Ασκήσεις Κατηγορηματικής Λογικής

1)

i) Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις είναι όροι της πρωτοβάθμιας Κατηγορηματικής Λογικής (κι εξηγείστε γιατί δεν είναι, όποιες δεν είναι). Κάντε λογικές υποθέσεις σχετικά με το είδος των συμβόλων:

$\oplus(f(x,y),e)$, $\oplus(\oplus(\otimes(x,x),\otimes(y,y)),1)$, $a\in\{x,y\}$, $\oplus(1,1)$, $1\approx x$

ii) Ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις είναι τύποι της πρωτοβάθμιας Κατηγορηματικής Λογικής (κι εξηγείστε γιατί δεν είναι, όποιες δεν είναι):

$\exists x(x\approx x_1\wedge p(x,x_1)),\ (x\approx y)\vee x,\ (\exists x\approx x_1)p(x,x_1),\ \exists x_1(p(x_1,1))$

iii) Ποιες από τις εμφανίσεις των μεταβλητών x_1, x_2 είναι ελεύθερες και ποιες δεσμευμένες στους παρακάτω τύπους;

$\forall x_1(x_1\approx x_2)\to p(x_1)$, $\forall x_1(s(x_1,x_2)\to p(x_1))$, $\forall x_1(s(x_1,x_2)\to p(x_1))\wedge p(x_2)$,

$\forall x_1\forall x_2(s(x_1,x_2)\to p(x_1))\wedge p(x_2)$, $\forall x_1\forall x_2(s(x_1,x_2)\to p(x_1))\to p(x_2))$

iv) Ποιοι από τους παρακάτω τύπους είναι προτάσεις;

$\forall x_1\forall x_2(s(x_1,x_2))\to(p(x_1)\to p(x_2))$, $\exists x_1(x_1\approx e)\wedge\forall x_1\exists x_2(p(x_1,e)\vee(x_1\approx x_2))$,

$\exists x_1((x_1\approx e)\wedge\exists x_2(p(x_1,e)\vee(x_1\approx x_2)))$, $\exists x_1(x_1\approx e)\wedge\exists x_2((p(x_1,e)\vee(x_1\approx x_2))$

Απάντηση

i. Τα σύμβολα $\oplus$, $\otimes$ και f είναι διμελή συναρτησιακά σύμβολα, τα e και 1 είναι σύμβολα σταθερών και το ∈ είναι κατηγορηματικό σύμβολο. Με αυτές τις υποθέσεις, οι 1η, 2η και 4η έκφραση είναι όροι της γλώσσας ενώ η 3η και η 5η είναι ατομικοί τύποι.

ii. Δεν είναι τύποι οι εκφράσεις $(x\approx y)\vee x,\ (\exists x\approx x_1)p(x,x_1)$.

iii. Οι ελεύθερες εμφανίσεις των μεταβλητών φαίνονται με κόκκινο. Οι υπόλοιπες είναι δεσμευμένες.

$\forall x_1(x_1\approx x_2)\to p(x_1)$, $\forall x_1(s(x_1,x_2)\to p(x_1))$, $\forall x_1(s(x_1,x_2)\to p(x_1))\wedge p(x_2)$,

$\forall x_1\forall x_2(s(x_1,x_2)\to p(x_1))\wedge p(x_2)$, $\forall x_1\forall x_2(s(x_1,x_2)\to p(x_1))\to p(x_2))$

iv. Προτάσεις είναι οι:

$\exists x_1(x_1\approx e)\wedge\forall x_1\exists x_2(p(x_1,e)\vee(x_1\approx x_2))$

$\exists x_1((x_1\approx e)\wedge\exists x_2(p(x_1,e)\vee(x_1\approx x_2)))$

2) Έστω η πρωτοβάθμια γλώσσα με σύμπαν τους φυσικούς αριθμούς, ένα σύμβολο σταθεράς το 0, και δύο συναρτησιακά σύμβολα, το μονομελές s που ορίζεται σαν s(x)=x+1 και το διμελές * που ορίζεται σαν την πράξη του πολλαπλασιασμού. Για καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις, γράψτε στην γλώσσα αυτή τον τύπο που την εκφράζει.
   i) Ο x είναι άρτιος αριθμός,
   ii) Ο x είναι πρώτος αριθμός,
   iii) Κάθε αριθμός έχει πρώτο διαιρέτη.

   Απάντηση

   Εισάγουμε τις συντμήσεις $1 = s(0)$ και $2 = s\big(s(0)\big)$.

   i) $\varphi(x) = \exists y(x \approx 2 * y)$
   ii) $\psi(x) = x \not\approx 0 \wedge x \not\approx 1 \wedge \forall z \forall w(x \approx z * w \rightarrow z \approx 1 \vee w \approx 1)$
   iii) $\forall u \exists x \exists y\big(u \approx x * y \wedge \psi(x)\big)$

3) Να μεταφραστεί στη γλώσσα της Πρωτοβάθμιας Λογικής καθεμιά από τις παρακάτω εκφράσεις, εισάγοντας τα απαιτούμενα σύμβολα σχέσεων και σταθερών, σύμφωνα με το παράδειγμα:

   Παράδειγμα

   Κάθε μουσικός παίζει ακριβώς ένα όργανο.

   Κατηγορήματα:

   Μ = μουσικός, Ο = όργανο, Π = παίζει

   $\forall x(M(x) \rightarrow \exists y(O(y) \wedge \Pi(x,y) \wedge \forall z((O(z) \wedge \neg(y \approx z)) \rightarrow \neg\Pi(x,z))))$

   1. Κανένας μουσικός που παίζει έγχορδο δεν παίζει πνευστό όργανο.
   2. Κάποιος μουσικός παίζει ή πιάνο, ή κάποιο πνευστό όργανο, αλλά όχι σαξόφωνο.
   3. Ένας μουσικός θεωρείται επιτυχημένος αν έχει εκδώσει τουλάχιστον ένα χρυσό άλμπουμ.
   4. Υπάρχουν τουλάχιστον δυο μουσικοί που παίζουν τουλάχιστον δυο όργανα ο καθένας, αν και όχι τα ίδια.
   5. Ο Γιάννης είναι μουσικός, όπως και η Ράνια, αλλά ενώ το όργανο που παίζει ο Γιάννης είναι πιάνο, η Ράνια παίζει μόνον τρομπόνι.

   Απάντηση

1. Τα κατηγορήματα της πρότασης είναι

Μ = μουσικός, Α = έγχορδο όργανο, Β = πνευστό όργανο, Π(x,y) = παίζει ο x το y

Η συμβολική απόδοση της πρότασης είναι

$$\forall x(M(x) \wedge \exists y(A(y) \wedge \Pi(x,y)) \rightarrow \neg\exists z(B(z) \wedge \Pi(x,z)))$$

2. Τα κατηγορήματα της πρότασης είναι

Μ = μουσικός, Ρ = πιάνο, Σ = σαξόφωνο, Β = πνευστό όργανο, Π = παίζω

Και η συμβολική απόδοση της πρότασης είναι

$$\exists x \exists y(M(x) \wedge \Pi(x,y) \wedge [(P(y) \vee B(y)) \wedge \neg\, \Sigma(y)])$$

Σημείωση: Οι έννοιες Πιάνο και Σαξόφωνο θα μπορούσαν να είναι επίσης και σταθερές

3. Τα κατηγορήματα της πρότασης είναι

Μ = μουσικός, Α(x,y) = έχει εκδώσει ο x το y, Β = θεωρείται επιτυχημένος, Γ = χρυσό άλμπουμ

Και η συμβολική απόδοση της πρότασης είναι

$$\forall x\ (M(x) \wedge \exists z(\Gamma(z) \wedge A(x,z)) \rightarrow B(x))$$

4. Τα κατηγορήματα είναι

Μ = μουσικός, Ο = όργανο, Π = παίζω

και η συμβολική απόδοση είναι

$$\exists x \exists y \exists u \exists v \exists z \exists w(\ \neg(x \approx y \vee u \approx v \vee z \approx w) \wedge M(x) \wedge M(y) \wedge O(u) \wedge O(v) \wedge O(z) \wedge O(w) \wedge \Pi(x,u) \wedge \Pi(x,v) \wedge \Pi(y,z) \wedge \Pi(y,w) \wedge [\neg(u \approx z \vee u \approx w) \vee \neg(v \approx z \vee v \approx w)]\ )$$

5. Τα κατηγορήματα είναι

Μ = μουσικός, Π = παίζω, Ο = όργανο, Ρ = πιάνο, Τ = τρομπόνι

Οι σταθερές είναι “Γιάννης” και “Ράνια”

και η συμβολική απόδοση της πρότασης είναι

$$M(\text{Γιάννης}) \wedge M(\text{Ράνια}) \wedge \exists x(P(x) \wedge \Pi(\text{Γιάννης}, x))$$

$$\wedge \exists y(T(y)\ \wedge \Pi(\text{Ράνια}, y)) \wedge \forall z(O(z) \wedge \neg T(z) \rightarrow \neg \Pi(\text{Ράνια}, z))$$

4) Σε μια πρωτοβάθμια γλώσσα που περιέχει ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο *P*, ένα μονομελές συναρτησιακό σύμβολο f και ένα σύμβολο σταθεράς c θεωρήστε τις προτάσεις

1. $\exists x \exists y \exists z\, [P(x,z) \wedge P(z,y)]$
2. $\forall x \forall y \exists z\, [P(x,z) \wedge P(z,y)]$
3. $\forall x \forall y\, [P(x,c) \wedge P(c,y) \rightarrow x \approx c \vee y \approx c]$
4. $\forall x \forall y\, [P(x,c) \wedge P(c,y) \rightarrow P(x,y)]$
5. $\exists x (f(x)=c)$

Εξετάστε αν οι παραπάνω προτάσεις είναι αληθείς η ψευδείς σε καθεμιά από τις παρακάτω δομές:

α) Στο σύνολο των φυσικών αριθμών N, όπου το $P(x,y)$ σημαίνει $x<y$, το f(x) δίνει τον επόμενο του x και η σταθερά c ερμηνεύεται με το στοιχείο 7.

β) Στο διμελές σύνολο {0,1} όπου το $P(x,y)$ σημαίνει $x \le y$, f(x)=1-x και η σταθερά c ερμηνεύεται με το στοιχείο 0.

γ) Στην δομή που περιγράφει μια οικογένεια που αποτελείται από τους δύο γονείς Γιώργο και Δήμητρα και τα τρία τους παιδιά Κώστα, Μαρία και Ελένη. Ως σύμπαν θεωρούμε το σύνολο των μελών της οικογένειας {**Γιώργος**, **Δήμητρα**, **Κώστας**, **Μαρία**, **Ελένη**} ενώ το $P(x,y)$ σημαίνει ότι οι x,y είναι αδέρφια, το f(x) δίνει τον πατέρα του x αν ο x είναι παιδί και τον σύζυγο του x αν ο x είναι γονέας, και η σταθερά c ερμηνεύεται με το στοιχείο **Κώστας**.

δ) Στη δομή με σύμπαν το υποσύνολο των μελών της παραπάνω οικογένειας {**Κώστας**, **Ελένη**} όπου το $P(x,y)$ σημαίνει ότι οι x,y έχουν τους ίδιους γονείς, f(x)=x και η σταθερά c ερμηνεύεται με το στοιχείο **Κώστας**.

Απάντηση

α) 1-Α, 2-Ψ, 3-Ψ, 4-Α, 5-Α

β) 1-Α, 2-Ψ, 3-Α, 4-Α, 5-Α

γ) 1-Α, 2-Ψ, 3-Ψ, 4-Ψ, 5-Ψ

δ) 1-Α, 2-Ψ, 3-Ψ, 4-Ψ, 5-Α

5) Θεωρούμε το σύνολο {1,2,3} και συμβολίζουμε με P({1,2,3}) το δυναμοσύνολό του, δηλαδή το σύνολο που περιέχει σαν στοιχεία τα οκτώ υποσύνολα του {1,2,3}:

$$P(\{1,2,3\}) = \{\ \varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\},\ \{1,2,3\}\ \}$$

Ερμηνεύουμε στη δομή αυτή το κατηγορηματικό σύμβολο **Q** με τη σχέση «είναι υποσύνολο του» (δηλαδή **Q**(x,y) αν και μόνον $x \subseteq y$) και το σύμβολο σταθεράς **c** με το στοιχείο $\varnothing$, Γράψτε προτάσεις της Κατηγορηματικής Λογικής που να δηλώνουν ότι

i. το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου
ii. υπάρχει σύνολο που περιέχει όλα τα υποσύνολα.
iii. το κενό σύνολο έχει μόνο ένα υποσύνολο, τον εαυτό του
iv. για οποιοδήποτε ζευγάρι συνόλων υπάρχει ένα κοινό υποσύνολο που είναι το μεγαλύτερο δυνατό (γνωστό ως τομή συνόλων)
v. για οποιοδήποτε ζευγάρι συνόλων υπάρχει ένα κοινό σύνολο που τα περιέχει και είναι το μικρότερο δυνατό (γνωστό ως ένωση συνόλων)

Απάντηση

i) $\forall x Q(c,x)$
ii) $\exists x \forall y Q(y,x)$
iii) $\forall x(Q(x,c) \to x \approx c)$
iv) $\forall x \forall y \exists z\big(Q(z,x) \wedge Q(z,y) \wedge \forall w(Q(z,w) \to w \approx z \vee (\neg Q(w,x) \vee \neg Q(w,y)))\big)$
v) $\forall x \forall y \exists z\big(Q(x,z) \wedge Q(y,z) \wedge \forall w(Q(w,z) \to w \approx z \vee (\neg Q(x,w) \vee \neg Q(y,w)))\big)$

6) Θεωρούμε την πρωτοβάθμια γλώσσα που ορίζεται στο σύνολο των γραφημάτων και περιλαμβάνει ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P η ερμηνεία του οποίου είναι P(x,y): «οι κορυφές x και y του γραφήματος ενώνονται με ακμή». Στην γλώσσα αυτή γράψτε τύπους που να δηλώνουν:
   i) Στο γράφημα δεν υπάρχει ανακύκλωση (δηλαδή ακμή που τα δύο άκρα της ταυτίζονται).
   ii) Το γράφημα δεν περιέχει τρίγωνο (κύκλο μήκους 3).
   iii) Υπάρχουν στο γράφημα 3 διαφορετικές κορυφές βαθμού 3.
   iv) Υπάρχει στο γράφημα κορυφή που συνδέεται με όλες τις άλλες εκτός από μία.
   v) Υπάρχει μία μόνο κοινή γειτονική κορυφή στις κορυφές x και y.

Απάντηση

i) $\forall x \neg P(x,x)$

ii) $\neg \exists x \exists y \exists z\big(x \neq y \wedge y \neq z \wedge z \neq x \wedge P(x,y) \wedge P(y,z) \wedge P(z,x)\big)$

iii) Γράφουμε τον τύπο «η x έχει βαθμό 3»:

$Q(x) = \exists u \exists v \exists w(u \neq v \wedge v \neq w \wedge w \neq u \wedge P(x,u) \wedge P(x,v) \wedge Px,w) \wedge$
$\forall z(P(x,z) \to z \approx u \vee z \approx v \vee z \approx w)$

Με την βοήθεια αυτού η ζητούμενη πρόταση είναι:

$$\exists x \exists y \exists z\big(x \neq y \wedge y \neq z \wedge z \neq x \wedge Q(x) \wedge Q(y) \wedge Q(z)\big)$$

iv) $\exists x \exists y \Big(x \neq y \wedge \neg P(x,y) \wedge \forall z\big(z \neq y \wedge z \neq x \to P(x,z)\big)\Big)$

v) $\exists u\big(P(x,u) \wedge P(y,u) \wedge \forall z(P(x,z) \wedge P(y,z) \to z \approx u)\big)$

7) Ερμηνεύουμε στους φυσικούς αριθμούς (που περιλαμβάνουν και το 0) το κατηγόρημα P(x,y) σαν «ο x διαιρεί τον y». Ποιοί από τους παρακάτω τύπους αληθεύουν;

i) $\exists x \forall y P(x,y)$

ii) $\exists y \forall x P(x,y)$

iii) $\neg \exists x \forall y (P(y,x) \to y \approx 1 \vee y \approx x)$

iv) $\forall x \forall y \forall z (P(z,y) \wedge P(y,x) \to P(z,x))$

Απάντηση

i) Σωστή

ii) Σωστή

iii) Λάθος

iv) Σωστή

8) Έστω μία γλώσσα *L* πρώτης τάξης με ένα μονομελές συναρτησιακό σύμβολο *f* και ένα διμελές συναρτησιακό σύμβολο g. Έστω ερμηνεία της L με σύμπαν το σύνολο $\mathbb{N} - \{0\}$ στην οποία στο g ανατίθεται η γνωστή μας πρόσθεση φυσικών αριθμών ενώ στο *f* ανατίθεται η συνάρτηση που για κάθε φυσικό αριθμό *n* επιστρέφει 1 αν *n=1,* και αν το *n* είναι διάφορο του 1 επιστρέφει το μικρότερο πρώτο αριθμό που είναι διαιρέτης του *n*. Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος.

i. Ο τύπος $\exists x \exists y \left(f\big(g(x,y)\big) \approx f(x) \right)$ αληθεύει στην παραπάνω ερμηνεία.

ii. Ο τύπος $\forall x \forall y \left(f\big(g(x,y)\big) \approx f(x) \right)$ αληθεύει στην παραπάνω ερμηνεία.

iii. Ο τύπος $\exists x \forall y \left(f\big(g(x,y)\big) \approx f(x) \right)$ αληθεύει στην παραπάνω ερμηνεία.

iv. Ο τύπος $\forall x \exists y \left(f\big(g(x,y)\big) \approx f(x) \right)$ αληθεύει στην παραπάνω ερμηνεία.

β) Έστω μία γλώσσα *L* πρώτης τάξης με μιά σταθερά **c**, ένα διμελές συναρτησιακό σύμβολο $\oplus$, και ένα διμελές συναρτησιακό σύμβολο $\otimes$. Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος.

i. Ο τύπος $F_1 \equiv \forall u \forall v \exists x (\neg(v \approx c) \to (u \oplus (v \otimes x) \approx c))$ αληθεύει στην ερμηνεία με σύμπαν τους πραγματικούς αριθμούς στην οποία στο ***c*** αντιστοιχίζεται το 0, στο $\oplus$ αντιστοιχίζεται η πρόσθεση και στο $\otimes$ ο πολλαπλασιασμός.

ii. Ο τύπος $\neg F_1$ αληθεύει στην ερμηνεία με σύμπαν τους ακέραιους αριθμούς στην οποία στο ***c*** αντιστοιχίζεται το 0, στο $\oplus$ αντιστοιχίζεται η πρόσθεση και στο $\otimes$ ο πολλαπλασιασμός.

iii. Ο τύπος $F_2 \equiv \forall u \forall v \forall w \exists x (\neg(w \approx c) \to (u \oplus (v \otimes x) \oplus ((w \otimes (x \otimes x)) \approx c)))$ αληθεύει στην ερμηνεία με σύμπαν τους μιγαδικούς αριθμούς στην οποία στο ***c*** αντιστοιχίζεται το 0, στο $\oplus$ αντιστοιχίζεται η πρόσθεση και στο $\otimes$ ο πολλαπλασιασμός.

iv. Ο τύπος $\neg F_2$ αληθεύει στην ερμηνεία με σύμπαν τους πραγματικούς αριθμούς στην οποία στο ***c*** αντιστοιχίζεται το 0, στο $\oplus$ αντιστοιχίζεται η πρόσθεση και στο $\otimes$ ο πολλαπλασιασμός.

Απάντηση

α) Παρατηρούμε αρχικά ότι ο τύπος άνευ των ποσοδεικτών, δηλαδή ο $f(g(x,y)) \approx f(x)$ σημαίνει ότι το άθροισμα των δύο αριθμών έχει τον ίδιο μικρότερο πρώτο διαιρέτη (διάφορο του *1*) με τον πρώτο από αυτούς.

i. **Σωστό.** Ο τύπος ζητά την ύπαρξη δύο αριθμών, των οποίων το άθροισμα έχει τον ίδιο μικρότερο πρώτο διαιρέτη με ένας από τους δύο αριθμούς. Εύκολα βλέπουμε ότι ο τύπος αληθεύει, για παράδειγμα, αν $x=y=2$.

ii. **Λάθος.** Ένα απλό αντιπαράδειγμα είναι $x=2$, $y=3$, αφού το *5* δε διαιρείται με το *2*.

iii. **Λάθος.** Αν το x είναι ζυγός αριθμός (οπότε $f(x)=2$) και θέσουμε $y=x+1$, το άθροισμά τους είναι μονός αριθμός, συνεπώς $f(x+y)>2$. Αν το x είναι μονός (συνεπώς $f(x)>2$) και θέσουμε $y=x$, το άθροισμά τους είναι ζυγός αριθμός, συνεπώς $f(x+y)=2$. Σε αμφότερες δηλαδή τις περιπτώσεις, ο τύπος δεν ισχύει.

iv. **Λάθος.** Παρατηρήστε ότι ο τύπος δεν ισχύει για $x=1$, καθώς $f(1)=1$ και $f(1+y)>1$ για οποιοδήποτε y.

β)

i. **Σωστό.** Ο τύπος λέει ότι για κάθε ζεύγος πραγματικών u,v όπου το v δεν είναι *0*, υπάρχει ένας πραγματικός x τέτοιος ώστε $u+v*x=0$. Προφανώς αυτό ο αριθμός είναι ο $x=-u/v$ αφού το v είναι διάφορο του *0*.

ii. **Σωστό.** Πράγματι, η γραμμική εξίσωση δεν έχει πάντοτε ακέραια λύση, ας σκεφτούμε ως παράδειγμα την $1+2x=0$.

iii. **Σωστό.** Ο τύπος λέει ότι για οποιουσδήποτε τρεις μιγαδικούς u,v,w όπου το w δεν είναι *0*, υπάρχει ένας μιγαδικός x τέτοιος ώστε $u+v*x+w*x^2=0$. Πράγματι η δευτεροβάθμια εξίσωση έχει πάντοτε μία μιγαδική λύση.

iv. **Σωστό.** Πράγματι η δευτεροβάθμια εξίσωση δεν έχει πάντοτε μία πραγματική λύση, ας σκεφτούμε ως παράδειγμα την $1+x^2=0$.

9) Βρείτε ποιοι από τους παρακάτω τύπους αληθεύουν *μόνο στους φυσικούς ή μόνο στους πραγματικούς*. (Στην ουσία δηλαδή ένας τέτοιος τύπος διαχωρίζει τους πραγματικούς από τους φυσικούς.) Το διμελές κατηγόρημα $P(x,y)$ σημαίνει ότι $x<y$ και το «$\cdot$» είναι η πράξη του πολλαπλασιασμού.

i. $\exists x \forall y (P(x,y) \vee x \approx y)$
ii. $\forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow \exists z (P(x,z) \wedge P(z,y)))$
iii. $\forall x \exists y (y \approx 2 \cdot x)$
iv. $\exists x \forall y (y \approx x \cdot y)$
v. $\exists x \forall y P(x,y)$
vi. $\exists x \forall y P(y,x)$

Απάντηση

i. Σ ii. Σ iii. Λ iv Λ v. Λ vi. Λ

10) Δίνονται οι πρωτοβάθμιοι τύποι:

i) $\forall x P(x,x)$
ii) $\forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow P(y,x))$
iii) $\forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z))$

α) Πείτε με λόγια ποια ιδιότητα εκφράζει η διμελής σχέση *P* σε κάθε περίπτωση.
β) Για κάθε έναν από τους τρεις παραπάνω τύπους διαδοχικά, βρείτε μια δομή που να ισχύουν οι άλλοι δύο αλλά όχι αυτός. (Π.χ. Θέλουμε δομή που να ισχύουν οι (i), (ii) αλλά όχι ο (iii) κλπ.)

Απάντηση

α) Οι τύποι (i), (ii) και (iii) δηλώνουν αντίστοιχα ότι η σχέση *P* είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.
β) Μια απλή δομή στην οποία ισχύουν οι (ii) και (iii) αλλά όχι η (i) είναι το σύνολο {1,2,3} με την σχέση *P*={(1,1),(1,2), (1,3), (2,3), (2,1), (3,1), (3,2)}. Μια δομή στην οποία ισχύουν οι (i) και (iii) αλλά όχι η (ii) είναι οι φυσικοί αριθμοί με την σχέση *P* να είναι η σχέση «μικρότερος ή ίσος» $\leq$. Τέλος, μια δομή στην οποία ισχύουν οι (i) και (ii) αλλά όχι η (iii) είναι η δομή στο σύνολο {1,2,3} με την σχέση *P*={(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2)}.