

Ασκήσεις Θεωρίας Γραφημάτων

Εφαρμογές στην Κατηγορηματική Λογική

Επιπεδότητα

1)

i) Θεωρούμε την γλώσσα της κατηγορηματικής λογικής που ορίζεται σε απλά, συνεκτικά, μη κατευθυντικά (μη κατευθυνόμενα) γραφήματα και περιλαμβάνει το κατηγορηματικό σύμβολο P . Το $P(x,y)$ σημαίνει ότι οι κορυφές x και y συνδέονται με ακμή. Στην γλώσσα αυτή γράψτε δύο τύπους $\varphi_1(x)$ και $\varphi_2(x)$ που να δηλώνουν αντίστοιχα ότι «η κορυφή x έχει βαθμό 2» (αντίστοιχα 3).

ii) Δώστε τύπο φ που να δηλώνει «όλες οι κορυφές βαθμού 2 συνδέονται με όλες τις κορυφές βαθμού 3 και καμία κορυφή βαθμού 3 δεν συνδέεται με άλλη κορυφή βαθμού 3».

iii) Δώστε γράφημα με τουλάχιστον 5 κορυφές που να επαληθεύει τον τύπο του (i).

Απάντηση

i)

$$\varphi_1(x) = \exists y \exists z (y \neq z \wedge P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge \forall w (P(x, w) \rightarrow w = y \vee w = z))$$

$$\varphi_2(x) = \exists y \exists z \exists w (y \neq z \wedge y \neq w \wedge w \neq z \wedge P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge P(x, w) \wedge \forall u (P(x, u) \rightarrow u = y \vee u = z \vee u = w))$$

ii) Χρησιμοποιούμε για ευκολία τους τύπους που γράψαμε στο (iii) και έχουμε:

$$\varphi = \forall x \forall y (\varphi_1(x) \wedge \varphi_2(y) \rightarrow P(x, y)) \wedge \neg \exists x \exists y (\varphi_2(x) \wedge \varphi_2(y) \wedge P(x, y))$$

iii) Ένα τέτοιο γράφημα είναι π.χ. το διμερές $K_{2,3}$ με δύο κορυφές βαθμού 3 και τρεις βαθμού 2.

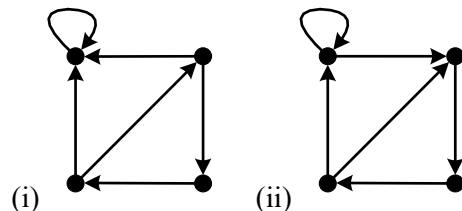
Πάντως και οποιοδήποτε γράφημα χωρίς κορυφές βαθμού 2 ή 3 επαληθεύει τον φ , όπως π.χ. το K_5

2) Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο Q . Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε κατευθυνόμενα γραφήματα χωρίς παράλληλες ακμές όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $Q(x, y)$ ερμηνεύεται ως «υπάρχει ακμή από την κορυφή x στην κορυφή y ».

i) Δίνεται η πρόταση $\theta = \exists x \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists y [Q(x, x_1) \wedge Q(x_1, x_2) \wedge Q(x_2, x_3) \wedge Q(x_3, y)]$.

Να εξηγήσετε (στη φυσική γλώσσα) ποια γραφήματα επαληθεύουν την θ . Να δώσετε μια δομή με τουλάχιστον 4 κορυφές που επαληθεύει την πρόταση θ . Να δώσετε μια δομή με το πολύ 3 κορυφές που επαληθεύει την πρόταση θ .

ii) Να διατυπώσετε μια πρόταση που αληθεύει στο γράφημα (i) παραπλεύρως και δεν αληθεύει στο γράφημα (ii).



iii) Δίνεται η πρόταση $\varphi = \exists x \{ \neg Q(x, x) \wedge \forall y [x \neq y \rightarrow (Q(x, y) \wedge \forall z \neg Q(y, z))] \}$.

Να εξηγήσετε (στη φυσική γλώσσα και χρησιμοποιώντας την έννοια του έξω-βαθμού κορυφής) ποια γραφήματα επαληθεύουν την φ . Να δώσετε μια δομή με τουλάχιστον 5 κορυφές που επαληθεύει την πρόταση φ .

Υπόδειξη: Σκεφθείτε ποιες κορυφές ικανοποιούν τον τύπο $\psi(x) = \forall y [x \neq y \rightarrow (Q(x, y) \wedge \forall z \neg Q(y, z))]$.

Υπενθύμιση: Σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα, ο έξω-βαθμός μιας κορυφής u είναι ο αριθμός των ακμών που ξεκινούν από την u .

Απάντηση

- i) Η πρόταση θ απαιτεί την ύπαρξη 5 κορυφών (όχι κατ' ανάγκη διαφορετικών μεταξύ τους) ώστε η 1^n να συνδέεται με τη 2^n , η 2^n να συνδέεται με την 3^n , η 3^n να συνδέεται με την 4^n , και η 4^n να συνδέεται με την 5^n . Επομένως η θ επαληθεύεται από κάθε κατευθυνόμενο γράφημα που περιλαμβάνει διαδρομή με μήκος τουλάχιστον 4. Ακολουθούν δύο παραδείγματα γραφημάτων που επαληθεύουν τη θ , το πρώτο με 5 κορυφές και το δεύτερο με 1 κορυφή.



ii)

- 1^{ος} τρόπος:** Το γράφημα (i) έχει μία κορυφή (την πάνω αριστερά) από την οποία δεν υπάρχει εξερχόμενη ακμή προς καμία άλλη κορυφή. Αντίθετα το γράφημα (ii) δεν έχει τέτοια κορυφή. Επομένως, μια πρόταση που αληθεύει στο γράφημα (i) και δεν αληθεύει στο γράφημα (ii) είναι:

$$\exists x \forall y (x \neq y \rightarrow \neg Q(x, y))$$

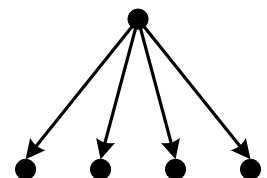
- 2^{ος} τρόπος:** Το γράφημα (ii) έχει απλό κύκλο μήκους 4 ενώ το γράφημα (i) δεν έχει τέτοιο κύκλο. Επομένως, μια πρόταση που αληθεύει στο γράφημα (i) και δεν αληθεύει στο γράφημα (ii) είναι:

$$\neg [\exists x \exists y \exists z \exists w (x \neq y \wedge x \neq z \wedge x \neq w \wedge y \neq z \wedge y \neq w \wedge z \neq w \wedge Q(x, y) \wedge Q(y, z) \wedge Q(z, w) \wedge Q(w, x))]$$

- iii) Η πρόταση φ απαιτεί την ύπαρξη κορυφής x που δεν έχει ανακύκλωση και για κάθε άλλη κορυφή y , η x συνδέεται με την y και η y δεν έχει καμία εξερχόμενη ακμή (ούτε ανακύκλωση). Με άλλα λόγια, η φ αληθεύει σε γραφήματα χωρίς ανακυκλώσεις όπου υπάρχει μία και μόνο κορυφή που έχει εξερχόμενες ακμές και αυτή η κορυφή συνδέεται με όλες τις άλλες κορυφές.

Επομένως, στη φυσική γλώσσα και χρησιμοποιώντας την έννοια του έξω-βαθμού, η φ αληθεύει σε κατευθυνόμενα γραφήματα (χωρίς παράλληλες ακμές και) χωρίς ανακυκλώσεις όπου μία κορυφή έχει έξω-βαθμό $n - 1$ και όλες οι άλλες κορυφές έχουν έξω-βαθμό 0 (n είναι ο συνολικός αριθμός των κορυφών).

Ένα παράδειγμα γραφήματος με 5 κορυφές που επαληθεύει τη φ είναι:



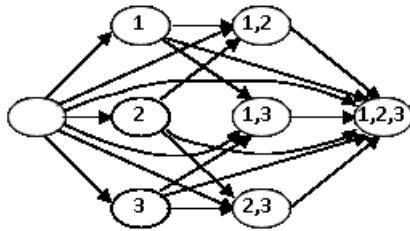
- 3) Έστω $S_n = \{1, \dots, n\}$ και έστω $P(S_n)$ το σύνολο των υποσυνόλων του S_n . Ονομάζουμε επίπεδο $E_m, m = 1, \dots, n$ το υποσύνολο του $P(S_n)$ που αποτελείται από τα σύνολα με ακριβώς m στοιχεία. Θεωρούμε τα S_3 και $P(S_3)$. Εισάγουμε το κατηγορηματικό σύμβολο Q το οποίο ερμηνεύουμε ως εξής: $Q(x, y)$ αν και μόνο αν $x \subseteq y$.

- α) Σχεδιάστε το κατευθυνόμενο γράφημα με σύνολο κορυφών τέτοιο που κάθε κορυφή να αντιστοιχεί σε ένα στοιχείο του $P(S_3)$ και σύνολο ακμών το $A_3 = \{(x, y) | x, y \in P(S_3) \text{ και } Q(x, y)\}$.
- β) Χρησιμοποιώντας το $Q(x, y)$, δώστε ένα τύπο $\varphi(x)$ που να ικανοποιείται από τις κορυφές του επιπέδου 2 και μόνον από αυτές.
- γ) Για κάθε έναν από τους παρακάτω τύπους δώστε την ερμηνεία του στα ελληνικά αναφορικά με το παραπάνω γράφημα και πείτε αν ικανοποιείται ή όχι στο γράφημα αυτό.
- $\varphi_1(x, y) = \exists y_1 \exists y_2 \exists y_3 (Q(x, y_1) \wedge Q(y_1, y_2) \wedge Q(y_2, y_3) \wedge Q(y_3, y))$
 - $\varphi_2(x, y) = \exists y_1 \exists y_2 \exists y_3 ((y_1 \neq y_2) \wedge (y_2 \neq y_3) \wedge (y_1 \neq y_3) \wedge Q(x, y_1) \wedge Q(y_1, y_2) \wedge Q(y_2, y_3) \wedge Q(y_3, y))$

3. $\psi_1(x, y) = \varphi_1(x, y) \wedge x = y$
4. $\psi_2(x, y) = \varphi_2(x, y) \wedge x = y$

Απάντηση

α) Το ζητούμενο γράφημα φαίνεται στο σχήμα. Κάθε κορυφή του έχει επίσης και ανακύκλωση που έχει παραληφθεί για λόγους απλότητας του σχήματος. Παρατηρήστε ότι αν σχεδιάσουμε την κορυφή που αντιστοιχεί στο κενό σύνολο στα αριστερά σε μια στήλη που την αριθμούμε με το 0, τα μονοσύνολα σε μια στήλη που την αριθμούμε με 1, δεξιά από την μηδενική στήλη κ.ο.κ., τότε κάθε κορυφή που αντιστοιχεί σε σύνολο επιπέδου k βρίσκεται στην k -οστή στήλη. Οι ακμές ξεκινούν από μία κορυφή κάποιου επιπέδου E_k και κατευθύνονται σε κορυφή κάποιου επιπέδου E_i στα δεξιά δηλ. με $i > k$.



β) Μια κορυφή στο επίπεδο 2 έχει, όπως φαίνεται και από το σχήμα, μόνο μία «επόμενη» κορυφή, δηλαδή από αυτή ξεκινά μόνο μία ακμή (πλην της ανακύκλωσης). Ο ζητούμενος τύπος είναι λοιπόν:

$$\varphi(x) = \exists y[y \neq x \wedge Q(x, y) \wedge \forall z(Q(x, z) \rightarrow z = y \vee z = x)]$$

γ) Η ερμηνεία των τεσσάρων τύπων είναι η ακόλουθη:

1. $\varphi_1(x, y) = \exists y_1 \exists y_2 \exists y_3 (Q(x, y_1) \wedge Q(y_1, y_2) \wedge Q(y_2, y_3) \wedge Q(y_3, y))$: Για τις κορυφές x και y του γραφήματος υπάρχουν τρεις κορυφές y_1, y_2, y_3 τέτοιες που να υπάρχουν οι ακμές $x \rightarrow y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow y_3 \rightarrow y$. Η πρόταση αληθεύει διότι μπορούμε, για παράδειγμα, να θεωρήσουμε σαν x την κορυφή που αντιστοιχεί στο $\emptyset$, σαν y την κορυφή που αντιστοιχεί στο $\{1\}$ οπότε επαληθεύεται για $y_1 = y_2 = y_3 = y$.
2. $\varphi_2(x, y) = \exists y_1 \exists y_2 \exists y_3 ((y_1 \neq y_2) \wedge (y_2 \neq y_3) \wedge (y_1 \neq y_3) \wedge Q(x, y_1) \wedge Q(y_1, y_2) \wedge Q(y_2, y_3) \wedge Q(y_3, y))$
Οι κορυφές x και y του γραφήματος είναι άκρα κατευθυνόμενου μονοπατιού μήκους 2 ή μήκους 3. Δηλαδή υπάρχουν τρεις διαφορετικές μεταξύ τους κορυφές y_1, y_2, y_3 τέτοιες που να υπάρχουν οι ακμές $x \rightarrow y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow y_3 \rightarrow y$. Η πρόταση περιγράφει την ύπαρξη μονοπατιού μήκους 2 όταν $x = y_1$ και $y_3 = y$ ή μήκους 3 όταν μόνο μία ισότητα από τις $x = y_1$ και $y_3 = y$ ισχύει. Αληθεύει, διότι μπορούμε να θεωρήσουμε σαν x την κορυφή που αντιστοιχεί στο $\emptyset$, σαν y την κορυφή που αντιστοιχεί στο $\{1, 2, 3\}$ οπότε αληθεύει για y_1 την κορυφή που αντιστοιχεί στο $\{1\}$, y_2 την κορυφή που αντιστοιχεί στο $\{1, 2\}$ και $y_3 = y$.
3. $\psi_1(x, y) = \varphi_1(x, y) \wedge x = y$: Για την κορυφή x του γραφήματος υπάρχουν τρεις κορυφές y_1, y_2, y_3 τέτοιες που να υπάρχουν οι ακμές $x \rightarrow y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow y_3 \rightarrow y$. Η πρόταση αληθεύει αρκεί να θέσουμε $x = y_1 = y_2 = y_3$ (οπότε όλες οι παραπάνω ακμές είναι ανακυκλώσεις).
4. $\psi_2(x, y) = \varphi_2(x, y) \wedge x = y$: Στο γράφημα υπάρχει κύκλος μήκους 2 ή μήκους 3. Προφανώς δεν αληθεύει. Στο γράφημα δεν υπάρχουν κύκλοι παρά μόνο ανακυκλώσεις.

4) Θεωρούμε την γλώσσα της κατηγορηματικής λογικής που ορίζεται σε μη κατευθυνόμενα απλά γραφήματα και περιλαμβάνει ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P και δύο μονομελή A και M . Το $P(x, y)$ ερμηνεύεται με τη σχέση όλων των ζευγαριών κορυφών που συνδέονται με ακμή ενώ το $A(x)$ (αντιστοίχως, $M(x)$) δηλώνει ότι η κορυφή x είναι άσπρη (αντιστοίχως μαύρη).

1. Χρησιμοποιώντας τα $A(x)$ και $M(x)$, δώστε ένα τύπο φ_1 που να δηλώνει «κάθε κορυφή είναι μονοχρωματική δηλαδή έχει ένα και μόνο χρώμα».
2. Χρησιμοποιώντας τα $P(x, y)$, $A(x)$ και $M(x)$, δώστε ένα τύπο φ_2 που να δηλώνει «κάθε κορυφή είναι μονοχρωματική και γειτονεύει με κορυφές διαφορετικού χρώματος από αυτή».
3. Όπως παραπάνω με τον τύπο φ_3 να δηλώνει τώρα «κάθε κορυφή είναι μονοχρωματική και κάθε απομονωμένη κορυφή του γραφήματος είναι μαύρη».
4. Δώστε δομή με 6 κορυφές που να επαληθεύει τους τύπους των (2) και (3) ταυτόχρονα.

Απάντηση

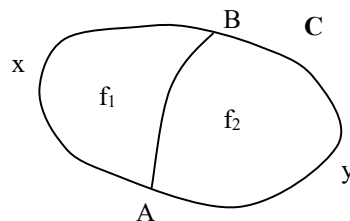
1. $\varphi_1 = \forall x((M(x) \wedge \neg A(x)) \vee (A(x) \wedge \neg M(x)))$
2. $\varphi_2 = \varphi_1 \wedge \forall x \forall y((P(x, y) \vee P(y, x)) \rightarrow ((A(x) \rightarrow M(y)) \wedge (M(x) \rightarrow A(y))))$
3. $\varphi_3 = \varphi_1 \wedge \forall x(K(x) \rightarrow M(x))$
όπου ο τύπος $K(x)$ δηλώνει ότι η x είναι απομονωμένη κορυφή δηλαδή $K(x) = \forall y(\neg P(x, y) \wedge \neg P(y, x))$.
4. Ένα παράδειγμα δομής είναι η δομή με σύμπαν $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ που ορίζεται ως εξής: το σύμβολο P ερμηνεύεται ως η διμελής σχέση $\{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 5), (6, 1), (1, 6)\}$. Το σύμβολο A ερμηνεύεται ως η μονομελής σχέση $\{1, 3, 5\}$. Το σύμβολο $M(x)$ ερμηνεύεται ως η μονομελής σχέση $\{2, 4, 6\}$. Η παραπάνω δομή είναι ο κύκλος C_6 με χρωματισμένες τις κορυφές του άσπρες και μαύρες εναλλάξ. Σημειώστε πως επιλέξαμε να μην υπάρχει καθόλου απομονωμένη κορυφή.

5) α) Θεωρήστε μία επίπεδη αποτύπωση ενός γραφήματος και έστω C ένας κύκλος ο οποίος περιλαμβάνει ακριβώς δύο όψεις της αποτύπωσης. Δείξτε ότι αν κάθε μία από τις όψεις είναι άρτιος κύκλος, τότε και ο C είναι άρτιος κύκλος. Γενικεύστε για την περίπτωση που ο C περικλείει αυθαίρετο αριθμό όψεων και όλες είναι άρτιοι κύκλοι.

β) Δείξτε ότι ένα απλό επίπεδο γράφημα είναι διμερές αν και μόνο αν κάθε εσωτερική όψη του είναι άρτιος κύκλος.

Απάντηση

α) Έστω f_1 και f_2 οι δύο όψεις που περιλαμβάνει ο κύκλος C . Αν το κοινό τους σύνορο AB είναι περιττό μονοπάτι τότε επειδή η όψη f_1 είναι άρτιος κύκλος, το τόξο AxB θα είναι περιττό μονοπάτι. Παρόμοια, επειδή η f_2 είναι άρτιος κύκλος, το τόξο AyB θα είναι περιττό μονοπάτι. Συνεπώς, ο κύκλος C θα είναι άρτιος. Αν πάλι το AB είναι άρτιο μονοπάτι, τότε τα AxB και AyB είναι επίσης άρτια μονοπάτια και άρα ο C είναι και πάλι άρτιος. Γενικεύοντας, έστω ότι ο C περικλείει k όψεις, και όλες είναι άρτιοι κύκλοι. Στο σχήμα,



έστω ότι στην περιοχή ABx (που δηλώνεται σαν f_2) περικλείονται $k-1$ από τις όψεις του C ενώ η k -οστή είναι αυτή που σημειώνεται σαν f_1 . Υποθέτουμε επαγωγικά, ότι το σύνορο των $k-1$ όψεων δηλαδή ο κύκλος ABx είναι άρτιος κύκλος. Τότε επιχειρηματολογώντας ακριβώς όπως

παραπάνω για το κοινό σύνορο AB των f_1 και f_2 , καταλήγουμε στο ότι ο C είναι άρτιος κύκλος.
 β) Αν ένα γράφημα είναι διμερές τότε κάθε κύκλος του είναι άρτιος και συνεπώς και κάθε εσωτερική του όψη (που είναι βέβαια κύκλος) είναι επίσης άρτια. Αντίστροφα, έστω ένα επίπεδο γράφημα που σε μια επίπεδη αποτύπωση του κάθε εσωτερική του όψη είναι άρτιος κύκλος. Ένας τυχαίος κύκλος του γραφήματος είναι το σύνορο κάποιου αριθμού όψεων και από το (α) επειδή όλες οι όψεις είναι άρτιοι κύκλοι, και ο τυχαίος κύκλος είναι άρτιος. Συμπεραίνουμε ότι το γράφημα είναι διμερές.

6) Δείξτε ότι ένα απλό επίπεδο γράφημα με 8 κορυφές και 13 ακμές δε μπορεί να χρωματιστεί με δύο χρώματα.

Απάντηση

Αν F ο αριθμός των όψεων του γραφήματος σε μια επίπεδη απεικόνιση, η εφαρμογή του τύπου του Euler δίνει $8+F=13+2$ ή $F=7$. Θα δείξουμε ότι ένα τέτοιο γράφημα θα πρέπει κατ' ανάγκη να περιέχει ένα τουλάχιστον τρίγωνο. Αν δεν περιείχε, τότε ο βαθμός κάθε όψης θα έπρεπε να είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 4 και το άθροισμα των βαθμών των όψεων μεγαλύτερο ή ίσο του $4 \cdot 7 = 28$. Το άθροισμα όμως των βαθμών των όψεων είναι το πολύ διπλάσιο του αριθμού των ακμών μια και κάθε ακμή συμμετέχει σε δύο όψεις το πολύ. Δηλαδή $28 \leq 2 \cdot 13 = 26$, άτοπο.

7) α) Έστω G απλό επίπεδο γράφημα. Συμβολίζουμε με n τον αριθμό των κορυφών του και με m τον αριθμό των ακμών του. Δείξτε ότι $m \leq 3n-6$. Στη συνέχεια, δείξτε ότι αν επιπλέον ισχύει ότι κάθε όψη του G είναι τρίγωνο, τότε $m=3n-6$.

β) Έστω G ένα απλό επίπεδο γράφημα του οποίου κάθε όψη είναι τρίγωνο. Συμβολίζουμε με p_i τον αριθμό των κορυφών βαθμού i στο G . Δείξτε ότι $\sum (6-i)p_i = 12$, όπου το άθροισμα είναι πάνω σε όλους τους βαθμούς i που έχουν οι κορυφές του G .

Απάντηση

α) Έστω n οι κορυφές, m οι ακμές και k οι όψεις του G . Συμβολίζουμε με $\deg(f_i)$ τον βαθμό (δηλαδή το μήκος του κύκλου που αποτελεί το σύνορο της) της όψης f_i . Επειδή κάθε όψη είναι τουλάχιστον τρίγωνο, το άθροισμα των βαθμών όλων των όψεων είναι . ότι $\sum \deg(f_i) \leq 3k$. Επειδή επίσης κάθε ακμή είτε αποτελεί σύνορο ακριβώς δύο όψεων, είτε βρίσκεται στο εσωτερικό μιας όψης, έχουμε ότι $\sum \deg(f_i) \leq 2m$ και συνεπώς $2m \geq 3k$. Εφαρμόζοντας τον τύπο του Euler στο G έχουμε:

$$n + k = m + 2 \Leftrightarrow$$

$$3n + 3k = 3m + 6 \Rightarrow$$

$$3n + 2m \geq 3m + 6 \Leftrightarrow$$

$$m \leq 3n - 6$$

Όταν κάθε όψη είναι τρίγωνο, τότε κάθε ακμή είναι σύνορο ακριβώς δύο όψεων και σε αυτή τη περίπτωση το άθροισμα των βαθμών των όψεων του G είναι ακριβώς $3k$ και άρα $2m=3k$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler όπως παραπάνω έχουμε το ζητούμενο.

β) Έχουμε ότι $\sum (6-i)p_i = \sum 6p_i - \sum ip_i$. Όμως $\sum p_i = n$ και $\sum ip_i$ είναι το άθροισμα των βαθμών των κορυφών του γραφήματος. Δηλαδή $\sum ip_i = 2m$. Από το (α), $m=3n-6$ που αντικαθιστώμενο δίνει το ζητούμενο.

8) Έστω $G=(V,E)$ ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα με σύνολο κορυφών το $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ στο οποίο κάθε κορυφή v_i συνδέεται με το πολύ $k-1$ ($k \geq 1$) από τις κορυφές $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}$. Δείξτε με επαγωγή στον αριθμό των κορυφών, ότι το G έχει έγκυρο χρωματισμό με k χρώματα, δηλαδή χρωματισμό στον οποίο δύο γειτονικές κορυφές χρωματίζονται με διαφορετικά χρώματα.

Απάντηση

Η πρόταση είναι κατ' αρχήν τετριμμένη για $k \geq n$. Για μικρότερες τιμές του k χρησιμοποιούμε επαγωγή στον αριθμό των κορυφών. Για $n=2$ τα μόνα δυνατά γραφήματα είναι το K_2 (για $k=2$) και το γράφημα που αποτελείται από 2 απομονωμένες κορυφές (για $k=1$). Και στις δύο περιπτώσεις υπάρχει χρωματισμός με k χρώματα.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι για κάθε γράφημα G με $n > 2$ κορυφές και για κάθε k , $1 \leq k \leq n$, αν οι κορυφές του G μπορούν να αριθμηθούν με κάποια διάταξη έτσι ώστε μια κορυφή να συνδέεται με το πολύ $k-1$ από τις προηγούμενες, τότε το G μπορεί να χρωματιστεί με k χρώματα. Θεωρούμε γράφημα G με $n+1$ κορυφές με τα ίδια χαρακτηριστικά. Όπως αναφέρθηκε στην αρχή μπορούμε να υποθέσουμε ότι $k < n+1$. Αν αφαιρέσουμε από το G την κορυφή v_{k+1} (την τελευταία στη διάταξη), το γράφημα G' που απομένει έχει τα χαρακτηριστικά της υπόθεσης της επαγωγής και άρα χρωματίζεται με k χρώματα. Όμως η κορυφή v_{k+1} συνδέεται με το πολύ $k-1$ κορυφές και άρα ακόμη και αν όλες αυτές έχουν διαφορετικό χρώμα στο G' , υπάρχει διαθέσιμο ένα τουλάχιστον διαφορετικό χρώμα με το οποίο η v_{k+1} μπορεί να χρωματιστεί με νόμιμο τρόπο.

9) Σε ένα επίπεδο συνεκτικό γράφημα με n κορυφές στο οποίο κάθε ακμή αποτελεί σύνορο ακριβώς δύο όψεων, συμβολίζουμε με f_i τον αριθμό των όψεων του που έχουν βαθμό (ή αλλιώς, μήκος) i .

- i) Δείξτε χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler ότι $\sum_{i=3}^n (i-2)f_i = 2(n-2)$.
- ii) Ένα γράφημα ονομάζεται εξω-επίπεδο (outerplanar) αν μπορεί να σχεδιαστεί στο επίπεδο έτσι ώστε το σύνορο της εξωτερικής όψης να είναι απλός κύκλος που περιλαμβάνει όλες τις κορυφές του γραφήματος.
(Παράδειγμα εξω-επίπεδου γραφήματος είναι ο κύκλος C_n , $n \geq 4$, στον οποίο προσθέτουμε μία χορδή, ενώ παράδειγμα επίπεδου αλλά όχι εξω-επίπεδου γραφήματος είναι το K_4 .) Βασιζόμενοι στο (i) δείξτε ότι σε ένα εξω-επίπεδο γράφημα ισχύει ότι $\sum_{i=3}^n (i-2)f_i = (n-2)$ όπου τώρα με f_i συμβολίζουμε τον αριθμό των εσωτερικών όψεων του που έχουν βαθμό i .

Απάντηση

i) Έστω f το πλήθος των όψεων του γραφήματος. Προφανώς ισχύει ότι $f = \sum_{i=3}^n f_i$ όπου η άθροιση γίνεται πάνω σε όλους τους δυνατούς βαθμούς μιας όψης δηλ. από $i=3$ έως $i=n$. Επίσης, το άθροισμα των βαθμών όλων των όψεων ισούται με $\sum_{i=3}^n i f_i$. Μια όμως και κάθε ακμή προσθέτει στο άθροισμα των βαθμών των όψεων 2 μονάδες και αν συμβολίσουμε με e τον αριθμό των ακμών του γραφήματος, καταλήγουμε ότι $\sum_{i=3}^n i f_i = 2e$ (η σχέση αυτή είναι το ανάλογο του Λήμματος της Χειραψίας, όσον αφορά τους βαθμούς των όψεων). Σε ένα συνεκτικό επίπεδο γράφημα ισχύει επίσης ο τύπος του Euler δηλ. ότι $n+f=e+2$. Αντικαθιστώντας εδώ τις δύο προηγούμενες σχέσεις παίρνουμε $n + \sum_{i=3}^n f_i = \frac{1}{2} \sum_{i=3}^n i f_i + 2$. Από αυτήν έχουμε αμέσως το ζητούμενο.

ii) Ένα εξω-επίπεδο γράφημα έχει μία όψη βαθμού n , την εξωτερική (μπορεί να έχει και δεύτερη αν πρόκειται για τον κύκλο C_n). Στην σχέση του (i) η συνεισφορά της εξωτερικής όψης στο άθροισμα είναι $n-2$. Αν λοιπόν διασπάσουμε το άθροισμα έτσι ώστε να γίνεται μόνο στις εσωτερικές όψεις έχουμε ότι η καινούργια τιμή του f_n είναι κατά 1 μικρότερη ενώ υπάρχει και ο προσθετός $n-2$ της εξωτερικής όψης. Δηλαδή θα έχουμε $\sum_{i=3}^n (i-2)f_i + (n-2) = 2(n-2)$. Το ζητούμενο προκύπτει αμέσως.