

Ασκήσεις Θεωρίας Γραφημάτων

Δένδρα

1)

- i) Σε δένδρο προσθέτουμε k ακμές έτσι ώστε να προκύψει απλό γράφημα. Δείξτε ότι το γράφημα αυτό έχει τουλάχιστον k απλούς κύκλους
- ii) Έστω G απλό συνεκτικό γράφημα με n κορυφές και $m \geq 2n - 2$ ακμές. Δείξτε ότι το G περιέχει δύο απλούς κύκλους ίσου μήκους.

Απάντηση

i) Η πρόσθεση της ακμής e με άκρα τις κορυφές u και v δημιουργεί τον απλό κύκλο που απαρτίζεται από το μοναδικό $u-v$ μονοπάτι πάνω στο δένδρο και την ακμή e . Επειδή κάθε μία από τις k ακμές είναι διαφορετική, προκύπτουν τουλάχιστον k απλοί κύκλοι.

ii) Ας φανταστούμε ότι σχεδιάζουμε το G αρχίζοντας από ένα οποιοδήποτε συνδετικό δένδρο του, T . Αυτό έχει προφανώς $n-1$ ακμές. Στην συνέχεια προσθέτουμε τις υπόλοιπες ακμές του G οι οποίες είναι τουλάχιστον $n-1$. Από το (α) η πρόσθεση των ακμών αυτών δημιουργεί τουλάχιστον $n-1$ απλούς κύκλους. Όμως σε γράφημα με n κορυφές, οι απλοί κύκλοι μπορούν να έχουν μήκος από 3, το ελάχιστο (ένα τρίγωνο) μέχρι και n , το μέγιστο. Δηλαδή υπάρχει ένα διάστημα $n-3+1=n-2$ διαφορετικών μηκών που μπορούν να έχουν οι απλοί κύκλοι του G . Επειδή όπως είπαμε το G έχει τουλάχιστον $n-1$ απλούς κύκλους, δύο τουλάχιστον από αυτούς θα έχουν κατ' ανάγκη ίσο μήκος (Αρχή του Περιστερώνα).

2) Ένα δένδρο με ρίζα είναι ένα δένδρο στο οποίο μία κορυφή χαρακτηρίζεται ρίζα και του οποίου οι κορυφές έχουν τοποθετηθεί σε επίπεδα έτσι ώστε: η ρίζα να είναι στο μηδενικό επίπεδο, οι γειτονικές της κορυφές (στην παράσταση αυτή λέγονται και παιδιά της ρίζας) στο 1^ο επίπεδο, τα παιδιά των παιδιών στο 2^ο επίπεδο κλπ. Ύψος του δένδρου είναι το μήκος του μακρύτερου μονοπατιού από την ρίζα προς κάποιο φύλλο. Δείξτε ότι το συμπληρωματικό γράφημα ενός δένδρου:

- i) αποτελείται από ένα πλήρες γράφημα (κλίκα) και μία απομονωμένη κορυφή αν το ύψος του είναι 1,
- ii) είναι ένα συνεκτικό γράφημα αν το ύψος του είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 3.
- iii) Τι συμβαίνει αν το ύψος του είναι 2;

Απάντηση:

Παρατηρούμε ότι οι κορυφές που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο του δένδρου συνδέονται μεταξύ τους στο συμπληρωματικό γράφημα (και μάλιστα σχηματίζεται το πλήρες γράφημα που συνδέει αυτές τις κορυφές στο συμπληρωματικό). Έστω ότι το δένδρο έχει ύψος μεγαλύτερο ή ίσο του 3. Τότε το δένδρο έχει τουλάχιστον τέσσερα επίπεδα, και οι κορυφές του τελευταίου επιπέδου συνδέονται, στο συμπληρωματικό γράφημα, με αυτές που βρίσκονται δύο ή περισσότερα επίπεδα πιο πάνω. Οι κορυφές του προτελευταίου επιπέδου συνδέονται επίσης με αυτές που βρίσκονται δύο επίπεδα πριν (οι οποίες ήδη είδαμε ότι συνδέονται με το τελευταίο επίπεδο). Άρα δημιουργείται, στο συμπληρωματικό γράφημα, μια μοναδική συνεκτική συνιστώσα. Αν το δένδρο έχει ύψος 1, τότε στο συμπληρωματικό το δεύτερο επίπεδο σχηματίζει κλίκα και η ρίζα του είναι απομονωμένη.

Αν το ύψος είναι 2 δηλαδή έχει τρία επίπεδα, διακρίνουμε περιπτώσεις: Αν το δεύτερο επίπεδο έχει τουλάχιστον δύο κορυφές τότε αυτές συνδέονται «διαγωνίως» με αυτές του τρίτου επιπέδου, οι οποίες με τη σειρά τους συνδέονται με τη ρίζα και έτσι δημιουργείται μία μόνο συνεκτική συνιστώσα. Αν το δεύτερο επίπεδο έχει μόνο μία κορυφή, τότε αυτή στο συμπληρωματικό γράφημα είναι μεμονωμένη, ενώ η ρίζα με τις κορυφές του τρίτου επιπέδου δημιουργούν μία κλίκα.

3)

i) Έστω T δένδρο με $n \geq 2$ κορυφές που έχουν βαθμούς $d_1, d_2, \dots, d_n$. Δείξτε ότι ισχύει $\sum d_i = 2n - 2$.

ii) Έστω $n \geq 2$ και φυσικοί $d_1, d_2, \dots, d_n \geq 1$ για τους οποίους ισχύει ότι $\sum d_i = 2n - 2$. Δείξτε ότι υπάρχει δένδρο με n κορυφές και βαθμούς κορυφών $d_1, d_2, \dots, d_n$.

(Υπόδειξη: Κάντε την απόδειξη με επαγωγή. Στο επαγωγικό βήμα δείξτε ότι όταν ισχύει η σχέση τουλάχιστον μία κορυφή έχει βαθμό 1.)

Απάντηση

i) Εφόσον το T είναι δένδρο έχει $n-1$ ακμές. Επίσης το άθροισμα των βαθμών του είναι από το λήμμα της χειραψίας το διπλάσιο του αριθμού των ακμών, πράγμα που δίνει το ζητούμενο.

ii) Αν $n=2$ τότε η σχέση γίνεται $d_1 + d_2 = 2$ και οι μόνοι φυσικοί που πληρούν την σχέση είναι οι $d_1 = d_2 = 1$ οπότε το μοναδικό απλό γράφημα που την ικανοποιεί είναι το δέντρο που αποτελείται από δύο κορυφές που ενώνονται μεταξύ τους με ακμή. Για την υπόθεση της επαγωγής,

έστω ότι για $n > 2$ και για οποιουδήποτε φυσικούς $d_1, d_2, \dots, d_n \geq 1$ που πληρούν την σχέση $\sum d_i = 2n - 2$, υπάρχει δένδρο με n κορυφές οι βαθμοί των οποίων είναι οι $d_1, d_2, \dots, d_n$. Έστω τώρα ότι δίνονται $n+1$ φυσικοί $d'_1, d'_2, \dots, d'_{n+1} \geq 1$ για τους οποίους ισχύει $\sum d'_i = 2(n+1) - 2 = 2n$. Αν όλοι είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 2, τότε $\sum d'_i \geq 2 \cdot (n+1) = 2n+2$, άτοπο. Άρα ένας τουλάχιστον φυσικός έστω ο $d'_{n+1} = 1$. Δεν μπορεί όμως και όλοι να είναι ίσοι με 1 γιατί τότε το άθροισμα τους θα είναι $n+1$, που είναι πάλι άτοπο. Υπάρχει λοιπόν και κάποιος, έστω ο d'_n , που είναι μεγαλύτερος του 1. Ας ελαττώσουμε λοιπόν τον βαθμό του d'_n κατά 1, δηλ. ας αντικαταστήσουμε το d'_n με το $d''_n = d'_n - 1$ (προφανώς $d''_n \geq 1$). Έχουμε λοιπόν ότι οι n φυσικοί $d'_1, d'_2, \dots, d''_n$ έχουν άθροισμα $d'_1 + d'_2 + \dots + d'_{n-1} + d''_n = 2n - 2$, άρα πληρούν τις προϋποθέσεις της επαγωγικής υπόθεσης και συνεπώς υπάρχει δένδρο T με n κορυφές οι βαθμοί των οποίων είναι οι $d'_1, d'_2, \dots, d''_n$. Συνδέουμε στο T την κορυφή βαθμού d''_n με μια καινούργια κορυφή μέσω μιας ακμής. Το προκύπτον γράφημα είναι και πάλι δένδρο, έχει $n+1$ κορυφές και οι βαθμοί τους είναι οι δοθέντες φυσικοί $d'_1, d'_2, \dots, d'_{n+1}$.

- 4) Έστω ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ με διαφορετικά θετικά βάρη στις ακμές, και έστω T το μοναδικό Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο του G . Να δείξετε ότι το T παραμένει Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο του G αν διπλασιάσουμε το βάρος κάθε ακμής. Συμβαίνει το ίδιο αν προσθέσουμε τον ίδιο θετικό αριθμό στα βάρη των ακμών;

Απάντηση:

1^{ος} τρόπος: Εάν διπλασιάσουμε το βάρος κάθε ακμής στο G τότε η ακολουθία των ακμών κατά αύξουσα σειρά βάρους δεν αλλάζει. Συνεπώς ο αλγόριθμος του Prim, κατά το σχηματισμό του ελάχιστου συνδετικού δέντρου, επισυνάπτει ακμές με την ίδια ακριβώς σειρά. Άρα θα σχηματιστεί και πάλι το συνδετικό δέντρο T (εφόσον μάλιστα το T είναι μοναδικό, δεν υπάρχει περίπτωση να σχηματιστεί άλλο συνδετικό δέντρο).

Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει εάν προσθέσουμε τον ίδιο θετικό αριθμό στα βάρη των ακμών.

2^{ος} τρόπος: Έστω G' το γράφημα που προκύπτει από το G με διπλασιασμό των βαρών. Αν m είναι το συνολικό βάρος του συνδετικού δέντρου T στο G , τότε το συνολικό βάρος του ίδιου δέντρου στο G' είναι $2m$. Αυτό είναι και το ελάχιστο συνολικό βάρος συνδετικού δέντρου στο G' . Πράγματι, αν υπήρχε

συνδετικό δέντρο με συνολικό βάρος $s < 2m$ τότε στο αρχικό γράφημα G αυτό θα είχε συνολικό βάρος $s/2 < m$, δηλαδή στο G θα υπήρχε μικρότερο συνδετικό δέντρο από το T , άτοπο. Συνεπώς το T παραμένει Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο

Το ίδιο συμβαίνει αν προσθέσουμε τον θετικό αριθμό c σε όλα τα βάρη των ακμών. Απλά τότε το συνδετικό δέντρο T που έχει προφανώς $n-1$ ακμές και συνολικό βάρος m στο νέο γράφημα έχει συνολικό βάρος $m+(n-1)c$ και με το ίδιο σκεπτικό δείχνεται ότι αυτό είναι το νέο ελάχιστο συνολικό βάρος.

- 5) Δείξτε ότι αν σε ένα δένδρο με τουλάχιστον 4 κορυφές προσθέσουμε 3 οποιεσδήποτε ακμές, το προκύπτον γράφημα είναι επίπεδο. Δείξτε ότι το ίδιο δεν ισχύει για 4 ακμές (δώστε ένα αντιπαράδειγμα για αυτό).

Απάντηση

Έστω ότι υπάρχει δένδρο T και 3 ζευγάρια κορυφών του (όχι ξένα κατ' ανάγκη) που αν τα ενώσουμε με ακμές προκύπτει μη επίπεδο γράφημα. Από το Θεώρημα Kuratowski αυτό σημαίνει ότι το γράφημα αυτό περιέχει υπογράφημα που είναι υποδιαίρεση του K_5 ή του $K_{3,3}$. Αν τώρα αφαιρέσουμε αυτές τις 3 ακμές πρέπει να επανέλθουμε στο αρχικό μας δένδρο T . Όμως με την αφαίρεση μόνο 3 ακμών δεν μπορούν να καταστραφούν όλοι οι κύκλοι του K_5 ή του $K_{3,3}$, άτοπο. Για την περίπτωση των 4 ακμών, αν θεωρήσουμε το P_6 (μονοπάτι 6 κορυφών), μπορούμε να προσθέσουμε 4 ακμές και να πάρουμε το $K_{3,3}$.

- 6) Έστω G γράφημα με θετικά βάρη στις ακμές. Ονομάζουμε «βάρος» ενός μονοπατιού p μεταξύ δύο κορυφών του γραφήματος s και t , το βάρος της βαρύτερης ακμής του p (και όχι το άθροισμα των βαρών των ακμών του p όπως το θεωρούμε συνήθως). Έστω T ένα ελάχιστο συνδετικό δένδρο του G . Δείξτε ότι το μονοπάτι που συνδέει τις s και t στο T είναι ένα ελάχιστο μονοπάτι (σε αυτή τη καινούργια θεώρηση του ελάχιστου μονοπατιού) μεταξύ των s και t .

Απάντηση

Έστω p το μονοπάτι μεταξύ των s και t πάνω στο T και έστω e η βαρύτερη ακμή του p με βάρος $w(e)$. Αν αφαιρέσουμε την e τότε το T χωρίζεται σε δύο συνεκτικές συνιστώσες T_1 και T_2 με την s να βρίσκεται στη μία και την t στην άλλη. Αν συνεπώς το p δεν είναι ελάχιστο $s-t$ μονοπάτι σύμφωνα με την καινούργια θεώρηση, τότε θα υπάρχει κάποιο άλλο μονοπάτι p' με μικρότερο βάρος από το p . Το p' αναγκαστικά θα πρέπει να ενώνει τις συνιστώσες T_1

και T_2 και άρα μία τουλάχιστον ακμή του έστω η e' έχει μία κορυφή στην T_1 και την άλλη στην T_2 . Θα πρέπει επίσης να ισχύει ότι $w(e') < w(e)$ επειδή το p' έχει μικρότερο βάρος από το p . Όμως τότε αν αφαιρούσαμε από το T την e και προσθέταμε την e' θα παίρναμε συνδετικό δένδρο με μικρότερο βάρος από το T , άτοπο.