Ασκήσεις Προτασιακής Λογικής
Συντακτική Προσέγγιση
Εγκυρότητα-Πληρότητα

1) Ποιες από τις παρακάτω δηλώσεις είναι σωστές και ποιες όχι:
   i) Το $\psi \vdash (\varphi \to \chi) \to \theta$, προκύπτει από το $\{\psi, \varphi, \chi)\} \vdash \theta$, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Απαγωγής μία ή περισσότερες φορές το καθένα.
   ii) Το $\{\varphi, \psi\} \vdash \neg\neg\psi$, προκύπτει από το $\{\psi, \neg\psi\} \vdash \neg\varphi$, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Αντιθετοαναστροφής μία ή περισσότερες φορές το καθένα.
   iii) Το $\varphi \vdash \psi \to \neg\chi$, προκύπτει από το $\{\psi, \chi\} \vdash \neg\varphi$, χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα Απαγωγής και Αντιθετοαναστροφής μία ή περισσότερες φορές το καθένα.
   iv) Το $\varphi \vdash \neg\psi \to \chi$, προκύπτει από το $\{\varphi, \neg\chi\} \vdash \psi$, χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα Απαγωγής και Αντιθετοαναστροφής μία ή περισσότερες φορές το καθένα.

Απάντηση. Λ-Σ-Σ-Λ

2) Χαρακτηρίστε τις παρακάτω δηλώσεις ως Σωστές ή Λάθος;
   i) Ο τύπος $(\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi) \to ((\neg\neg\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$ προκύπτει από το ΑΣ3 με κάποια συντακτική αντικατάσταση.
   ii) Ο τύπος $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to \psi))$ προκύπτει από το ΑΣ2 με κάποια συντακτική αντικατάσταση.
   iii) Με την εφαρμογή του θεωρήματος Αντιθετοαναστροφής, προκύπτει ότι αν $\varphi \vdash \psi$, τότε $\neg\psi \vdash \neg\varphi$.
   iv) Αν το σύνολο $\{\varphi, \psi\}$ είναι αντιφατικό τότε ο τύπος $\varphi \to \neg\psi$ είναι τυπικό θεώρημα.

   Απάντηση. Σ-Λ-Λ-Σ (Για το (iv) αν είναι το {φ,ψ} αντιφατικό τότε από Θεώρημα της Απαγωγής σε άτοπο, {φ}|-¬ψ και από Θεώρημα Απαγωγής |-φ→¬ψ)

3) Συμπληρώστε τα κενά στην παρακάτω **τυπική απόδειξη**:

…$(\varphi \to \psi)$ ……………	**Υπόθεση**
2. $(\varphi \to \psi) \to [\chi \to (\varphi \to \psi)]$	**ΑΣ1**, όπου θέσαμε στη θέση του φ τον τύπο $(\varphi \to \psi)$ και όπου ψ τον τύπο χ.

3. … $\chi \to (\varphi \to \psi)$ ……	1,2 **MP**
4. $(\chi \to (\varphi \to \psi)) \to ((\chi \to \varphi) \to (\chi \to \psi))$	**ΑΣ2**, όπου θέσαμε στη θέση του φ τον τύπο χ. , όπου ψ τον τύπο ..φ.. και όπου χ τον τύπο ψ..
5. $(\chi \to \varphi) \to (\chi \to \psi)$	3,4 **MP**

4) Συμπληρώστε τις επεξηγήσεις των βημάτων στην παρακάτω **τυπική απόδειξη** του $\{\varphi \to \chi, \chi \to \neg\psi\} \vdash \varphi \to \neg\psi$:

1. $\varphi \to \chi$	…Υπόθεση………
2. $\chi \to \neg\psi$	… Υπόθεση ………
3. $(\chi \to \neg\psi) \to (\varphi \to (\chi \to \neg\psi))$	ΑΣ1, με τον τύπο $\chi \to \neg\psi$ στην θέση του φ και τον φ στην θέση του ψ…
4. $\varphi \to (\chi \to \neg\psi)$	…2,3 MP………
5. $(\varphi \to (\chi \to \neg\psi)) \to ((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to \neg\psi))$	ΑΣ2, με τον τύπο φ ως έχει, τον χ στην θέση του ψ και τον $\neg\psi$ στην θέση του χ…
6. $(\varphi \to \chi) \to (\varphi \to \neg\psi)$	4,5 MP……………
7. $\varphi \to \neg\psi$	1,6 MP……………

5) Συμπληρώστε τα κενά στην παρακάτω **τυπική απόδειξη**:

1. …$\neg\varphi \to \chi$…………	Υπόθεση
2. …$\chi \to \neg\psi$…..………	Υπόθεση
3. $(\chi \to \neg\psi) \to (\neg\varphi \to (\chi \to \neg\psi))$	**ΑΣ1**, αντικαθιστώντας όπου φ τον τύπο $\chi \to \neg\psi$ .. και όπου ψ τον τύπο …$\neg\varphi$ ….

4. $\neg\varphi \to (\chi \to \neg\psi)$	**2,3 MP**
5. $(\neg\varphi\to(\chi\to\neg\psi))\to((\neg\varphi\to\chi)\to(\neg\varphi\to\neg\psi))$	**ΑΣ2**, αντικαθιστώντας όπου φ τον τύπο ..$\neg\varphi$ .., όπου ψ τον τύπο . χ . και όπου χ τον τύπο ...$\neg\psi$
6. $(\neg\varphi\to\chi)\to(\neg\varphi\to\neg\psi)$...........	**4,5 MP**
7. $\neg\varphi \to \neg\psi$	**1,6 MP**
8. $(\neg\varphi\to\neg\psi)\to((\neg\varphi\to\psi)\to\varphi)$......	**ΑΣ3**, αντικαθιστώντας όπου φ τον τύπο ...φ... και όπου ψ τον τύπο.....ψ.
9. $(\neg\varphi\to\psi)\to\varphi)$.....................	**7,8 MP**

(Υπόδειξη: Στις παραπάνω ασκήσεις σκεφτείτε τι τύπος πρέπει να μπει σε κάποιο κενό βλέποντας το αποτέλεσμα που έχει η χρήση του κανόνα modus ponens σε κάποιο μεταγενέστερο βήμα.)

6) Επαναλάβατε την τυπική απόδειξη του (4) με χρήση του θεωρήματος Απαγωγής.

Απάντηση. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\{ \varphi \to \chi , \chi \to \neg\psi \} \vdash \varphi \to \neg\psi$. Με χρήση του Θεωρήματος Απαγωγής αρκεί να δείξουμε ότι $\{ \varphi \to \chi , \chi \to \neg\psi, \varphi \} \vdash \neg\psi$. Έχουμε:

1. $\varphi \to \chi$ — Υπόθεση
2. $\chi \to \neg\psi$ — Υπόθεση
3. φ — Υπόθεση
4. χ — 1,3 MP
5. $\neg\psi$ — 2,4 MP

7) Να αποδείξετε ότι $\vdash ((\varphi \to \psi) \to \neg\chi) \to (\chi \to \neg(\varphi \to \psi))$.

Απάντηση.

Με χρήση του Θεωρήματος Απαγωγής αρκεί να δείξουμε:
$(\varphi \to \psi) \to \neg\chi \vdash (\chi \to \neg(\varphi \to \psi))$
Με χρήση του Θεωρήματος Απαγωγής (δεύτερη φορά) αρκεί να δείξουμε:
$\{(\varphi \to \psi) \to \neg\chi,\ \chi\} \vdash \neg(\varphi \to \psi)$
Με χρήση του Θεωρήματος Αντιθετοαναστροφής αρκεί να δείξουμε:
$\{(\varphi \to \psi) \to \neg\chi,\ \varphi \to \psi \} \vdash \neg\chi$
Οπότε:

1. $(\varphi \to \psi) \to \neg\chi$ — Υπόθεση
2. $\varphi \to \psi$ — Υπόθεση
3. $\neg\chi$ — 1,2 MP

8) (α) Δείξτε ότι $(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi) \ \vdash\ (\varphi \to \psi) \to ((\neg\psi \to \varphi) \to \psi)$

(β) Βασιζόμενοι στο (α) δείξτε ότι ο τύπος $((\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)) \to ((\varphi \to \psi) \to ((\neg\psi \to \varphi) \to \psi))$ είναι ταυτολογία.

Απάντηση.

(α) Με εφαρμογή του Θεωρήματος Απαγωγής δύο φορές αρκεί να δείξουμε:

$$\{(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi),\ \varphi \to \psi,\ \neg\psi \to \varphi\} \vdash \psi$$

Η μορφή της τυπικής απόδειξης μας θυμίζει το Θεώρημα Απαγωγής σε άτοπο. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι το παρακάτω σύνολο τύπων είναι αντιφατικό (χρησιμοποιούμε εδώ σαν γνωστό τυπικό θεώρημα και το $\neg\neg\psi \to \psi$):
$\{(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi),\ \varphi \to \psi,\ \neg\psi \to \varphi,\ \neg\psi\}$
Οπότε:

1. $(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$ — Υπόθεση
2. $\varphi \to \psi$ — Υπόθεση
3. $\neg\psi \to \neg\varphi$ — 1,2 MP
4. $\neg\psi$ — Υπόθεση
5. $\neg\varphi$ — 3,4 MP
6. $\neg\psi \to \varphi$ — Υπόθεση
7. φ — 4,6 MP

Τα βήματα 5 και 7 αποδεικνύουν την αντιφατικότητα του συνόλου.

(β) Με εφαρμογή του Θεωρήματος Απαγωγής, η παραπάνω τυπική απόδειξη του (α) δίνει ότι ο τύπος του (β) είναι τυπικό θεώρημα (μεταφέρεται η υπόθεση στα «δεξιά» σαν υπόθεση συνεπαγωγής) και άρα από το Θεώρημα Εγκυρότητας και ταυτολογία.

9) Στις παρακάτω προτάσεις το Τ είναι σύνολο προτασιακών τύπων ενώ το φ είναι τύπος. Ποιες από τις προτάσεις αληθεύουν;

i) Αν $T \vdash \varphi$, τότε το σύνολο $T \cup \{\neg\varphi\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο.

ii) Κάθε τυπική απόδειξη του προτασιακού λογισμού περιλαμβάνει πεπερασμένο αριθμό από βήματα.

iii) Αν το T δεν είναι συνεπές και ο φ αντίφαση, τότε $T \mid\!- \varphi$
iv) Αν το T είναι συνεπές και ο φ ταυτολογία, τότε $T \mid\!- \varphi$

Απάντηση. Σ-Σ-Σ-Σ

10) Έστω φ και ψ τύποι, έστω T σύνολο τύπων. Δείξτε ότι οι δύο παρακάτω δηλώσεις (i) και (ii) είναι ισοδύναμες: (i) $T \mid\!- \varphi \rightarrow \psi$, (ii) $T \cup \{\varphi, \neg\psi\}$ μη ικανοποιήσιμο.

Απάντηση.

(i)→(ii). Επειδή $T \mid\!- \varphi \rightarrow \psi$, από το Θεώρημα Εγκυρότητας ισχύει ότι $T \models \varphi \rightarrow \psi$. Αν T μη ικανοποιήσιμο δεν έχουμε κάτι άλλο να δείξουμε. Αν το T ικανοποιείται σε μία αποτίμηση α τότε και ο $\varphi \rightarrow \psi$ ικανοποιείται στην α. Αν λοιπόν ο φ δεν ικανοποιείται στην α τότε το $T \cup \{\varphi, \neg\psi\}$ είναι μη ικανοποιήσιμο. Αν πάλι και ο φ ικανοποιείται στην α, τότε θα πρέπει να ικανοποιείται και ο ψ στην α, άρα δεν θα ικανοποιείται ο $\neg\psi$ και συνεπώς το $T \cup \{\varphi, \neg\psi\}$ είναι μη ικανοποιήσιμο.

(ii)→(i). Αν το $T \cup \{\varphi, \neg\psi\}$ μη ικανοποιήσιμο, τότε αν το T ικανοποιείται σε μία αποτίμηση α δεν θα πρέπει να ικανοποιείται τουλάχιστον ένας από τους τύπους φ και $\neg\psi$. Αν δεν ικανοποιείται ο φ τότε ο $\varphi \rightarrow \psi$ ικανοποιείται. Αν δεν ικανοποιείται ο $\neg\psi$, τότε ικανοποιείται ο ψ άρα και πάλι ο $\varphi \rightarrow \psi$ ικανοποιείται. Δείξαμε δηλαδή ότι $T \models \varphi \rightarrow \psi$ και από το Θεώρημα Πληρότητας $T \mid\!- \varphi \rightarrow \psi$.

11) **(α)** Χρησιμοποιώντας μόνο τα αξιωματικά σχήματα ΑΣ1-3 (δηλαδή να μην χρησιμοποιηθούν τα Θ. Απαγωγής είτε Αντιθετοαντιστροφής), τις υποθέσεις και τον αποδεικτικό κανόνα Modus Ponens, να δείξετε ότι:
i) $\{ \varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi\} \mid\!- \varphi \rightarrow \chi$
ii) $\{ \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi), \psi\} \mid\!- \varphi \rightarrow \chi$

(β) Χρησιμοποιώντας οποιοδήποτε από τα θεωρήματα Απαγωγής, Αντιθετοαναστροφής, Απαγωγής σε Άτοπο ή συνδυασμό τους, να αποδειχθεί το παρακάτω:

$$\{\chi \rightarrow \neg\psi, \varphi\} \mid\!- \chi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \psi)$$

(γ) Αν T είναι ένα σύνολο προτασιακών και φ είναι ένας οποιοσδήποτε προτασιακός τύπος, να αποδειχθεί ότι:

Αν το $T \cup \{\neg\varphi\}$ είναι αντιφατικό, τότε $T \mid\!- \varphi$

Απάντηση.

(α)

(i)

1.	$\varphi \to \psi$	Υπόθεση
2.	$\psi \to \chi$	Υπόθεση
3.	$(\psi \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))$	**ΑΣ1.** $\mathbf{\Phi} = \psi \to \chi$, $\mathbf{\Psi} = \varphi$
4.	$\varphi \to (\psi \to \chi)$	2,3 **MP**
5.	$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$	**ΑΣ2.** $\mathbf{\Phi} = \varphi$, $\mathbf{\Psi} = \psi$, $\mathbf{X} = \chi$
6.	$(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)$	4,5 **MP**
7.	$\varphi \to \chi$	1,6 **MP**

(ii)

1.	$\varphi \to (\psi \to \chi)$	Υπόθεση
2.	ψ	Υπόθεση
3.	$\psi \to (\varphi \to \psi)$	**ΑΣ1.** $\mathbf{\Phi} = \psi$, $\mathbf{\Psi} = \varphi$
4.	$\varphi \to \psi$	2,3 **MP**
5.	$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$	**ΑΣ2.** $\mathbf{\Phi} = \varphi$, $\mathbf{\Psi} = \psi$, $\mathbf{X} = \chi$
6.	$(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)$	1,5 **MP**
7.	$\varphi \to \chi$	4,6 **MP**

(β)

Για να αποδείξουμε ότι: $\{\chi \to \neg\psi, \varphi\} \vdash \chi \to \neg(\varphi \to \psi)$

<=αρκεί από **Θ.ΑΠ** $\{\chi \to \neg\psi, \varphi, \chi\} \vdash \neg(\varphi \to \psi)$

$\Leftrightarrow$ αρκεί από **Θ.ΑΝ** $\boldsymbol{\{\varphi \to \psi, \chi \to \neg\psi, \chi\} \vdash \neg\varphi}$

Όμως **T** $\cup$ $\boldsymbol{\{\varphi\} = \{\varphi \to \psi, \chi \to \neg\psi, \chi\} \cup \{\varphi\}}$ αντιφατικό **

<=από **Θ.ΑΑ** T = $\boldsymbol{\{\varphi \to \psi, \chi \to \neg\psi, \chi\} \vdash \neg\varphi}$

Απόδειξη ότι **T $\cup$ $\boldsymbol{\{\varphi\} = \{\varphi \to \psi, \chi \to \neg\psi, \chi\} \cup \{\varphi\}}$ αντιφατικό

1.	$\varphi \to \psi$	Υπόθεση
2.	$\chi \to \neg\psi$	Υπόθεση
3.	χ	Υπόθεση
4.	φ	Υπόθεση
5.	$\boldsymbol{\neg\psi}$	2,3 **MP**
6.	$\boldsymbol{\psi}$	1,4 **MP**

(γ)

Επειδή **T**$\cup$$\boldsymbol{\{\neg\varphi\}}$ αντιφατικό υπάρχει τύπος ψ, τέτοιος ώστε:

$\mathbf{T}\cup\{\neg\varphi\} \vdash \boldsymbol{\psi}$ και $\mathbf{T}\cup\{\neg\varphi\} \vdash \boldsymbol{\neg\psi}$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Απαγωγής έχουμε:

T |- $\neg\varphi \rightarrow \psi$ και **T** |- $\neg\varphi \rightarrow \neg\psi$

Άρα σύμφωνα με τα παραπάνω μπορούμε να κατασκευάσουμε μια τυπική απόδειξη των **$\neg\varphi \rightarrow \psi$ και $\neg\varphi \rightarrow \neg\psi$** της μορφής:

1.	…..	
2.	…..	
...	......	
n.	…..	
n+1.	$\neg\varphi \rightarrow \psi$	
n+2.	$\neg\varphi \rightarrow \neg\psi$	
n+3.	$(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow [(\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi]$	... **ΑΣ3**
n+4.	$(\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi$	... **(n+2)**, (n+3) **MP**
n+5.	φ	... **(n+1)**, (n+4) **MP**

Άρα **T** |- **φ**.

12) Έστω Τ ένα αντιφατικό σύνολο τύπων και *φ οποιοσδήποτε* τύπος. Δείξτε ότι Τ|-*φ*.

Απάντηση.

Αν Τ είναι αντιφατικό τότε προφανώς είναι αντιφατικό σύνολο και το $T\cup\{\neg\varphi\}$ για οποιονδήποτε τύπο *φ*. Από το Θεώρημα Απαγωγής σε άτοπο (ή εναλλακτικά από την άσκηση 11.γ που στην ουσία είναι η απόδειξη του Θεωρήματος Απαγωγής σε Άτοπο) έχουμε λοιπόν ότι Τ|-$\neg\neg\varphi$ και από το τυπικό θεώρημα $\neg\neg\varphi \rightarrow\varphi$ και τον τύπο $\neg\neg\varphi$ με MP έχουμε το ζητούμενο.

13) Ποιές από τις παρακάτω δηλώσεις είναι σωστές;

i. Αν *T* σύνολο τύπων, τότε το *T* είναι συνεπές αν και μόνο αν υπάρχει τύπος *φ* που δεν αποδεικνύεται τυπικά από το *T*.
ii. Αν *T* συνεπές σύνολο τύπων και $T \vdash \varphi$, τότε ο *φ* είναι ταυτολογία.
iii. Αν *T* συνεπές σύνολο τύπων και ο τύπος *φ* είναι ταυτολογία, τότε το $T \cup \{\varphi\}$ είναι ικανοποιήσιμο (επαληθεύσιμο).
iv. Αν το $\{\varphi, \psi\}$ είναι ικανοποιήσιμο τότε το $\{\neg\varphi, \neg\psi\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο.

Απάντηση.

i. **ΣΩΣΤΟ**: Αν το *T* δεν είναι συνεπές τότε από αυτό αποδεικνύονται οι *φ* και $\neg\varphi$, για κάποιο *φ*, και άρα κάθε τύπος. Το αντίστροφο ισχύει τετριμμένα.
ii. **ΛΑΘΟΣ**: Για μια μεταβλητή *p* και με $T = \{ p \}$, $\varphi = p$ έχουμε και συνεπές *T* και $T \vdash \varphi$, αλλά το *φ* (= *p*, μεταβλητή) δεν είναι ταυτολογία.

iii. **ΣΩΣΤΟ**: Ένα συνεπές σύνολο T είναι πάντα ικανοποιήσιμο από κάποια αποτίμηση, η οποία θα επαληθεύει αναγκαστικά και το φ, αφού αυτό είναι ταυτολογία.

iv. **ΛΑΘΟΣ**: Αν οι τύποι φ, ψ είναι δύο απλές προτασιακές μεταβλητές, τότε για το $\{\varphi, \psi\}$ αρκεί η αποτίμηση $\varphi, \psi =$ ΑΛΗΘΕΣ, ενώ για το $\{\neg\varphi, \neg\psi\}$ αρκεί η $\varphi, \psi =$ ΨΕΥΔΕΣ.

14) Έστω $\psi_i, i = 1,\dots,n$, $\chi_j, j = 1,\dots,m$ και φ τύποι του προτασιακού λογισμού.

i) Δείξτε ότι αν $\{\psi_1,\dots,\psi_n\} \models \varphi \rightarrow (\chi_1 \vee \dots \vee \chi_m)$ και $\{\psi_1,\dots,\psi_n\} \models \chi_1 \vee \dots \vee \chi_m \vee \varphi$, τότε $\{\psi_1,\dots,\psi_n\} \models \chi_1 \vee \dots \vee \chi_m$

ii) Δείξτε χρησιμοποιώντας το (i) ότι αν $\{\psi, \varphi\} \vdash \chi$ και $\{\psi\} \vdash \chi \vee \varphi$, τότε $\{\psi\} \vdash \chi$.

Απάντηση.

(i) Αν μία αποτίμηση που επαληθεύει όλους τους τύπους $\psi_1,\dots,\psi_n$ επαληθεύει και τον φ, τότε λόγω της πρώτης ταυτολογικής συνεπαγωγής, επαληθεύει και την διάζευξη $\chi_1 \vee \dots \vee \chi_m$. Αν πάλι δεν επαληθεύει τον φ τότε λόγω της δεύτερης ταυτολογικής συνεπαγωγής επαληθεύει την διάζευξη $\chi_1 \vee \dots \vee \chi_m \vee \varphi$ και άρα και την $\chi_1 \vee \dots \vee \chi_m$.

(ii) Λόγω του Θεωρήματος Εγκυρότητας έχουμε ότι $\{\psi, \varphi\} \models \chi$ $\{\psi\} \models \chi \vee \varphi$ Εφαρμόζοντας το (i) για ένα τύπο ψ έχουμε ότι $\{\psi\} \models \chi$ και από το Θεώρημα Πληρότητας $\{\psi\} \vdash \chi$.

15) Να δειχθεί ότι $\{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi), (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi\} \vdash_{\Pi\Lambda} (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \chi$

α) Κάνοντας χρήση του Θεωρήματος Απαγωγής.

β) Χωρίς να γίνει χρήση του Θεωρήματος Απαγωγής.

Απάντηση.

α) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξουμε ότι

$\{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi), (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi, \varphi \rightarrow \psi\} \vdash_{\Pi\Lambda} \chi$. Οπότε η απόδειξη είναι:

1.	$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$	Υπόθεση
2.	$(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi$	Υπόθεση
3.	$\varphi \rightarrow \psi$	Υπόθεση
4.	φ	2,3 MP
5.	$\psi \rightarrow \chi$	1,4 MP
6.	ψ	3,4 MP
7.	χ	5,6 MP

β) Χωρίς το Θεώρημα Απαγωγής έχουμε:

1. $\varphi\rightarrow(\psi\rightarrow\chi)$ Υπόθεση
2. $(\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow\varphi$ Υπόθεση
3. $(\varphi\rightarrow(\psi\rightarrow\chi))\rightarrow((\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow(\varphi\rightarrow\chi))$ ΑΣ2 χωρίς αντικαταστάσεις
4. $(\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow(\varphi\rightarrow\chi)$ 1,3 MP
5. $((\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow(\varphi\rightarrow\chi))\rightarrow(((\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow\varphi)\rightarrow((\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow\chi))$ ΑΣ2 όπου στην θέση του φ μπήκε ο $(\varphi\rightarrow\psi)$, στη θέση του ψ ο φ και το χ παρέμεινε.
6. $((\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow\varphi)\rightarrow((\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow\chi)$ 4,5 MP
7. $(\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow\chi$ 2,6 MP

16) Έστω μια ακολουθία τύπων ψ_n, της μορφής $\psi_0=(\varphi\rightarrow\varphi)$ και $\psi_n=(\varphi\rightarrow\psi_{n-1})$ για $n>0$ και τυχόντα τύπο φ. Αποδείξτε επαγωγικά, ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ο τύπος ψ_n είναι τυπικό θεώρημα.

Απάντηση.

Βάση. Για n=0 ο τύπος $\psi_0=(\varphi\rightarrow\varphi)$ είναι γνωστό τυπικό θεώρημα.

Υπόθεση. Έστω ότι για $k\leq n$ ο τύπος $\psi_k=(\varphi\rightarrow\psi_{k-1})$ είναι τυπικό θεώρημα.

Βήμα. Θα δείξουμε ότι και για k=n+1, ο τύπος $\psi_{n+1}=(\varphi\rightarrow\psi_n)$ είναι επίσης τυπικό θεώρημα. Εφόσον από την υπόθεση ότι $\psi_n=(\varphi\rightarrow\psi_{n-1})$ είναι τυπικό θεώρημα, θα υπάρχει μία τυπική απόδειξη που έστω στο βήμα m καταλήγει στον ψ_n. Η τυπική απόδειξη για τον ψ_{n+1} θα είναι:

1. ----
2. ----

----

m. ψ_n

m+1. $\psi_n\rightarrow(\varphi\rightarrow\psi_n)$ ΑΣ1, όπου στην θέση του φ είναι ο ψ_n και στου ψ, ο φ.

m+2. m, m+1 MP.

17) Δείξτε χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα Εγκυρότητας και Πληρότητας ότι για κάθε Τ, Τ συνεπές ανν Τ ικανοποιήσιμο. Είναι το $\{p_1 \rightarrow \neg p_2 \wedge p_3,\ p_1 \rightarrow (p_3 \rightarrow \neg p_2), p_1 \leftrightarrow \neg p_2\}$ συνεπές ;

Απάντηση.

Αυτή είναι μια βασική πρόταση και την έχουμε χρησιμοποιήσει σε ασκήσεις αρκετές φορές. Έστω Τ μη ικανοποιήσιμο. Τότε $T \models \varphi$ και $T \models \neg \varphi$ για οποιονδήποτε τύπο φ και άρα από το Θεώρημα Πληρότητας $T \vdash \varphi$ και $T \vdash \neg\varphi$ που σημαίνει ότι Τ αντιφατικό. Αν πάλι το Τ είναι αντιφατικό, τότε $T \vdash \varphi$ και $T \vdash \neg\varphi$ για κάποιο τύπο φ και από το Θεώρημα Εγκυρότητας $T \models \varphi$ και $T \models \neg \varphi$. Αυτό όμως μπορεί να συμβεί μόνο αν Τ μη ικανοποιήσιμο.

Το σύνολο $\{p_1 \rightarrow \neg p_2 \wedge p_3,\ p_1 \rightarrow (p_3 \rightarrow \neg p_2), p_1 \leftrightarrow \neg p_2\}$ μπορεί να ελεγχθεί ως προς την συνέπεια του με την βοήθεια της παραπάνω πρότασης. Θα πρέπει λοιπόν να είναι ικανοποιήσιμο. Αν λοιπόν p_1 αληθής θα πρέπει p_2 ψευδής (από τον 3^o τύπο) και p_3 αληθής (από τον 1^o). Αυτή η αποτίμηση επαληθεύει και τον 2^o τύπο και άρα το σύνολο είναι ικανοποιήσιμο.

18) Χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα Εγκυρότητας και Πληρότητας της ΠΛ, δείξτε ότι αν $T \models \varphi$ (όπου φ τύπος και Τ άπειρο σύνολο από τύπους) τότε υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο T_0 του Τ τέτοιο που $T_0 \models \varphi$.

Απάντηση.

Από το Θεώρημα Πληρότητας έχουμε ότι επειδή $T \models \varphi$ τότε και $T \vdash \varphi$. Άρα υπάρχει μία *πεπερασμένη* ακολουθία τυπικής απόδειξης που καταλήγει στον τύπο φ. Επειδή είναι πεπερασμένη, θα περιλαμβάνει επίσης ένα πεπερασμένο σύνολο υποθέσεων από τύπους του Τ. Έστω $S \subseteq T$ αυτό το πεπερασμένο υποσύνολο του Τ που περιλαμβάνει ότι υποθέσεις χρειάζεται η τυπική απόδειξη. Προφανώς τότε $S \vdash \varphi$ και άρα από το Θεώρημα Εγκυρότητας και $S \models \varphi$.

19) Εξηγήστε πως μπορείτε αλγοριθμικά να ελέγξετε αν $T \vdash \varphi$ όπου Τ σύνολο τύπων και φ ένας τύπος.

Απάντηση.

Τα Θεωρήματα Εγκυρότητας και Πληρότητας μας λένε ότι $T \vdash \varphi$ αν και μόνο αν $T \models \varphi$. Αλλά η τελευταία δήλωση ελέγχεται κατά τα γνωστά με την βοήθεια πίνακα αληθείας όπου ελέγχουμε αν σε όποιες γραμμές το σύνολο Τ ικανοποιείται και ο τύπος φ ικανοποιείται επίσης.

20) Δώστε τις παρακάτω τυπικές αποδείξεις. Χρησιμοποιήστε ελεύθερα όλα τα σχετικά θεωρήματα εκτός από το θεώρημα Πληρότητας.

i. $\vdash (\varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\varphi_3 \to \cdots (\varphi_{n-1} \to (\varphi_n \to \varphi_1) \cdots)$

(όπου δεξιές παρενθέσεις υπάρχουν μόνο στο τέλος και είναι n στο πλήθος)

ii. $\{(p_i \to p_{i+1}): i \in \mathbf{N}\} \cup \{\neg p_5\} \vdash \neg p_2$ (θεωρήσατε γνωστό ότι $\vdash (\varphi \to \neg\neg\varphi)$

iii. $\{ (\varphi \to \psi), (\varphi \to \neg\psi) \} \vdash \neg\varphi$

Απάντηση

Από το *θεώρημα της Απαγωγής* χρησιμοποιώντας το n-1 φορές αρκεί να δείξουμε ότι,

$\varphi_1 \vdash (\varphi_2 \to (\varphi_3 \to \cdots (\varphi_{n-1} \to (\varphi_n \to \varphi_1) \cdots)$, ή,

$\varphi_1, \varphi_2 \vdash (\varphi_3 \to \cdots (\varphi_{n-1} \to (\varphi_n \to \varphi_1) \cdots)$, ή

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \vdash (\varphi_4 \to \cdots (\varphi_{n-1} \to (\varphi_n \to \varphi_1) \cdots)$, και τελικά

$\cdots$

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}, \varphi_n \vdash \varphi_1$, το οποίον ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο.

(*ii*) Από το *θεώρημα της Αντιθετοαναστροφής* αρκεί να δείξουμε ότι,

$\{ (p_i \to p_{i+1}): i \in \mathbf{N} \} \cup \{p_2\} \vdash \neg\neg p_5$

Αυτή η τυπική απόδειξη είναι:

1.	p_2	Υπόθεση
2.	$p_2 \to p_3$	Υπόθεση
3.	p_3	1,2 MP
4.	$p_3 \to p_4$	Υπόθεση
5.	p_4	3,4 MP
6.	$p_4 \to p_5$	Υπόθεση
7.	p_5	5,6 MP
8.	$p_5 \to \neg\neg p_5$	Τυπικό Θεώρημα
9.	$\neg\neg p_5$	7,8 MP

(*iii*) Από το *θεώρημα της «εις άτοπον απαγωγής»* αρκεί να δείξουμε ότι,

$\{ (\varphi \to \psi), (\varphi \to \neg\psi), \varphi \}$ είναι αντιφατικό,

το οποίο ισχύει διότι με 2 εφαρμογές του *m.p.* λαμβάνουμε τόσο το ψ όσο και το $\neg\psi$.

21) Δείξτε ότι οι παρακάτω υποδηλούμενες τυπικές αποδείξεις δεν υπάρχουν. Επιτρέπεται να χρησιμοποιήσετε τα θεωρήματα Πληρότητας / Εγκυρότητας.

i. $\vdash ((\varphi \to (\varphi \to \neg\psi)) \to (\chi \to \psi)$

ii. $\{ (p_i \to p_{i+1}): i \in \mathbf{N} \} \vdash (p_4 \to p_2)$

Απάντηση

i. Αν υπάρχουν τέτοιες αποδείξεις τότε (από θ. Εγκυρότητας) ό,τι επαληθεύει τις υποθέσεις θα επαληθεύει και τα συμπεράσματα. Αρκεί λοιπόν να βρούμε αποτιμήσεις-«αντιπαραδείγματα» όπου οι υποθέσεις επαληθεύονται μεν, αλλά τα συμπεράσματα όχι. Τα εξής αρκούν:
χ = ΑΛΗΘΕΣ, ψ = ΨΕΥΔΕΣ, ώστε $(\chi \rightarrow \psi)$ = ΨΕΥΔΕΣ. Με αυτά: $((\varphi\rightarrow(\varphi\rightarrow\neg\psi))$ = ΑΛΗΘΕΣ, και ο όλος τύπος διαψεύδεται.

ii. (*ii*) $\langle p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, \ldots \rangle = \langle$ Ψ, Ψ, Ψ, Α, Α, Α, ... $\rangle$. Με αυτά, όλοι οι τύποι $(p_i \rightarrow p_{i+1})$ αληθεύουν, αλλά ο $(p_4 \rightarrow p_2)$ = (Α $\rightarrow$ Ψ) όχι.