσεις τους. Αυτές είναι 16!/(8!8!).

8) Σε μια μοντέρνα πόλη όπου όλοι οι δρόμοι τέμνονται κάθετα μεταξύ τους ώστε να σχηματίζεται ένα πλέγμα, βρίσκεται ένας διαβάτης σε ένα σταυροδρόμι που αυθαίρετα θεωρούμε αρχή των αξόνων και ονομάζουμε θέση (0,0). Ο διαβάτης θέλει να πάει στη θέση (x, y) με $x, y > 0$ που βρίσκεται x τετράγωνα δεξιά και y τετράγωνα πάνω κινούμενος μόνο προς τα δεξιά (Δ) και προς τα πάνω (Π). Για παράδειγμα, στο σχήμα έχουμε $x = 4$ και $y = 3$ και μια πιθανή διαδρομή είναι η ΔΠΔΠΠΔΔ με μήκος 7 τετραγώνων.



i) Πόσες διαφορετικές διαδρομές μπορεί να ακολουθήσει ο διαβάτης για να πάει στο (x, y);
ii) Πόσες είναι οι διαφορετικές διαδρομές αν ο διαβάτης δεν μπορεί να κινηθεί δύο συνεχόμενα τετράγωνα προς τα δεξιά; Υποθέτουμε εδώ ότι $x \leq y+1$.

Απάντηση

i) Οι διαδρομές που μπορεί να ακολουθήσει ο διαβάτης είναι όσες οι συμβολοσειρές με x Δ και y Π, δηλαδή $\frac{(x+y)!}{x!\cdot y!}$.
ii) Ανάμεσα στα Δ τοποθετούμε ένα Π. Απομένουν y-x+1 Π τα οποία διανέμουμε σε x+1 υποδοχές. Άρα $\binom{y-x+1+x+1-1}{y-x+1} = \binom{y+1}{y-x+1}$.

9) Σε ένα τμήμα μιας αίθουσας που αποτελείται από *n* θέσεις στη σειρά πρόκειται να καθίσουν *k* φοιτητές για να εξεταστούν σε ένα μάθημα. Οι επιτηρητές θέλουν να φροντίσουν ώστε να μην κάθεται κάποιος φοιτητής ακριβώς δίπλα σε κάποιον άλλο. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να το επιτύχουν; Ποιό το αποτέλεσμα της άσκησης για *n*=10, *k* =3;

Απάντηση

Ας θεωρήσουμε τα *n* καθίσματα ξεχωριστά και ας δεσμεύσουμε *k* από αυτά για να καθίσουν οι φοιτητές. Στην συνέχεια τοποθετούμε ανάμεσα από κάθε δύο καθίσματα φοιτητών ένα κάθισμα που θα μείνει κενό. Τα υπόλοιπα *n*-*k*+1 καθίσματα τα τοποθετούμε χωρίς περιορισμό στις *k*+1 «υποδοχές» ανάμεσα από δύο διαδοχικά καθίσματα φοιτητών και στην αρχή και στο τέλος της σειράς. Οι τρόποι είναι $\binom{k+1+n-k+1-1}{n-k+1} = \binom{n+1}{n-k+1} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}$. Όμως το αποτέλεσμα αυτό πρέπει να πολλαπλασιαστεί με *k*! όσοι είναι οι τρόποι να καθίσουν οι *k* φοιτητές στα καθίσματα τους. Συνολικά λοιπόν οι τρόποι είναι $\frac{(n+1)!}{(n-k+1)!}$. Για *n*=10 και *k*=3 έχουμε 990 τρόπους.

10) Έστω σύνολο με 4 διαφορετικά στοιχεία Α=$\{x, y, w, z\}$. Να υπολογίσετε τον αριθμό των διμελών σχέσεων που μπορούν να οριστούν στο Α και είναι:
i) Ανακλαστικές
ii) Συμμετρικές
iii) Συμμετρικές και περιλαμβάνουν το (x,y)
iv) Αντισυμμετρικές
v) Αντισυμμετρικές και περιλαμβάνουν το (x,y)

Απάντηση

Στο σύνολο A υπάρχουν 4×4=16 δυνατά ζεύγη. Μια διμελής σχέση στο A είναι ένα οποιοδήποτε σύνολο ζευγών. Π.χ. μια διμελής σχέση είναι η R={(x,z), (y,w), (z,x)}. Άρα οποιοδήποτε υποσύνολο των 16 ζευγών ορίζει μια διμελή σχέση. Συνεπώς υπάρχουν συνολικά 2^{16} διμελείς σχέσεις που μπορούν να οριστούν στο A.

(i) Μια διμελής σχέση είναι ανακλαστική αν περιλαμβάνει τα 4 ζεύγη (x,x), (y,y), (z,z), (w,w). Απομένουν λοιπόν 12 ζεύγη οποιαδήποτε από τα οποία μπορούν να προστεθούν στα 4 αυτά και να δημιουργηθεί μια ανακλαστική διμελής σχέση. Άρα υπάρχουν τόσες ανακλαστικές διμελείς σχέσεις όσα τα υποσύνολα των 12 ζευγών που είναι 2^{12}.

(ii) Μια σχέση είναι συμμετρική αν όταν περιλαμβάνει το ζεύγος (x,y) πρέπει να περιλαμβάνει υποχρεωτικά και το (y,x). Άρα κάθε ζευγάρι ζευγών από τα παρακάτω ή θα είναι στην σχέση ή δεν θα είναι σαν ζεύγος. Ένα μέλος του μεμονωμένα δεν μπορεί να περιλαμβάνεται:

1. (x,y), (y,x)
2. (x,z), (z,x)
3. (x,w), (w,x)
4. (y,z), (z,y)
5. (y,w), (w,y)
6. (z,w), (w,z)

Συνεπώς έχουμε δυνατότητα να επιλέξουμε οποιοδήποτε υποσύνολο από τα παραπάνω και άρα οι δυνατότητες είναι 2^6. Τα υπόλοιπα 4 ζεύγη (τα «ανακλαστικά») μπορούν να επιλεγούν ή όχι. Εδώ οι επιλογές είναι 2^4. Σύνολο: $2^6 \cdot 2^4 = 2^{10}$.

(iii) Αν περιλαμβάνει μια συμμετρική σχέση το (x,y), περιλαμβάνει αναγκαστικά και το (y,x). Από τα 5 υπόλοιπα ζεύγη ζευγών μπορούμε να επιλέξουμε όσα θέλουμε όπως και από τα 4 «ανακλαστικά» ζεύγη. Άρα σύνολο 2^9.

(iv) Μια αντισυμμετρική σχέση αν περιλαμβάνει το ζεύγος (x,y) δεν περιλαμβάνει το (y,x) και το αντίστροφο. Άρα για ένα δεδομένο ζεύγος (x,y) οι δυνατότητες είναι είτε να περιλαμβάνεται το (x,y) αλλά όχι το (y,x) είτε να περιλαμβάνεται το (y,x) αλλά όχι το (x,y) είτε να μην περιλαμβάνεται κανένα από τα δύο. Άρα κάθε μία από τα παραπάνω 6 ζεύγη ζευγών δίνει 3 δυνατότητες. Δηλαδή 3^6. Τα ανακλαστικά ζεύγη μπορούν όπως και πριν είτε να περιληφθούν είτε να παραλειφθούν από την σχέση. Άρα συνολικά οι δυνατότητες είναι $2^4 \cdot 3^6$.

(v) Αν το (x,y) περιλαμβάνεται στην αντισυμμετρική σχέση τότε δεν περιλαμβάνεται το (y,x) και επομένως υπάρχουν 3 επιλογές μόνο για 5 από τα παραπάνω 6 ζεύγη ζευγών. Συνολικά δηλαδή $2^4 \cdot 3^5$ διαφορετικές σχέσεις.

11) Ένα κωδικοποιημένο αλφάβητο αποτελείται από τέσσερις παύλες (-), 10 τελείες (.) και τα γράμματα Α,Β.

i) Πόσες διαφορετικές συμβολοσειρές μήκους 30 μπορούν να μεταδοθούν με τον κώδικα αυτό αν οι υπόλοιπες 14 θέσεις συμπληρώνονται με κενά;

ii) Πόσες διαφορετικές συμβολοσειρές μήκους 16 μπορούν να μεταδοθούν με τον κώδικα αυτό αν απαγορεύεται η παρουσία τόσο της συμβολοσειράς ΑΒ όσο και της ΒΑ (δηλαδή απαγορεύεται η παρουσία του Α αμέσως μετά το Β αλλά και η παρουσία του Β αμέσως μετά το Α);

iii) Με πόσους τρόπους μπορούν τα σύμβολα να μοιραστούν σε δύο υποσύνολα των 8 συμβόλων το κάθε ένα έτσι ώστε το κάθε υποσύνολο να έχει δύο τουλάχιστον τελείες; Θεωρείστε ότι δεν μας ενδιαφέρει η σειρά τοποθέτησης των συμβόλων σε κάθε υποσύνολο.

Απάντηση

i) Οι 10 τελείες, οι 4 παύλες, τα γράμματα Α, Β και τα 14 κενά αποτελούν 5 ομάδες. Συνεπώς οι διαφορετικές συμβολοσειρές θα είναι $\frac{30!}{4!\cdot 10!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 14!}$.

ii) Όλες οι συμβολοσειρές μήκους 16 είναι $\frac{16!}{4!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 10!}$. Από αυτές αφαιρούμε αυτές που περιλαμβάνουν τα ΑΒ και ΒΑ. Αυτές που περιλαμβάνουν το ΑΒ θα είναι $\frac{15!}{4!\cdot 1!\cdot 10!}$, αντίστοιχα και για το ΒΑ. Συνεπώς οι συμβολοσειρές θα είναι $\frac{16!}{4!\cdot 10!} - 2 \cdot \frac{15!}{4!\cdot 10!}$.

12) Έχουμε στη διάθεσή μας 3 ίδια βιβλία με πάχος 10 εκατοστά και 20 διαφορετικά μεταξύ τους βιβλία, όλα με πάχος 5 εκατοστά. Να υπολογίσετε τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων να γεμίσει ένα ράφι μήκους 1 μέτρου, αν έχει σημασία η σειρά τοποθέτησης των βιβλίων στο ράφι. (*Υπόδειξη: Εξετάστε περιπτώσεις τοποθέτησης των 3 βιβλίων των 10 εκατοστών στο ράφι.*)

Απάντηση

Υπάρχουν 3 περιπτώσεις ως προς το αν θα συμπεριληφθούν τα βιβλία των 10 εκατοστών. (i) Να μην συμπεριληφθεί κανένα. Σε αυτή την περίπτωση μπαίνουν όλα τα βιβλία των 5 εκατοστών με 20! τρόπους. (ii) Να μπει ένα βιβλίο των 10 εκατοστών. Τώρα πρέπει να επιλέξουμε 18 βιβλία των 5 εκατοστών και να τα διατάξουμε μαζί με το ένα των 10 εκατοστών. Οι τρόποι είναι $\binom{20}{18}\cdot 19!$. (iii) Να μπουν δύο βιβλία των 10 εκατοστών. Τώρα επιλέγουμε 16 βιβλία των 5 εκατοστών και τα διατάσσουμε μαζί με τα δύο ίδια των 10 εκατοστών. Οι τρόποι είναι $\binom{20}{16}\cdot 18!/2$

. (iv) Παρόμοια, περιλαμβάνουμε και τα τρία βιβλία των 10 εκατοστών (που συγκροτούν μία ομάδα των 3 αντικειμένων) και 14 των 5 εκατοστών. Ο τρόποι είναι $\binom{20}{14}\cdot 17!/3!$ και άρα συνολικά (κανόνας αθροίσματος) $20!+\binom{20}{18}\cdot 19!+\binom{20}{16}\cdot 18!/2+\binom{20}{14}\cdot 17!/3!$.

13) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν στη σειρά 50 φοιτητές του Α' έτους, 30 φοιτητές του Β' έτους, και 20 φοιτητές του Γ' έτους, όταν:
   i) οι φοιτητές του ίδιου έτους δεν θεωρούνται διακεκριμένοι, και δεν υπάρχουν περιορισμοί.
   ii) οι φοιτητές του ίδιου έτους δεν θεωρούνται διακεκριμένοι, και δεν πρέπει να υπάρχουν φοιτητές του Α' έτους σε διαδοχικές θέσεις.
   iii) όλοι οι φοιτητές θεωρούνται διακεκριμένοι, και δεν πρέπει να υπάρχουν φοιτητές του Α' έτους σε διαδοχικές θέσεις.

Απάντηση

i) Πρόκειται για μεταθέσεις ομάδων μη διακεκριμένων μεταξύ τους αντικειμένων. Οι τρόποι είναι $\frac{100!}{50!20!30!}$.
ii) Τοποθετούμε τους φοιτητές του Β' και του Γ' έτους. Η τοποθέτηση αυτών (αγνοώντας τους Α-ετείς) είναι και πάλι μετάθεση ομάδων μη διακεκριμένων μεταξύ τους αντικειμένων και οι τρόποι είναι $\frac{50!}{20!30!}$. Όμως υπάρχουν 51 επιλογές για το που θα τοποθετηθούν δύο του Β΄ ή Γ΄ έτους (αρχή-τέλος ή ανάμεσα από δύο του Α΄ έτους). Συνολικά $51\frac{50!}{20!30!}$.
iii) Η διάταξη των φοιτητών Β και Γ έτους γίνεται με 50! τρόπους και το ίδιο του Α' έτους. Υπάρχουν επιπλέον 51 επιλογές για το που θα είναι οι διαδοχικές θέσεις δύο φοιτητών του Β' ή Γ΄ έτους. Δηλαδή συνολικά οι τρόποι είναι $51(50!)^2$.

14) Σε ένα ράφι ενός σούπερ-μάρκετ βρίσκονται 8 κονσέρβες ενός είδους, 12 ενός δεύτερου και 10 ενός τρίτου. Όλες οι κονσέρβες αγοράστηκαν από τρεις πελάτες έτσι ώστε κάθε ένας πήρε 2 τουλάχιστον από κάθε είδος. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει μια τέτοια αγορά;

Απάντηση

Δίνουμε από δύο κονσέρβες από κάθε είδος σε κάθε πελάτη ώστε να καλυφθεί ο περιορισμός. Απομένουν 2 από το πρώτο είδος, 6 από το δεύτερο και 4 από το τρίτο. Διανέμουμε το κάθε είδος στους 3 πελάτες σαν όμοιες μπάλες σε διακεκριμένες υποδοχές και χρησιμοποιούμε κανόνα γινομένου. Δηλαδή $\binom{2+3-1}{2}\binom{6+3-1}{6}\binom{4+3-1}{4} = 2520$.

15) Δύο ομάδες (έστω Α και Β) που αποτελούνται από 8 διακεκριμένους αθλητές η κάθε μια (έστω A_1, A_2, …, A_8 και B_1, B_2, …, B_8) πρόκειται να συναγωνιστούν σε μια σκυταλοδρομία 8x100. Ο προπονητής της πρώτης ομάδας ζητά από τον αθλητή A_3 να ξεκινήσει τον αγώνα και δε θέτει κανέναν άλλο περιορισμό ως προς τη σειρά με την οποία θα τρέξουν οι αθλητές της πρώτης ομάδας. Με τη σειρά του ο προπονητής της δεύτερης ομάδας θέτει ως μοναδικό περιορισμό να παρεμβληθούν δύο ακριβώς αθλητές ανάμεσα στους B_1 και B_5 (ή στους B_5 και B_1) στη σειρά με την οποία θα τρέξουν οι αθλητές της δεύτερης ομάδας.
   i) Με πόσους τρόπους μπορούν να τρέξουν οι αθλητές της ομάδας Α;
   ii) Με πόσους τρόπους μπορούν να τρέξουν οι αθλητές της ομάδας Β;
   iii) Με πόσους τρόπους μπορεί να διεξαχθεί ο αγώνας ως προς τη σειρά με την οποία θα αγωνιστούν οι αθλητές των δύο ομάδων;

Απάντηση

i) Με 7!=5040 τρόπους.
ii) Επιλέγουμε και διατάσσουμε τους 2 αθλητές μεταξύ των Β1 και Β5 με $(6)_2$. Στην συνέχεια αυτή η ομάδα των 4 αθλητών μετατίθεται μαζί με τους υπόλοιπους 4 με 5! τρόπους. Το αποτέλεσμα πρέπει να πολλαπλασιαστεί με το 2 γιατί μπορεί να προηγείται ο Β1 του Β5 ή το αντίστροφο. Συνολικά 6!/4!*5!*2=7200.
iii) Από τον κανόνα του γινομένου, το αποτέλεσμα είναι το γινόμενο των (i) και (ii).

16) Σε ένα εκλογικό κέντρο 300 ψηφοφόρων υπάρχουν 3 υποψήφιοι δήμαρχοι, ο Α, ο Β και ο Γ. Έχουν ψηφίσει 200 ψηφοφόροι και ο Α έχει πάρει 90 ψήφους, ο Β 60, ο Γ 40, 5 είναι άκυρα και 5 λευκά. Πόσοι δυνατοί τρόποι ψηφοφορίας των υπόλοιπων 100 ψηφοφόρων εξασφαλίζουν στον Α 50%+1 επί των εγγεγραμμένων ψηφοφόρων, (δηλαδή 151 ψήφους και άνω) με την προϋπόθεση ότι και οι 100 ψηφοφόροι θα προσέλθουν στο εκλογικό κέντρο;

Απάντηση

Ο Α χρειάζεται ακόμη 61 ψήφους. Αν του δοθούν, έχουμε 49 ψήφους που μπορούν να πάνε στους 3 υποψήφιους, στα λευκά ή στα άκυρα, δηλαδή σε 5 διακεκριμένες υποδοχές. Οι τρόποι είναι (μπάλες σε υποδοχές) $\binom{49+5-1}{49} = \binom{53}{49}$.

17) Κάνοντας χρήση ενός συνδυαστικού επιχειρήματος αποδείξτε ότι η ποσότητα $(10!)!/(10!)^{9!}$ είναι ακέραιος αριθμός. (*Υπόδειξη: Σκεφτείτε ένα πρόβλημα απαρίθμησης που η ποσότητα αυτή είναι η απάντηση του.*)

Απάντηση

Αν μπορέσουμε να βρούμε ένα πρόβλημα απαρίθμησης του οποίου η απάντηση είναι η δοθείσα ποσότητα, τότε αυτή είναι αναγκαστικά ακέραιος αριθμός. Η μορφή του τύπου μας θυμίζει τον τύπο των μεταθέσεων ομάδων μη διακεκριμένων αντικειμένων. Το πλήθος των αντικειμένων είναι 10! και χωρίζονται σε 9! ομάδες των 10 μη διακεκριμένων μεταξύ τους αντικειμένων. Με αυτές τις προϋποθέσεις, το πλήθος των μεταθέσεων είναι ακριβώς $(10!)!/(10!)^{9!}$.

18) Να δειχθεί ότι για κάθε ακέραιο $n\geq 1$ ο αριθμός $(4n-1)!\cdot n$ διαιρείται από τον αριθμό $2^{3n-2}\cdot 3^n$. Παρόμοια ότι ο αριθμός $(n^2)!$ διαιρείται από τον $(n!)^n$.

Απάντηση

Θέλουμε να δείξουμε ότι ο αριθμός $\frac{(4n-1)!\cdot n}{2^{3n-2}.3^n}$ είναι ακέραιος. Γράφουμε $\frac{(4n-1)!\cdot n}{2^{3n-2}.3^n} = \frac{(4n)!}{2^{3n}.3^n} = \frac{(4n)!}{24^n} = \frac{(4n)!}{4!^n}$. Η ποσότητα αυτή τώρα είναι ο αριθμός των μεταθέσεων 4n αντικειμένων τα οποία διαιρούνται σε n ομάδες των 4 μη διακεκριμένων αντικειμένων κάθε μία. Προφανώς είναι ακέραιος αριθμός.

Παρόμοια ο αριθμός $\frac{(n^2)!}{n!^n}$ είναι ο αριθμός των μεταθέσεων n^2 αντικειμένων που διαιρούνται σε n ομάδες των n μη διακεκριμένων αντικειμένων η κάθε μία.

19) Πόσοι διαφορετικοί αριθμοί με n+k ψηφία υπάρχουν αν τα n ψηφία είναι ίδια μεταξύ τους, τα k ανά δύο διαφορετικά (και με τα n) και δεν υπάρχουν δύο ίδια ψηφία σε γειτονικές θέσεις μεταξύ τους; Δίνεται ότι $n\leq k+1$.

Απάντηση

Τοποθετούμε τα n όμοια ψηφία και στη συνέχεια επιλέγουμε n-1 από τα διαφορετικά ψηφία και τα τοποθετούμε στα n-1 διαστήματα ανάμεσα από τα όμοια ψηφία ώστε να εξασφαλίσουμε ότι δεν υπάρχουν δύο όμοια ψηφία σε γειτονικές θέσεις. Οι τρόποι είναι $(k)_{n-1}$. Τα υπόλοιπα k-n+1 ψηφία τοποθετούνται ανάμεσα από τα όμοια και στην αρχή και στο τέλος της ακολουθίας. Έχουμε δηλαδή k-n+1 διακεκριμένα αντικείμενα να τοποθετηθούν σε n+1 υποδοχές αλλά να έχει σημασία η σειρά τοποθέτησης. Οι τρόποι είναι $\frac{(k-n+1+n+1-1)!}{(n+1-1)!} = \frac{(k+1)!}{n!}$. Σύνολο λοιπόν $(k)_{n-1} \cdot \frac{(k+1)!}{n!}$.

Εναλλακτικά, επισημαίνουμε στην συνολική ακολουθία των k+n θέσεων, n μη διαδοχικές ώστε να τοποθετήσουμε τα όμοια ψηφία. Αυτό γίνεται με επισήμανση των n θέσεων και τοποθέτηση ανάμεσα τους από μίας ώστε να εξασφαλίσουμε ότι δεν θα είναι διαδοχικές. Στην συνέχεια διανέμουμε τις k-n+1 θέσεις τις n+1 υποδοχές που κατά τα γνωστά είναι $\binom{k-n+1+n+1-1}{k-n+1} = \binom{k+1}{n}$. Στην συνέχεια τα n όμοια ψηφία τοποθετούνται κατά ένα τρόπο και τα k μη όμοια κατά k!. Σύνολο: $\binom{k+1}{n}k! = \frac{(k+1)!k!}{n!(k-n+1)!} = (k)_{n-1}\frac{(k+1)!}{n!}$

20) Κατά πόσους τρόπους 7 άνδρες μπορούν να επιλεγούν από 12 έτσι ώστε δύο συγκεκριμένοι απ’ αυτούς να μην είναι ποτέ μαζί ούτε στους 7 ούτε στους 5. Γενικεύστε θέτοντας n αντί για 12 και k αντί για 7.

Απάντηση

Αφαιρούμε τους δύο συγκεκριμένους άνδρες και επιλέγουμε τους k-1 από τους υπόλοιπους n-2. Οι τρόποι είναι $\binom{n-2}{k-1}$. Στην συνέχεια βάζουμε τον A από τους δύο στην ομάδα των k-1 και τον B στους n-k-1. Υπάρχει όμως και η αντίστροφη δυνατότητα αν υποθέσουμε ότι το k≠n/2. Άρα συνολικά $2\binom{n-2}{k-1}$ τρόποι *όταν k≠n/2*. Όταν k=n/2, οι τρόποι είναι $\binom{n-2}{k-1}$. Για n=12 και k=7 έχουμε 420 τρόπους.